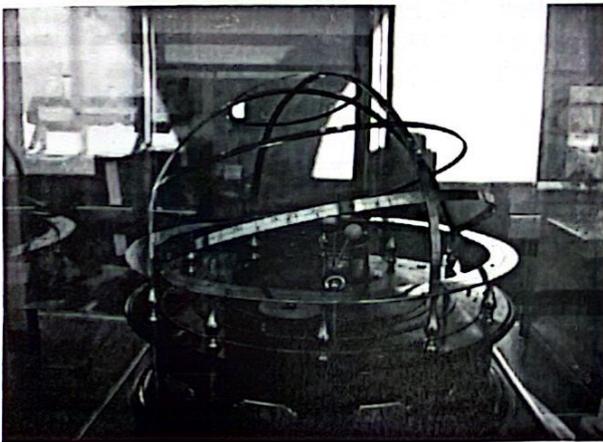


## Mécanique MC6 Mouvements à force centrale

I Forces centrales conservatives.....	2
1.) Forces centrales .....	2
2.) Forces centrales conservatives.....	2
II Lois générales de conservation.....	3
1.) Conservation du moment cinétique .....	3
2.) Conservation de l'énergie mécanique .....	4
3.) Description des trajectoires pour les champs newtoniens.....	5
III Mouvement dans un champ gravitationnel .....	7
1.) Les trois lois de Kepler.....	7
2.) Vitesse de libération .....	7
3.) Etude d'un mouvement circulaire .....	8
4.) Satellites terrestres.....	9
IV Script python : Satellite soumis à la force d'interaction gravitationnelle, tracé des trajectoires. ....	11
1.) Principe.....	11
2.) Mise en oeuvre.....	11



En astronomie, une **sphère armillaire**, aussi connue sous le nom d'*astrolabe sphérique*, est une modélisation basée sur la sphère céleste utilisée pour en montrer le mouvement apparent des étoiles autour de la Terre et du Soleil dans l'[écliptique](#).

**Mesurer la surchauffe en ville** : Grâce à un suivi systématique par satellite des températures au sol, il sera possible de mieux planifier les constructions urbaines pour limiter l'effet d'îlot de chaleur. [Sean Bailly](#) | 1 septembre 2022 | [Pour la science N° 539](#)

L'été 2022 aura été marqué par plusieurs vagues de chaleur intenses en Europe, mais aussi aux États-Unis et en Asie. Pour les spécialistes, ce phénomène serait amené à devenir plus fréquent et intense avec le changement climatique. La situation des villes est particulièrement préoccupante à cause de l'effet « îlot de chaleur urbain » : la minéralisation de l'espace public, l'activité humaine et la configuration des villes contribuent à accumuler encore plus de chaleur.

Pour suivre cet effet, l'ESA prépare la mission LSTM (*Land Surface Temperature Monitoring*), qui sera menée par le satellite du programme Copernicus *Sentinel-8* (qui devrait être opérationnel en 2029) et qui procédera à une mesure systématique des températures au sol, grâce à une caméra infrarouge. Afin de développer les outils d'analyse adaptés à cette nouvelle mission, les chercheurs ont utilisé les données de l'instrument de la Nasa Ecostress, installé à bord de la *Station spatiale internationale*, pour simuler les données de LSTM. Sa mission scientifique concerne la réponse de la biosphère à la disponibilité de l'eau. Les plantes régulent leur température par évapotranspiration. Mais si l'eau vient à manquer, leur température augmente.

Le futur satellite *Sentinel* aura une résolution spatiale de 50 mètres, comparable à celle d'Ecostress, et 400 fois supérieure aux deux satellites *Sentinel-3*, lancés en 2016 et 2018, dédiés à une mission océanographique et à la surveillance de la végétation sur les terres émergées.

Les relevés d'Ecostress pour Paris, Milan et Prague pour le 18 juin 2022, pendant une vague de chaleur, montrent par exemple que les espaces verts jouent un rôle crucial pour réduire les températures locales. L'objectif de LSTM est d'être un outil efficace pour la planification urbaine, afin de limiter l'effet d'îlot de chaleur urbain ou, pour les agriculteurs, afin d'optimiser la gestion de l'eau.

I Forces centrales conservatives

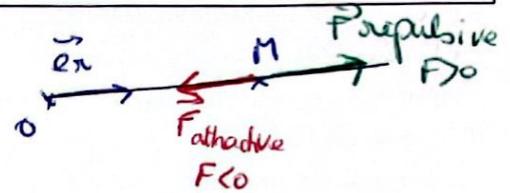
1.) Forces centrales

**Définition :** O point fixe dans  $\mathcal{R}$  galiléen.

Le point matériel M(m) est soumis à une force centrale  $\vec{F}$  de centre O, si à tout instant  $\vec{F}$  est colinéaire à  $\vec{OM}$  :  $\vec{F} = F\vec{e}_r$

$$\vec{e}_r = \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|}$$

$$r = OM$$



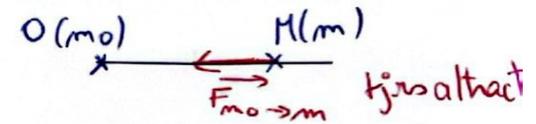
**Exemples :** Ressort fixé en un point d'un plan, planète soumise à l'attraction d'un astre.

