Vacances Printemps : corrigé maths.

Calculs / exercices en autonomie

Trigonométrie

1°) Méthode 1 :

$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$

Avec $x = \dfrac{\pi}{8}$. $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 2\cos^2 x - 1$ donc $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$.

$\dfrac{\pi}{8} \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ donc $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right) \geq 0$. Ainsi, $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

Méthode 2 :

Les racines carrées de $e^{i\frac{\pi}{4}}$ sont $\pm e^{i\frac{\pi}{8}}$. Trouvons les de manière algébrique.

$e^{i\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Soit $z = x + iy$ où x et y sont réels.

$$
\begin{aligned}
z^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} &\iff \begin{cases} (x+iy)^2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ |x+iy|^2 = 1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x^2 - y^2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ 2xy = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x^2 = \dfrac{\sqrt{2}+2}{4} \\ y^2 = \dfrac{2-\sqrt{2}}{4} \\ xy > 0 \end{cases} \\
&\iff z = \underbrace{\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}_{z_0} \text{ ou } z = -z_0
\end{aligned}
$$

Ainsi, $\left\{-e^{i\frac{\pi}{8}}, e^{i\frac{\pi}{8}}\right\} = \{z_0, -z_0\}$.

Comme $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right) \geq 0$, on a : $e^{i\frac{\pi}{8}} = z_0$.

Ainsi, $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

On peut appliquer la même méthode pour connaître $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ à partir de $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$.

2°) Soit $x \in \mathbb{R}$.

★ *Méthode 1* : Avec le formulaire trigo

On écrit deux formules d'addition en sin :

$$\sin(3x+x) = \sin(3x)\cos(x) + \sin(x)\cos(3x)$$
$$\sin(3x-x) = \sin(3x)\cos(x) - \sin(x)\cos(3x)$$

On effectue $\dfrac{L_1 - L_2}{2}$: $\sin(x)\cos(3x) = \dfrac{1}{2}(\sin(4x) - \sin(2x))$.

★ *Méthode 2* : Par les complexes

$$\begin{aligned}\sin(x)\cos(3x) &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\frac{e^{i3x} + e^{-i3x}}{2} \\ &= \frac{1}{4i}\left(e^{i4x} + e^{-i2x} - e^{i2x} - e^{-i4x}\right) \\ &= \frac{1}{4i}\left(2i\sin(4x) - 2i\sin(2x)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sin(4x) - \sin(2x)\right)\end{aligned}$$

3°) On passe par le « milieu » de x et $12x$: $\dfrac{x+12x}{2} = \dfrac{13x}{2}$.

$$\begin{aligned}\cos(12x) - \cos(x) &= \cos\left(\frac{13x}{2} + \frac{11x}{2}\right) - \cos\left(\frac{13x}{2} - \frac{11x}{2}\right) \\ &= -2\sin\left(\frac{13x}{2}\right)\sin\left(\frac{11x}{2}\right)\end{aligned}$$

Une équation différentielle

Soit $y : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable. Alors $z : x \mapsto x^2 y(x)$ est aussi deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned}z(x) &= x^2 y(x) && \times(-1) \\ z'(x) &= 2xy(x) + x^2 y'(x) && \times 0 \\ z''(x) &= 2y(x) + 2xy'(x) + 2xy'(x) + x^2 y''(x) \\ &= 2y(x) + 4xy'(x) + x^2 y''(x) && \times 1\end{aligned}$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, x^2 y''(x) + 4xy'(x) + (2 - x^2)y(x) = 1 \iff \underbrace{\forall x \in \mathbb{R}, z''(x) - z(x) = 1}_{\text{notée } (F)}$.

(F) est une EDL_2 avec second membre à coefficients constants.
$x \mapsto 1$ est une solution évidente. De plus, on trouve facilement que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{-x}$ où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
Ainsi, les solutions de (F) sont les fonctions $x \mapsto 1 + \lambda e^x + \mu e^{-x}$ où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}y \text{ est solution de } (E) &\iff \exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, z(x) = 1 + \lambda e^x + \mu e^{-x} \\ &\iff \exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, y(x) = \frac{1 + \lambda e^x + \mu e^{-x}}{x^2} \qquad \text{car } y(x) = \frac{z(x)}{x^2}\end{aligned}$$

Ainsi, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions :

$$\boxed{x \mapsto \frac{1 + \lambda e^x + \mu e^{-x}}{x^2}}$$

où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Limites et DL

1°) Au voisinage de 0, $f(x) = \dfrac{1}{\tan x} - \dfrac{1}{\ln(1+x)} = \dfrac{\ln(1+x) - \tan(x)}{\tan x . \ln(1+x)}$.

