PROGRAMMES 21 et 22.

PROGRAMME 21 : du 25/03 au 29/03

Reprise des espaces vectoriels

Polynômes

Dans tout le chapitre, K est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- ★ L'ensemble $K[X]$: définition (un polynôme est une suite de coefficients). Notation $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, X est la suite $(0, 1, \dots, 0, \dots)$. Opérations : somme, produit, composée. Structure de K-ev. Degré d'un élément de $K[X]$; coefficient dominant, polynôme unitaire. On convient que le degré de 0 est $-\infty$. Sous-espace vectoriel $K_n[X]$ des polynômes de degré au plus n. Degré d'une somme, d'un produit.
- ★ Divisibilité dans $K[X]$; diviseurs et multiples. Division euclidienne d'un élément A de $K[X]$ par un élément B de $K[X] \setminus \{0\}$.
- ★ Fonction polynomiale associée à un polynôme. Racines (ou zéros) d'un polynôme. Caractérisation par la divisibilité. Méthode de Horner pour l'évaluation d'une fonction polynomiale en α. Le nombre de racines d'un polynôme P non nul est majoré par le degré de P. Définition de la multiplicité d'une racine.
- ★ Dérivation dans $K[X]$: Dérivée formelle d'un élément de $K[X]$. Pour $K = \mathbb{R}$, lien avec la dérivée de la fonction polynomiale. Linéarité de la dérivation, dérivée d'un produit. Dérivée k-ième d'un monôme. Formule de Taylor. Caractérisation de la multiplicité par les dérivées successives.
- ★ Polynôme scindé sur K. Somme et produit des racines d'un polynôme scindé en fonction de ses coefficients. Les autres fonctions symétriques élémentaires sont hors programme. Cas des polynômes du second degré. Calcul de deux nombres connaissant leur somme et leur produit.
- ★ Définition de polynômes irréductibles dans $K[X]$. Théorème de d'Alembert-Gauss. Irréductibles de $\mathbb{C}[X]$. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$. Description des irréductibles de $\mathbb{R}[X]$. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$. Deux racines complexes conjuguées d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ ont même multiplicité. Factorisation de $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.
- ★ Fonctions rationnelles : Définition, forme irréductible, degré d'une fonction rationnelle. Méthode pour se ramener à une fonction rationnelle de degré < 0. Expression de la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$ des fonctions rationnelles à pôles simples de degré < 0. Dans le cas où le dénominateur possède une racine multiple ou un facteur irréductible de degré 2, la forme cherchée doit être fournie.

Un énoncé au choix à demander

- ❒ Caractérisations des sev supplémentaires (1 : $E = F \oplus G$ et $F \cap G = \{0_E\}$, 2 : $\forall u \in E, \exists!(v,w) \in F \times G, u = v + w$).
- ❒ Formule du binôme dans $\mathcal{L}(E)$.
- ❒ Définition du noyau, d'une image.
- ❒ Signification de $f \circ g = 0$ si f et g endomorphismes d'un ev.
  Cas particulier : $f \circ f = 0$.
- ❒ Définition d'une projection, d'une symétrie.
- ❒ Caractérisations d'une projection, d'une symétrie.
- ❒ Résultats sur le degré (degré d'une somme, d'un produit).
- ❒ Théorème de la division euclidienne dans $K[X]$.
- ❒ Définition d'une racine d'un polynôme.
- ❒ Définition d'une racine d'ordre au moins r, d'ordre r d'un polynôme non nul.
- ❒ Majoration du nombre de racines d'un polynôme non nul (2 versions : avec et sans multiplicité).
- ❒ Formule de Taylor.
- ❒ Caractérisation de la multiplicité à l'aide des polynômes dérivés.
- ❒ Somme et produit des racines d'un polynôme scindé.
- ❒ Théorème de d'Alembert-Gauss.
- ❒ Définition d'un polynôme irréductible. Cas de $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.
- ❒ Factorisation de $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.
- ❒ Théorème de décomposition en éléments simples sur K des fonctions rationnelles à pôles simples de degré < 0.