**Hypothèses** On ne s'intéresse qu'aux forces telles que  $\vec{F} = F(r)\vec{e}_r$  ( $F(r)$  valeur algébrique)

Cas particulier : interactions newtoniennes :  $F(r) = -\frac{K}{r^2}$

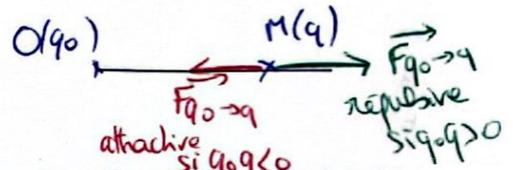
- interaction gravitationnelle :  $m_0$  fixe en O, m mobile en M.

$$\vec{F}_{m_0 \rightarrow m} = -G \frac{m_0 m}{r^2} \vec{e}_r \quad G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2.\text{kg}^{-2} \quad K = G.m_0.m > 0$$



- interaction coulombienne :  $q_0$  fixe en O, q mobile en M.

$$\vec{F}_{q_0 \rightarrow q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q}{r^2} \vec{e}_r \quad \epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1} \quad K = -\frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0}$$



2.) Forces centrales conservatives

**Rappel :** Une force est conservative si elle dérive d'une énergie potentielle, son travail ne dépend pas du chemin suivi.

$$W(\vec{F}) = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \cdot d\vec{e} = - \int_1^2 dE_p = [-E_p]_{M_1}^{M_2} \quad \delta W = \vec{F} \cdot d\vec{e} = -dE_p$$

**Propriété :** Une force centrale de la forme  $\vec{F} = F(r)\vec{e}_r$  est conservative, elle dérive d'une énergie potentielle  $E_p(r)$ .

Pour un champ newtonien :  $F(r) = -\frac{K}{r^2}$  d'où  $E_p(r) = -\frac{K}{r} + cste$

- interaction gravitationnelle :  $\vec{F}_{m_0 \rightarrow m} = -G \frac{m_0 m}{r^2} \vec{e}_r$   $E_p(r) = -G \frac{m_0 m}{r}$   $K = G.m_0.m > 0$

- interaction coulombienne :  $\vec{F}_{q_0 \rightarrow q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q}{r^2} \vec{e}_r$   $E_p(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q}{r}$   $K = -\frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0}$

demo  $\vec{F} = F(r)\vec{e}_r$

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{e} = F(r)\vec{e}_r \cdot d\vec{e}$$

$$= F(r)dr$$

$$= -dE_p$$

$$\Rightarrow F(r) = -\frac{dE_p}{dr}$$

$$\Rightarrow \frac{dE_p}{dr} = \frac{K}{r^2}$$

$$\Rightarrow E_p = -\frac{K}{r} + cste$$

On choisit  $E_p \xrightarrow{r \rightarrow \infty}$

$$\Rightarrow \boxed{cste = 0}$$

Interactions newtoniennes

$$F(r) = -\frac{dE_p}{dr} = -\frac{K}{r^2}$$

II Lois générales de conservation

1.) Conservation du moment cinétique

**Hypothèse :** Point matériel M(m) soumis uniquement à une force centrale  $\vec{F} = F\vec{e}_r$

**Propriété :** Pour un mouvement à force centrale, il y a conservation du moment cinétique.

démo TMC à M(m)

J en O fixe  
R galiléen.

$$\frac{d\vec{L}_O(M/R)}{dt} = M_O(\vec{F})$$

$\vec{F}$  est la résultante des forces appliquées.

M est soumis à  $\vec{F} = F\vec{e}_r$

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F} = r\vec{e}_r \wedge F\vec{e}_r = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}_O(M/R)}{dt} = 0$$

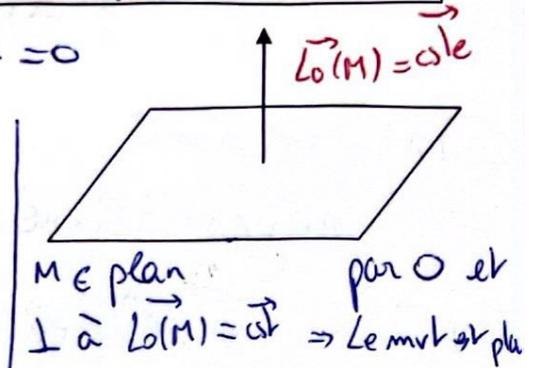
$$\Rightarrow \vec{L}_O(M/R) = c\vec{e}_z$$

conservation du moment cinétique.

Moment cinétique

$$\vec{L}_O(M/R) = \vec{OM} \wedge m\vec{v}(M/R)$$

$$\Rightarrow \forall t \vec{OM} \perp \vec{L}_O(M/R) \text{ vecteur } \vec{L}_O$$



Conséquences :

1. Le mouvement est plan.

2. Le mouvement s'effectue suivant la loi des aires (deuxième loi de Kepler) :

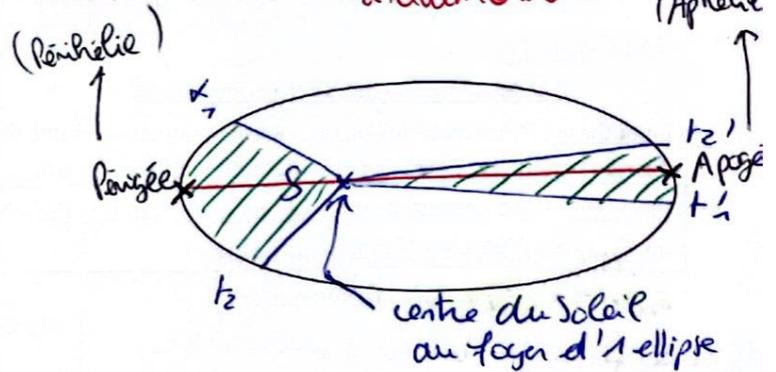
Le rayon vecteur  $OM$  balaie des aires égales pendant des durées égales = la surface balayée est proportionnelle à la durée.