$\ln(1+x)\tan(x) \underset{x\to 0}{=} (x+o(x))(x+o(x)) \underset{x\to 0}{=} x^2 + o(x^2)$.

D'autre part,

$\ln(1+x) - \tan x \underset{x\to 0}{=} \left(x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - (x + o(x^2)) \underset{x\to 0}{=} -\dfrac{x^2}{2} + o(x^2) \underset{x\to 0}{=} -\dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$.

Donc $f(x) \underset{x\to 0}{=} \dfrac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} \underset{x\to 0}{=} \dfrac{-\frac{1}{2} + o(1)}{1 + o(1)}$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\dfrac{1}{2}}$.

2°) Au voisinage de 0, $f(x) = (\cos x)^{\frac{\sin x}{x^3}} = \exp\left(\underbrace{\dfrac{\sin x}{x^3}\ln(\cos x)}_{g(x)}\right)$.

$\ln(\cos x) \underset{x\to 0}{=} \ln\left(1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \underset{x\to 0}{=} -\dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ car $-\dfrac{x^2}{2} + o(x^2) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} g(x) &\underset{x\to 0}{=} \frac{(x+o(x))\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}{x^3} \\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{-\frac{x^3}{2} + o(x^3)}{x^3} \\ &\underset{x\to 0}{=} -\frac{1}{2} + o(1) \end{aligned}$$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\dfrac{1}{2}$. Par continuité de exp en $-\dfrac{1}{2}$, il vient : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = e^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}}$.

3°) Au voisinage de 0, $f(x) = \left(2\sqrt{1+\dfrac{1}{x}} - \sqrt{1+\dfrac{2}{x}}\right)^{x^2} = \exp\left(\underbrace{x^2 \ln\left(2\sqrt{1+\dfrac{1}{x}} - \sqrt{1+\dfrac{2}{x}}\right)}_{g(x)}\right)$.

$$2\sqrt{1+\frac{1}{x}} - \sqrt{1+\frac{2}{x}} \underset{x\to+\infty}{=} 2\left(1 + \frac{1}{2}.\frac{1}{x} - \frac{1}{8}.\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) - \left(1 + \frac{1}{2}.\frac{2}{x} - \frac{1}{8}.\left(\frac{2}{x}\right)^2 + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

car $\dfrac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

$$\underset{x\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{x^2}\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\underset{x\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{4x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Donc $\ln\left(2\sqrt{1+\dfrac{1}{x}} - \sqrt{1+\dfrac{2}{x}}\right) \underset{x\to+\infty}{=} \ln\left(1 + \dfrac{1}{4x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\right) \underset{x\to+\infty}{=} \dfrac{1}{4x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

car $\dfrac{1}{4x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Donc $g(x) \underset{x\to+\infty}{=} \dfrac{1}{4} + o(1)$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \dfrac{1}{4}$.

Par continuité de exp en $\dfrac{1}{4}$, il vient : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = e^{\frac{1}{4}}}$.

Primitives

Soit a, b réels et $n \in \mathbb{N}^*$.

Par une intégration par parties,

$$\begin{aligned}\int_0^\pi (at+bt^2)\cos(nt)\,\mathrm{d}t &= \left[(at+bt^2)\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^\pi - \int_0^\pi (a+2bt)\frac{\sin(nt)}{n}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{n}\int_0^\pi (a+2bt)\sin(nt)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

On recommence une intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^\pi (a+2bt)\sin(nt)\,\mathrm{d}t &= \left[-(a+2bt)\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^\pi + \int_0^\pi 2b\frac{\cos(nt)}{n}\,\mathrm{d}t \\ &= -(a+2b\pi)\frac{\cos(n\pi)}{n} + \frac{a}{n} + 2b\left[\frac{\sin(nt)}{n^2}\right]_0^\pi \\ &= (-1)^{n+1}\frac{a+2b\pi}{n} + \frac{a}{n}\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\int_0^\pi (at+bt^2)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{(-1)^n(a+2b\pi)-a}{n^2}$$

Pour que $\displaystyle\int_0^\pi (at+bt^2)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}$, il suffit de poser $a=-1$ et $b=\dfrac{1}{2\pi}$.

Polynômes

Soit P un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall k \in \{1,\dots,n+1\}, P(k) = \dfrac{1}{k}$.

On note Q le polynôme $Q(X) = XP(X) - 1$.

Alors, pour tout $k \in \{1,\dots,n+1\}, Q(k) = 0$.

Ainsi, les entiers de 1 à $n+1$ sont racines de Q. Donc $\underbrace{(X-1)(X-2)\dots(X-(n+1))}_{\text{de degré } n+1}$ divise Q.

De plus, 1 est constant et $XP(X)$ a pour degré $n+1$ donc Q est aussi de degré $n+1$.