Une question de savoir-faire

Une petite décomposition en éléments simples d'une fonction rationnelle à <u>pôles simples</u> sera demandée.

Remarque aux colleurs : Ne pas donner d'exercice trop calculatoire.

Démonstrations

- ❒ **Exercice fait en cours** : Montrer qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}, P(n) = \sqrt[3]{n^2+1}$.
- ❒ Soit $P \in K[X]$, non nul, $\alpha \in K$. Soit $r \in \mathbb{N}^*$.
  α racine d'ordre r de P ssi $P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(r-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(r)}(\alpha) \neq 0$.
- ❒ Formules donnant la somme et le produit des racines pour un polynôme scindé de degré n.

PROGRAMME 22 : du 01/04 au 05/04

Reprise des polynômes

Espaces vectoriels de dimension finie : le début

K est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

★ Familles remarquables finies de vecteurs : famille génératrice, famille libre, famille liée. Toute famille finie de polynômes non nuls à coefficients dans $\mathbb{K}$ et de degrés échelonnés est libre (la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est dite de degrés échelonnés si $\deg(P_0) < \dots < \deg(P_n)$).
Corollaire : Toute famille de polynômes non nuls, à degrés distincts 2 à 2, est libre.

Si $(u_1, \dots, u_n)$ est une famille libre d'un K-ev E et $v \notin \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ alors $(u_1, \dots, u_n, v)$ est libre.

★ Base d'un ev. Une famille est une base d'un ev ssi tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de la base. Coordonnées d'un vecteur dans une base. Bases canoniques des espaces K^n, $K_n[X]$ et $\mathcal{M}_{n,p}(K)$.

Si $(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$ est une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E alors $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ et $\text{Vect}(e_{k+1}, \dots, e_n)$ sont supplémentaires dans E.

★ Applications linéaires et bases (dans le cas où l'espace de départ admet une base finie) : caractérisation de $\text{Im}\, f$ (engendré par l'image d'une base), de l'injectivité, de la surjectivité, de la bijectivité pour une application linéaire. Une application linéaire est entièrement caractérisée par la connaissance de l'image d'une base.

Un énoncé au choix à demander

- ❒ Résultats sur le degré (degré d'une somme, d'un produit).
- ❒ Théorème de la division euclidienne dans $K[X]$.
- ❒ Définition d'une racine d'un polynôme.
- ❒ Définition d'une racine d'ordre au moins r, d'ordre r d'un polynôme non nul.
- ❒ Majoration du nombre de racines d'un polynôme non nul (2 versions : avec et sans multiplicité).
- ❒ Formule de Taylor.
- ❒ Caractérisation de la multiplicité à l'aide des polynômes dérivés.
- ❒ Définition d'un polynôme scindé.
- ❒ Somme et produit des racines d'un polynôme scindé.
- ❒ Théorème de d'Alembert-Gauss.
- ❒ Définition d'un polynôme irréductible. Cas de $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.
- ❒ Factorisation de $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.
- ❒ Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$ des fonctions rationnelles à pôles simples.
- ❒ Définition d'une famille génératrice, d'une famille libre dans un ev E.
- ❒ Définition d'une base, coordonnées.
- ❒ Image d'une base par une application linéaire : résultats d'injectivité, surjectivité, bijectivité.

Une question de savoir-faire

Une petite décomposition en éléments simples d'une fonction rationnelle à pôles simples sera demandée.

Remarque aux colleurs : Ne pas donner d'exercice trop calculatoire.

Démonstrations

- **Exercice fait en cours** : Montrer qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}, P(n) = \sqrt[3]{n^2+1}$.
- Si $(u_1, \ldots, u_n)$ est une famille libre d'un K-ev E et $v \notin \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$ alors $(u_1, \ldots, u_n, v)$ est libre.
- Soit E et F des K-ev, $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose E muni d'une base $(e_1, \ldots, e_n)$.
  f est injective si et seulement si la famille $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est libre dans F.