$\vec{L}_O = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z = mC\vec{e}_z$  où  $C = \frac{L_0}{m} = r^2\dot{\theta}$  est la constante de la loi des aires (à démontrer)

$dS = \frac{C}{2} dt$ .  $\frac{dS}{dt}$  est appelée vitesse aréolaire

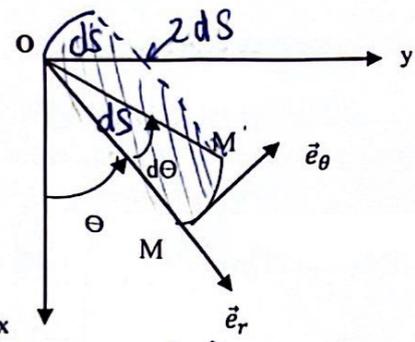
$$\Delta t = t_2 - t_1 = t_2' - t_1'$$

$$\Rightarrow V_{\text{perigée}} > V_{\text{apogée}}$$



Démonstrations: Mvt plan  $\Rightarrow$  coordonnées planes.

$\vec{L}_O(M) \quad \vec{e}_z$   
 $\vec{a}_M = r \vec{e}_r$   
 $\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta$



$\vec{L}_O(M) = \vec{OM} \wedge m \vec{v}$   
 $= r \vec{e}_r \wedge m (\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta)$

$\vec{e}_r \wedge \vec{e}_r = \vec{0} \quad \vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta = \vec{e}_z$   
 $\vec{L}_O(M) = m r^2 \dot{\theta} \vec{e}_z = \vec{C}$

$C = r^2 \dot{\theta}$  cste de la loi des Aires

$\vec{L}_O(M) = m C \vec{e}_z$

Aire balayée par  $\vec{OM}$ ,  $dS$  pendant  $dt$

$M(r, \theta) \rightarrow M'(r+d r, \theta+d \theta)$   
 $2dS = OM \times MM'$   
 $= r \times (r d\theta)$

Rq: On néglige les ~~petits d~~ d'ordre 2 ( $dr \times d\theta$ )  
 $\Rightarrow dS = \frac{r^2 d\theta}{2} = \frac{r^2 d\theta}{2} dt = \frac{r^2 \dot{\theta}}{2} dt$

$dS = \frac{C}{2} dt$  La surface balayée par  $\vec{OM}$  est proportionnelle à la durée  
 $\Rightarrow \frac{dS}{dt} = \frac{C}{2}$  vitesse aérobie

2.) Conservation de l'énergie mécanique

Hypothèse: Point matériel  $M(m)$  soumis uniquement à une force centrale conservative  $\vec{F} = F(r) \vec{e}_r$ , dérivant d'une énergie potentielle  $E_p(r)$  dans le référentiel galiléen lié à  $O$ .

Propriété: Il y a conservation de l'énergie mécanique:  $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} m v^2 + E_p(r) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_{peff}(r)$   
 où  $E_{peff}$  est l'énergie potentielle effective.

$E_{peff}(r) = \frac{L_0^2}{2mr^2} + E_p(r)$  (à démontrer)

La seule force qui  $\mathcal{W}$  est conservative donc conservation de  $E_m$ .

$E_m = E_c + E_p(r)$   
 $= \frac{1}{2} m v^2 + E_p(r)$

$\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta$   
 $v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2$

$\Rightarrow E_m = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + E_p(r)$   
 $= \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 + E_p(r)$

cf MC3 puit & barrière potentielle.

et [1] 1)  $L_0 = m r^2 \dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{L_0}{m r^2}$

$\Rightarrow E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \left( \frac{L_0}{m r^2} \right)^2 + E_p(r)$   
 $= \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{L_0^2}{2m r^2}}_{E_{peff}(r)} + E_p(r)$

$\Rightarrow E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_{peff}(r)$

$\Rightarrow \frac{1}{2} m \dot{r}^2 = E_m - E_{peff}(r)$

Le mvt est possible si  $\dot{r}^2 \geq 0$

$\Rightarrow E_m \geq E_{peff}(r) \quad \text{ou} \quad E_{peff}(r) = E_p(r) + \frac{L_0^2}{2m r^2}$

$L_0$  et  $E_m$  sont 2 cstes du mouvement, données par les CT.

$E_p(r)$  correspond à 1 force conservatrice, donnée

**Rq:**  $\vec{L}_O(M) = \vec{OM} \wedge m\vec{v} = cste$

Si  $\vec{OM}_0 \parallel \vec{v}_0 \Rightarrow \vec{L}_O(M) = \vec{0} \quad \forall t$

Alors  $\vec{OM} \perp \vec{v} \quad \forall t \Rightarrow$  Trajectoire Rechiligne.