Ainsi, $\exists \lambda \in \mathbb{R}^*, Q = \lambda \displaystyle\prod_{k=1}^{n+1}(X-k)$.

Donc $(*)$: $\qquad XP(X) = 1 + \lambda \displaystyle\prod_{k=1}^{n+1}(X-k)$.

On remplace X par -1 : $-P(-1) = 1 + \lambda \displaystyle\prod_{k=1}^{n+1}(-k-1)$.

Donc $-P(-1) = 1 + \lambda(-1)^{n+1}\displaystyle\prod_{k=1}^{n+1}(k+1)$.

Donc, $-P(-1) = 1 + \lambda(-1)^{n+1}(n+2)!$ ie $P(-1) = -1 + \lambda(-1)^n(n+2)!$.

On remplace X par 0 $(*)$: $0 = 1 + \lambda \displaystyle\prod_{k=1}^{n+1}(-k)$. Donc $0 = 1 + \lambda(-1)^{n+1}(n+1)!$.

Ainsi, $\lambda = \dfrac{(-1)^n}{(n+1)!}$.

Finalement, $P(-1) = -1 + \dfrac{(-1)^n(-1)^n(n+2)!}{(n+1)!} = -1 + (-1)^{2n}(n+2) = -1 + (n+2)$.

Donc $P(-1) = n+1$.

Applications linéaires

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n : f \circ g^n - g^n \circ f = ng^{n-1}$.

★ H_1 est vraie par hypothèse.

★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que H_n est vraie.

On a alors : $f \circ g^n - g^n \circ f = ng^{n-1}$.

On compose à droite par g : $(f \circ g^n - g^n \circ f) \circ g = ng^n$.

Donc, $f \circ g^{n+1} - g^n \circ f \circ g = ng^n$.

On sait $f \circ g - g \circ f = \mathrm{id}_E$. On compose par g^n à gauche.

Alors, $g^n \circ (f \circ g - g \circ f) = g^n$ donc $g^n \circ f \circ g - g^{n+1} \circ f = g^n$.

On a : $\begin{cases} f \circ g^{n+1} - g^n \circ f \circ g = ng^n \\ g^n \circ f \circ g - g^{n+1} \circ f = g^n \end{cases}$.

On ajoute membre à membre : $f \circ g^{n+1} - g^{n+1} \circ f = (n+1)g^n$.

Ainsi, H_{n+1} est vraie.

★ On a montré par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f \circ g^n - g^n \circ f = ng^{n-1}$.

Un deuxième exercice d'algèbre linéaire : exo 12 du TD16

On note $E = \mathbb{R}_n[X]$.

Indice : $\forall \ldots \exists! \ldots$

On reconnaît l'écriture d'une bijectivité.

D'où l'idée de poser : $\forall P \in E, \varphi(P) = XP' + P$.

On va montrer que φ est bijective. Ce qui va nous aider à faire la moitié des choses : la dimension.

★ Montrons que φ est linéaire.

Soit $(P_1, P_2) \in E^2, \lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda P_1 + P_2) &= X(\lambda P_1 + P_2)' + \lambda P_1 + P_2 \\ &= X(\lambda P_1' + P_2') + \lambda P_1 + P_2 \\ &= \lambda(XP_1' + P_1) + XP_2' + P_2 \\ &= \lambda\varphi(P_1) + \varphi(P_2) \end{aligned}$$

Ainsi, φ est linéaire.

★ Montrons que : $\forall P \in E, \varphi(P) \in E$.

Soit $P \in E$. $\deg(\varphi(P)) \leq \max(\deg(XP'), \deg(P))$.

Or $\deg(P) \leq n$ donc $\deg(P') \leq n - 1$.

$\deg(XP') = 1 + \deg(P') \leq n$.

Finalement, $\deg(\varphi(P)) \leq n$ donc $\varphi(P) \in E$.

On a montré que $\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } E}$.

★ *Au lieu de travailler sur le noyau (pas si simple de résoudre $XP' + P = 0$), on va travailler sur l'image d'une base.*

$(1, X, \ldots, X^n)$ est une base de E.

Pour montrer que φ est bijective, il suffit de montrer que $(\varphi(1), \varphi(X), \ldots, \varphi(X^n))$ est un base de E.

Calculons $\deg(\varphi(X^k))$ où $k \in \{0, \ldots, n\}$.

$\varphi(1) = 1$

Soit $k \in \{1, \ldots, n\}, \varphi(X^k) = X(kX^{k-1}) + X^k = (k+1)X^k$.

$k + 1 \neq 0$ donc $\deg(\varphi(X^k)) = k$.