3.) Description des trajectoires pour les champs newtoniens

Hypothèse : Point matériel M(m) soumis à une force centrale conservative dérivant d'une énergie potentielle  $E_p = -\frac{K}{r}$  dans le référentiel galiléen lié à O.

[https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Meca/Planetes/Nature\\_FJ.php](https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Meca/Planetes/Nature_FJ.php)

$E_{peff}(r) = \frac{L_0^2}{2mr^2} + E_p(r) = \frac{L_0^2}{2mr^2} - \frac{K}{r}$

$r \in ]0, +\infty[ \quad E_{peff} = \frac{1}{r} \left( \frac{L_0^2}{2mr} - K \right)$

$r \rightarrow 0 \quad E_{peff} \rightarrow +\infty$

$r \rightarrow +\infty \quad E_{peff} \rightarrow 0 \quad E_{peff}(r) = \frac{L_0^2}{2m} r^{-2} - K r^{-1}$

$\frac{dE_{peff}}{dr} = \frac{L_0^2}{2m} (-2r^{-3}) - K(-r^{-2})$   
 $= -\frac{L_0^2}{mr^3} + \frac{K}{r^2}$

$\frac{dE_{peff}}{dr} = \frac{1}{r^2} \left( -\frac{L_0^2}{mr} + K \right)$

$\frac{dE_{peff}}{dr} = 0 \Rightarrow K = \frac{L_0^2}{mr}$

$\Rightarrow r_0 = \frac{L_0^2}{mK}$

$r_0$  existe si  $K > 0$

$E_{peff}(r_0) = \frac{1}{r_0} \left( \frac{L_0^2}{2mr_0} - K \right)$

$= \frac{mK}{L_0^2} \left( \frac{mK}{L_0^2} \times \frac{L_0^2}{2m} - K \right)$   
 $= \frac{mK}{L_0^2} \left( \frac{K}{2} - K \right)$   
 $= \frac{mK}{L_0^2} \left( -\frac{K}{2} \right)$

$E_{peff}(r_0) = -\frac{mK^2}{2L_0^2} < 0$

$-\frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} > 0$   
 $g_{\text{man}} > 0$

$q_0 q < 0$

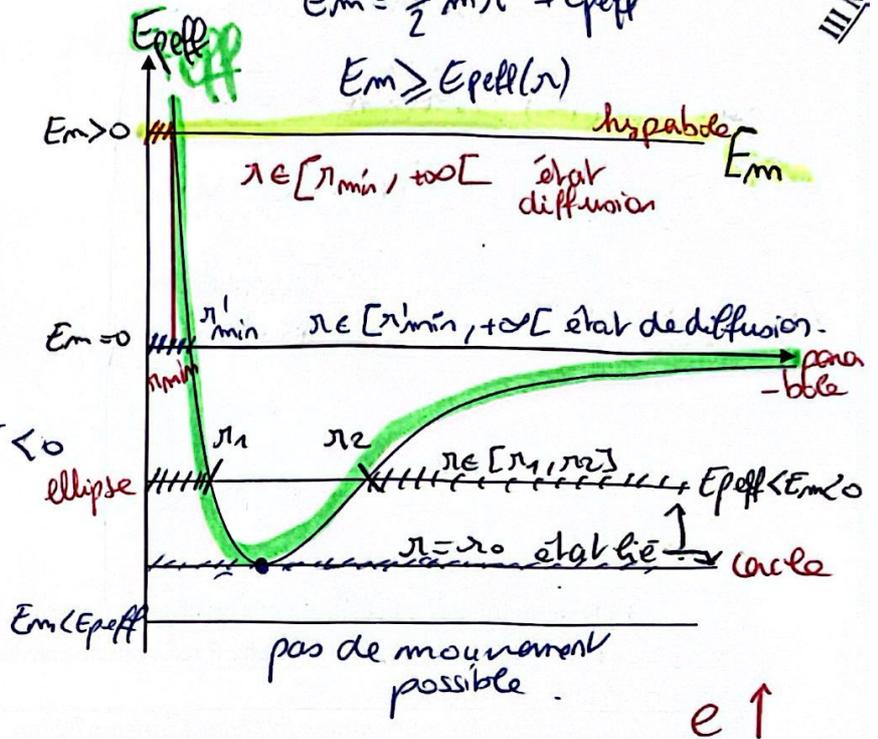
$E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_{\text{eff}}$

III/16

Premier cas : Interactions attractives :  $K > 0$

$r$	0	$r_0 = \frac{L_0^2}{mK}$	$+\infty$
$\frac{dE_{\text{eff}}}{dr}$	-	0	+
$E_{\text{eff}}$	$+\infty$		0

$E_{\text{eff}}(r_0) = -\frac{mK^2}{2L_0^2} < 0$   
 minimum



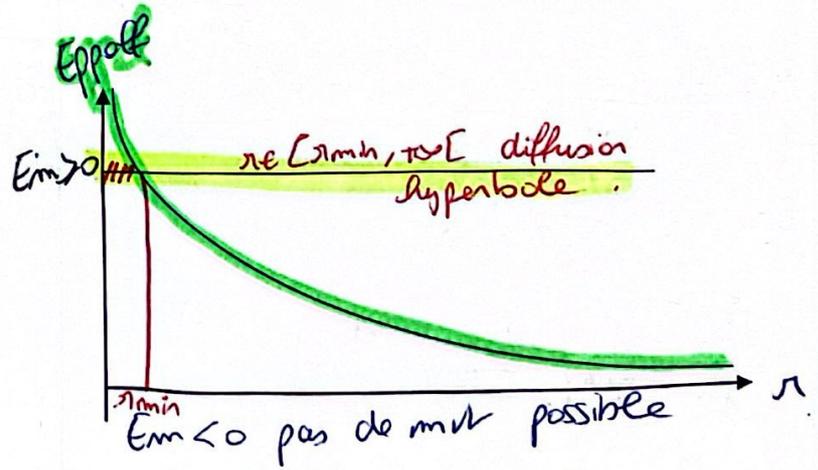
Remarque : En utilisant la LFD en coordonnées polaires, on peut montrer que les trajectoires sont des coniques :

$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$  où p et e sont deux constantes. p est le paramètre et e l'excentricité.

e = 0 cercle, 0 < e < 1 ellipse, e = 1 parabole, e > 1 hyperbole.

Deuxième cas : Interactions répulsives :  $K < 0$

$r$	0	$+\infty$
$\frac{dE_{\text{eff}}}{dr}$		-
$E_{\text{eff}}$	$+\infty$	0



III Mouvement dans un champ gravitationnel

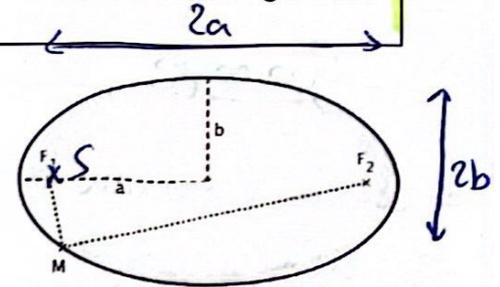
$$\vec{F} = -\frac{\gamma m_0 m}{r^2} \vec{e}_r \quad E_p = -\frac{\gamma m_0 m}{r} \quad K = \gamma m_0 m > 0$$

1.) Les trois lois de Kepler

Kepler énonça trois lois expérimentales sur le mouvement des planètes (autour de 1610)

- 1) Chaque planète décrit une trajectoire elliptique dont le soleil est un foyer.
- 2) L'aire balayée par le rayon soleil-planète est proportionnelle au temps mis pour la décrire (loi des aires).
- 3) Pour toutes les planètes gravitant autour du soleil,  $\frac{T^2}{a^3} = \text{Cste}$  où T est le temps de révolution et a le demi grand-axe de l'ellipse.

Généralisable aux satellites de la Terre (lune, satellites artificiel...) centre de la Terre étant 1 des foyers de l'ellipse.



2.) Vitesse de libération

Vitesse de libération  $v_l$ : Vitesse initiale minimale permettant à un satellite d'échapper à l'attraction de l'astre et de parvenir en un point infiniment éloigné ( $r \rightarrow +\infty$ ). (état de diffusion)

Elle est telle que  $E_m = 0$ , ce qui correspond à une trajectoire parabolique.  $v_l = \sqrt{\frac{2\gamma m_0}{r}}$  (à démontrer)

Système = {satellite M(m) évoluant dans le champ de gravitation de l'astre de centre O et de masse  $m_0$ }

Référentiel galiléen lié à O, les axes pointant vers trois étoiles fixes.

Hypothèses: O supposé fixe ( $m \ll m_0$ ). L'effet d'autres astres est négligé.

On peut assimiler le champ gravitationnel d'un astre à symétrie sphérique à celui d'une masse placée en son centre.

M(m) soumis uniquement  $\vec{F}_{m_0 \rightarrow m}$  qui est conservative  
Il y a conservation de  $E_m$   
 $E_m(t=0) = E_m(t)$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{\gamma m_0 m}{r_0} = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{\gamma m_0 m}{r}$$

$$r \rightarrow +\infty \quad \frac{\gamma m_0 m}{r} \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{\gamma m_0 m}{r_0} \geq 0$$

Remarque: Effet de fronde gravitationnelle pour que  $v$  existe  $\uparrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 \geq \frac{\gamma m_0 m}{r_0} \quad (\text{théorème de Gauss})$$

$$\Rightarrow v_0^2 \geq \frac{2\gamma m_0}{r_0}$$

$$\Rightarrow v_0 \geq \sqrt{\frac{2\gamma m_0}{r_0}}$$

$$\Rightarrow v_0 \geq v_l \quad \text{si } v_l = \sqrt{\frac{2\gamma m_0}{r_0}}$$

Si  $v_0 = v_l, E_m = 0 \rightarrow$  trajectoire parabolique

Cf site Univ Nantes Meca

$$E_m = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{\gamma m_0 m}{r} = \text{cste}$$

Quand on s'approche d'un astre

$$r \downarrow \quad \frac{\gamma m_0 m}{r} \uparrow \quad \left( -\frac{\gamma m_0 m}{r} \right) \downarrow$$

$$\text{Donc } E_c = \frac{1}{2} m v^2 \uparrow \text{ car } E_m \text{ cste}$$

$\Rightarrow$  Utilisé par des sondes qui vont sur Mars.