La famille $(\varphi(1), \varphi(X), \ldots, \varphi(X^n))$ est une famille de polynômes non nuls, échelonnée en degrés donc est libre dans E. De plus, elle a $n + 1$ éléments et $n + 1 = \dim(E)$ donc c'est une base de E.

Ainsi φ est bijective. D'où le résultat.

Calcul Mental

1°) Soit x un nombre à 2 chiffres : a le chiffre des dizaines et b celui des unités.

$x = 10a + b$ donc $x^2 = 100a^2 + 20ab + b^2$ soit encore $x^2 = 100 \times a^2 + 10 \times 2ab + b^2$.

- Le chiffre des unités de x^2 est donné par b^2 (précisément le chiffre des unités de b^2)
- Le chiffre des dizaines est donné par $2ab$ avec éventuellement une retenue venant de b^2
- Le chiffre des centaines est donné par a^2 avec éventuellement une retenue venant de $2ab$.

x	a^2	$2ab$	b^2	x^2
13	1	6	9	169
16	1	12	36	256
19	1	18	81	361

2°) Soit x de chiffre des dizaines a et de chiffre des unités 5.

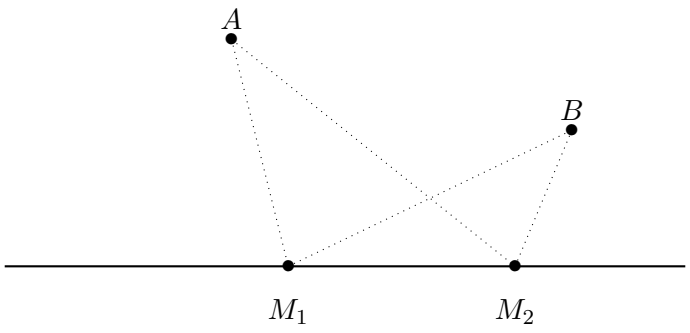
Alors $x = 10a + 5$. Donc $x^2 = 100a^2 + 100a + 25 = 100 \times a(a+1) + 25$.

x^2 a donc 25 unités et $a(a+1)$ centaines.

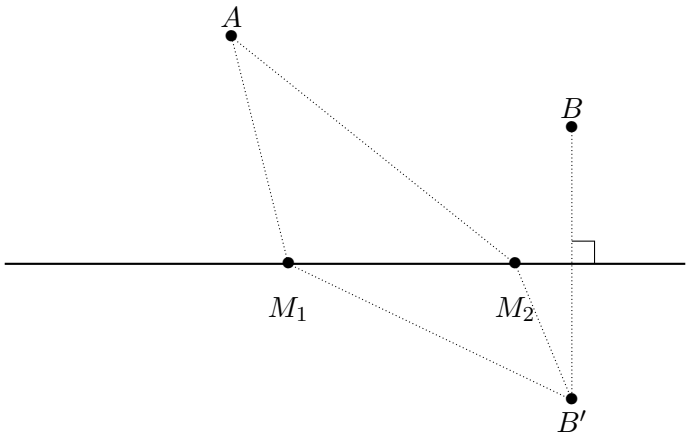
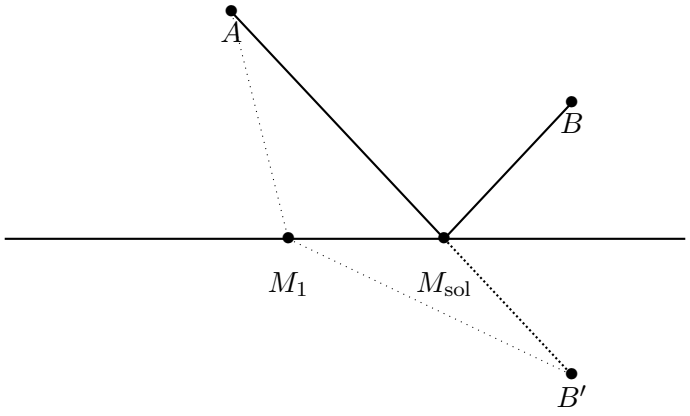
Par exemple : $25^2 = 625 \qquad 65^2 = 4225$.

Une énigme

On note M l'endroit du fleuve où Lucky Luke marque un arrêt. La distance à minimiser est $AM + MB$.



Construisons le symétrique B' de B par rapport à la ligne marquant le fleuve.
Alors, $AM + MB = AM + MB'$.



En vertu de l'inégalité triangulaire (la longueur d'un côté d'un triangle est toujours inférieure ou égale à la somme des deux autres côtés), la distance $AM + MB'$ est minimale lorsque $M \in [AB']$.
Ainsi, le point M solution est à l'intersection de la droite modélisant le fleuve et la droite (AB').