$\Rightarrow$  On choisit un chemin qui passe à proximité de la lune, pour être accéléré

3.) Etude d'un mouvement circulaire

Hypothèses : Satellite en mouvement circulaire autour de O ( $m_0$ ). On montre que :

*à démontrer*

Vitesse circulaire :  $v_c = \sqrt{\frac{Gm_0}{r}}$       Période  $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{Gm_0}$       Energie mécanique :  $E_m = -\frac{Gm_0m}{2r} = \frac{E_p}{2} = -E_c$

Pour une orbite elliptique, on admet la généralisation de T et  $E_m$  en remplaçant r par a.

Syst M(m) Ref centre sun O géocent

$\vec{F} = -\frac{Gm_0m}{r^2} \vec{e}_r$  *hyp mvmt circulaire autour de O*

⇒ coordonnées polaires

$\vec{OM} = r\vec{e}_r$

$\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$  ( $r = \text{cte}$ )

$\vec{a} = r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\vec{e}_r$

$\vec{a} = -\frac{dv}{dt}\vec{e}_\theta - \frac{v^2}{r}\vec{e}_r$   $\ddot{\theta} = v = r\dot{\theta}$

LFD  $m\vec{a} = \vec{F}$

$1\vec{e}_r - \frac{v^2}{r} = -\frac{Gm_0m}{r^2}$  ①

$1\vec{e}_\theta \quad m\frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v = \text{cte}$  ②

① ⇒  $v^2 = \frac{Gm_0}{r}$

$v_c = \sqrt{\frac{Gm_0}{r}}$  *vitesse orbite circulaire*

Période

$T = \frac{2\pi r}{v}$  ( $T = \frac{2\pi}{\omega}$   $\omega = \dot{\theta} = \frac{v}{r}$ )

$= 2\pi r \sqrt{\frac{r}{Gm_0}}$

$T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{Gm_0} \Rightarrow \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{Gm_0}$

*3<sup>e</sup> loi de Kepler*

Energie Cinétique  $E_c = \frac{1}{2}mv^2$

$E_c = \frac{1}{2}m \times \frac{Gm_0}{r}$   $E_c = \frac{Gm_0m}{2r}$

$E_p = -\frac{Gm_0m}{r}$

$E_m = E_c + E_p = \frac{Gm_0m}{2r} - \frac{Gm_0m}{r} = -\frac{Gm_0m}{2r}$

⇒  $E_m = -\frac{Gm_0m}{2r}$

$E_m = -E_c = \frac{E_p}{2}$  *trajet orbite circulaire*

$E_m < 0$  *état lié*

Pour orbite elliptique  $r \rightarrow a$

$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{Gm_0}$        $E_m = -\frac{Gm_0m}{2a}$

*généralisation admise*

la : Dans le cas de frottements, lors de la rentrée dans l'atmosphère pour 1 satellite

th de  $E_m$   $\Delta E_m = W_{fnc} < 0$

⇒  $E_m \searrow \Rightarrow E_m = \frac{E_p}{2} = -E_c$

⇒  $E_c \nearrow \quad v \nearrow$   
 $E_p \searrow \quad r \searrow$  *trajet orbite spirale jusqu'à écrasement sur la terre*

4.) Satellites terrestres

a) Généralités

Système = {satellite M(m) évoluant dans le champ de gravitation de la terre de centre O et de masse  $M_T$ }.  
 Référentiel géocentrique supposé galiléen, lié au centre de la terre O, les axes pointant vers trois étoiles fixes.

$\vec{g}$  est le champ de pesanteur.

$g_0 = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$  est l'accélération de la pesanteur au voisinage du sol, à une latitude  $\lambda = 45^\circ$ .

L'accélération de la pesanteur au niveau du sol est donnée par  $g_0 = \frac{GM_T}{R_T^2}$  Le rayon de la terre vaut  $R_T = 6380 \text{ km}$ .

Première vitesse cosmique :  $v_{c1} = \sqrt{g_0 R_T}$  pour un satellite en orbite circulaire rasante.

$v_{c1} \approx 8 \text{ km.s}^{-1}$

Deuxième vitesse cosmique :  $v_{c2} = \sqrt{2g_0 R_T}$  pour un satellite lancé du sol.

$v_{c2} \approx 11 \text{ km.s}^{-1}$

M(m) soumis à  $\vec{F}_{MT \rightarrow m} = -\frac{GM_T m}{r^2} \vec{e}_r$

On identifie  $\vec{F}_{MT \rightarrow m}$  avec le poids  $\vec{P} = m\vec{g}$

$\vec{F}_{MT \rightarrow m} = m \left( -\frac{GM_T}{r^2} \vec{e}_r \right) = m\vec{g}$

$\Rightarrow \vec{g} = -\frac{GM_T}{r^2} \vec{e}_r$  \*

On identifie le champ de pesanteur avec le champ de gravitation.

Rq: Pour cela on néglige les forces d'inertie liées à la rotation de la Terre sur elle même.

Au niveau du sol  $r = R_T$

$\vec{g} = -\frac{GM_T}{R_T^2}$

$\|\vec{g}\| = \frac{GM_T}{R_T^2} \Rightarrow GM_T = g_0 R_T^2$

Vitesse circulaire pour 1 satellite de la Terre

(cf)  $v_c = \sqrt{\frac{GM_T}{r}} = \sqrt{\frac{g_0 R_T^2}{r}}$

Pour 1 satellite en orbite rasante.

$r = R_T \quad v_c = \sqrt{\frac{g_0 R_T^2}{R_T}}$

$v_{c1} = \sqrt{g_0 R_T}$

AN  $v_{c1} = 7,9 \times 10^3 \text{ m/s}$

1<sup>o</sup> vitesse cosmique.

$v_{c1} = 8 \text{ km/s}$

vitesse max d'un satellite en orbite circulaire autour de la Terre ( $r \rightarrow v_c \rightarrow$ )

Vitesse de libération pour 1 satellite de la Terre.

$v_l = \sqrt{\frac{2GM_T}{r}} = \sqrt{\frac{2g_0 R_T^2}{r}}$

Pour 1 satellite lancé du sol  $r = R_T$

$v_l = \sqrt{\frac{2g_0 R_T^2}{R_T}} = \sqrt{2g_0 R_T}$

$v_{c2} = \sqrt{2g_0 R_T}$  2<sup>o</sup> vitesse cosmique.

vitesse initiale minimale à fournir au satellite pour qu'il décolle et s'affranchisse de l'attraction terrestre AN  $v_{c2} = 11 \text{ km/s} \quad v_{c2} = 40 \times 10^3 \text{ km/h}$

Rq: Avion de chasse  $v = 0,8 \text{ km/s}$ .

On lance les fusées vers l'Est pour utiliser la rotation de la Terre

Kourou  $v = 500 \text{ m/s}$

Aviane 5 2min après décollage  $v = 2,2 \text{ km}$

10min  $v = 8 \text{ km/s}$

b) Satellites géostationnaires : Satellites de télécommunication ou de télédiffusion, météorologique ou d'alerte.

Un satellite géostationnaire paraît fixe pour un observateur lié à la terre. Il est situé dans le plan de l'équateur, à une altitude  $z \approx 36\,000\text{ km}$  et décrit une trajectoire circulaire de période  $T \approx 24\text{ h}$ .  
Période sidérale  $T_{sid} = 86\,164\text{ s}$ . = temps pour faire un tour sur elle

Rq satellite d'alerte conçu pour détecter un tir de missile avec détecteur I.R.

Satellite Géostationnaire en M, fixe/Mo  
 $\Rightarrow$  M décrit une orbite circulaire de centre K, projection de M sur l'axe de rotation de la Terre (Oz)

• TMC appliqué à M en O fixe dans  $\mathcal{R}$  galiléen

$$\frac{dL_0(M/R)}{dt} = \vec{O}_0(\vec{F})$$

$$\vec{O}_0(\vec{F}) = \vec{O}_M \wedge \vec{F} = \vec{O}_M \wedge -\frac{Gm_T m}{r^2} \vec{e}_r$$

$$\vec{O}_0(\vec{F}) = \vec{0}$$

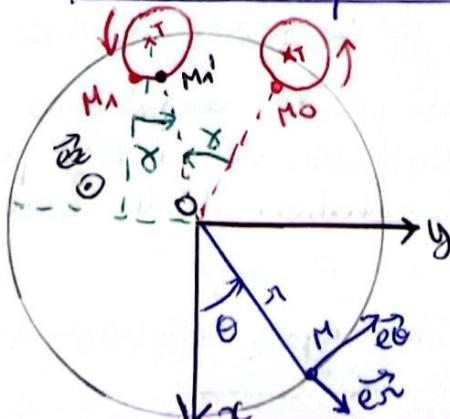
$$\Rightarrow L_0(M/R) = \vec{O}_M \wedge m\vec{v} = cste$$

$\Rightarrow$  le mouvement de M est dans un plan qui contient O

Or M décrit un cercle centré sur l'axe (Oz)

$\Rightarrow$  Le satellite géostationnaire

est dans le plan équatorial



LFD appliquée à M qui décrit  $\Gamma$  cercle

$$m\vec{a} = \vec{F}_{MT} = m$$

$$\vec{O}\vec{M} = r\vec{e}_r$$

$$\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$$\vec{a} = r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\vec{e}_r$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{e}_\theta - \frac{v^2}{r}\vec{e}_r$$

$$\vec{e}_\theta \quad m\frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v = cste$$

$$\vec{e}_r \quad -\frac{mv^2}{r} = -\frac{Gm_T m}{r^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{Gm_T}{r}}$$

Satellite géostationnaire.

$$T = \frac{2\pi r}{v} \Rightarrow v = \frac{2\pi r}{T_{sid}} = \sqrt{\frac{Gm_T}{r}}$$

$$\Rightarrow \frac{4\pi^2 r^2}{T_{sid}^2} = \frac{Gm_T}{r} \Rightarrow r^3 = \frac{Gm_T T_{sid}^2}{4\pi^2}$$

$$r = \left( \frac{Gm_T T_{sid}^2}{4\pi^2} \right)^{1/3}$$

$$\text{Or } r = R_T + z$$

$$Gm_T = g_0 R_T^2$$

$$\Rightarrow z = \left( \frac{g_0 R_T^2 T_{sid}^2}{4\pi^2} \right)^{1/3} - R_T$$

AN  $z = 35\,840 \times 10^3\text{ m}$   
 $z = 36\,000\text{ km}$

Rq Jour sidéral / Jour solaire

• Mo  $\rightarrow$  M1 : La terre fait exactement 1 tour sur elle même  $\rightarrow$  1 jour sidéral  $T_{sid}$

• Mo  $\rightarrow$  M1' : Le point de la Terre se retrouve face au soleil  $\rightarrow$  1 jour solaire

Au bout d'1 an la Terre doit se retrouver à la même position

$$365,25 \times \alpha = 2\pi \frac{T_{sol}}{2\pi + \alpha} \frac{T_{sid}}{2\pi}$$

$$T_{sid}(2\pi + \alpha) = T_{sol} \times 2\pi$$

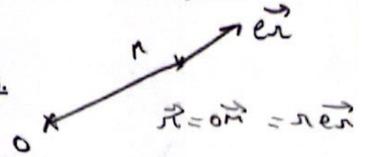
$$\text{ou } \alpha = \frac{2\pi}{365,25}$$

Remarques : Autres satellites terrestres

$$\Rightarrow T_{sid} = T_{sol} \times \frac{2\pi}{2\pi + \alpha}$$

$$\Rightarrow T_{sid} = 86164 \text{ s}$$

- Satellites en orbite basse, de forte inclinaison (survolant quasiment les pôles) : 300km < z < 2000km T= 1 à 2h. Station spatiale internationale, satellites de communication, observation terrestre.
- Satellites en orbite moyenne, d'orbites inclinées d'environ 50° : z ≈ 20 000 km T= 12h. Satellites de navigation (GPS)



IV Script python : Satellite soumis à la force d'interaction gravitationnelle, tracé des trajectoires.

1.) Principe

On écrit la loi fondamentale de la dynamique appliquée au satellite dans le référentiel géocentrique galiléen

(FD)  $m\vec{a} = -\frac{Gm_0m}{r^2} \vec{e}_r$

$\Rightarrow \vec{a} = -\frac{Gm_0}{r^2} \vec{e}_r \left( \vec{e}_r = \frac{\vec{or}}{\|\vec{or}\|} = \frac{\vec{r}}{r} \right)$

$\Rightarrow \vec{a} = -\frac{Gm_0}{r^3} \vec{r}$  mouvement plan

$a_x = -\frac{Gm_0}{r^3} x \quad / (Ox)$

$a_y = -\frac{Gm_0}{r^3} y \quad / (Oy)$

avec  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

Méthode Euler :  $h = t_{k+1} - t_k$

$\ddot{x}_k = \frac{\dot{x}_{k+1} - \dot{x}_k}{h} \Rightarrow \dot{x}_{k+1} = \dot{x}_k + h \ddot{x}_k$

ou  $\ddot{x}_k = a_{k,x} = -\frac{Gm_0}{r^3} x_k$

$\Rightarrow \dot{x}_{k+1} = \dot{x}_k + h \left( -\frac{Gm_0}{r^3} x_k \right)$

$\dot{x}_k = \frac{x_{k+1} - x_k}{h} \Rightarrow x_{k+1} = x_k + h \dot{x}_k$

de même pour  $y_{k+1}$  et  $\dot{y}_{k+1}$

$\Rightarrow$  script "MC6 Euler"

2.) Mise en oeuvre

- ##Résolution d'une équation différentielle avec odeint
- #on prendra G.M=1 et ro=1 soit xo=1 et yo=0, vox=0 et voy=vo valeurs initiales.
- #voc=1 pour la trajectoire circulaire
- #vop=1,414 pour la trajectoire parabolique

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
```

#définition de la liste des temps : on prendra 10 000 points entre 0 et 15s

$t_s = \text{np.linspace}(0, 15, 10000)$

##on définit une fonction eq\_mouvement d'arguments z et les\_t, qui renvoie vx, vy, ax, ay où ax et ay sont données par les équations différentielles du mouvement, avec x,y,vx,vy=z # CI

```
def eq_mouvement(z, les_t):
    x,y,vx,vy = z # affectation CI
    r = (x**2 + y**2)**0.5 # r = sqrt(x^2 + y^2)
    ax = -x/r**3
    ay = -y/r**3
    return (vx, vy, ax, ay)
```

#on crée une liste de n=8 valeurs pour vo, entre 0.2 à 1.6, 0 posant pb.

$v_0 = \text{np.linspace}(0.2, 1.6, 8)$

#sol=odeint(eq\_mouvement, (x0,y0,vx0,vy0), les\_t) donne un tableau numpy.  
 #un élément du tableau est formée d'une liste comprenant les positions et les vitesses  
 #on récupère les deux premières colonnes (via la commande sol[:, 0] pour la colonne 1)  
 #on trace les trajectoires correspondant aux différentes valeurs de v0.

for k in range(n):

sol = odeint (eq\_mouvement, (x0,y0, vx0,vy0), les\_t)

X = sol[:, 0]

Y = sol[:, 1]

plt.plot (X, Y, label = str(round (les\_vo[k], 2)))

chaîne caractères  
arrondi

plt.legend()

plt.grid()

plt.axis("equal")

plt.title("trajectoire du mouvement d'un satellite en fonction de la vitesse initiale")

plt.show()

trajectoire du mouvement d'un satellite en fonction de la vitesse initiale

