PROGRAMMES 25 ET 26 .

PROGRAMME 25 : du 13/05 au 17/05

Reprise des matrices

Déterminants

- ★ Définition générale en dimension n : il existe une unique application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ vérifiant les trois propriétés suivantes :
  — f est linéaire par rapport à chacune des colonnes de sa variable ;
  — f est antisymétrique par rapport aux colonnes de sa variable ;
  — $f(I_n) = 1$.
  On notera $\det(A)$ le nombre $f(A)$ pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(K)$.
- ★ Propriétés du déterminant : le déterminant d'une matrice ayant deux colonnes égales est nul. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ pour tout $(\lambda, A) \in K \times \mathcal{M}_n(K)$. Effet d'un échange de colonnes, d'une transvection. Déterminant de la transposée d'une matrice carrée. Le déterminant vérifie les mêmes propriétés vis-à-vis des lignes que des colonnes. Développement par rapport à une colonne ou une ligne. Déterminant d'un produit de matrices carrées. Une matrice carrée A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$. Déterminant de l'inverse. Déterminant d'une matrice triangulaire.
- ★ Autres notions de déterminant : déterminant d'une famille de vecteurs dans une base. Caractérisation des bases. Déterminant d'un endomorphisme. Traduction sur les déterminants d'endomorphismes des propriétés vues sur les déterminants de matrices.

Dénombrement

- ★ Cardinal d'un ensemble fini. Notation $\mathrm{card}(A)$.
- ★ Propriétés des cardinaux : cardinal d'une partie d'un ensemble fini. Union disjointe ou quelconque de deux ensembles finis, différence d'ensembles, complémentaire et produit cartésien. Cardinal d'une réunion d'ensembles disjoints 2 à 2. La formule du crible est hors programme.
- ★ Nombre de p-listes (p-uplets) d'éléments d'un ensemble fini de cardinal n. Cardinal de l'ensemble des applications d'un ensemble fini dans un ensemble fini.
- ★ Nombre de p-listes (ou p-uplets) d'éléments distincts d'un ensemble de cardinal n (p-arrangements). Nombre d'applications injectives d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal n. Définition d'une permutation, nombre de permutations d'un ensemble de cardinal n.
- ★ Nombre de parties à p éléments (ou p-combinaisons) d'un ensemble de cardinal n. Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.
- ★ Démonstrations combinatoires des formules du triangle de Pascal et du binôme. Calcul de $\mathrm{card}(\mathcal{P}(E))$ où E est un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.
- ★ Principe des tiroirs.

Un résultat à énoncer

- ❒ Définition d'une matrice de vecteurs, d'une application linéaire.
- ❒ Interprétation de $y = f(x)$.
- ❒ Définition d'une matrice de passage.
- ❒ Formules de changements de bases.
- ❒ Définition de la fonction det (fonction n-linéaire et antisymétrique par rapport aux colonnes de sa variables et telle que $\det(I_n) = 1$).
- ❒ Propriétés calculatoires du det (échange colonnes (ou lignes), invariance par transvection, $\det(\lambda A)$, det d'un produit, det de la transposée).
- ❒ Formule de développement d'un déterminant par rapport à une ligne ou une colonne.
- ❒ Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base.
- ❒ Déterminant d'un endomorphisme. Indépendance par rapport à la base.
- ❒ Propriétés des cardinaux (réunion disjointe ou pas, différence d'ensembles, complémentaire, produit cartésien).
- ❒ Définition d'une p-liste, d'un p-arrangement, d'une permutation, d'une p-combinaison.

Démonstrations

- ❒ Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. A est inversible ssi $\det A \neq 0$. Dans ce cas, $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$.
- ❒ Calcul du déterminant de Vandermonde : $V(a,b,c) = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$ où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.
- ❒ Démonstration combinatoire :
  Soit $n \geq 2$ et $p \leq 1 \leq n-1$. $p\dbinom{n}{p} = n\dbinom{n-1}{p-1}$ (« Formule du capitaine »)

PROGRAMME 26 : du 20/05 au 24/05

Les colles du lundi 20 mai doivent être rattrapées.

Reprise des déterminants et du dénombrement

Espaces probabilisés finis : début

- ★ Lien entre vocabulaire ensembliste et vocabulaire des probabilités. On se limite aux univers finis. Événement élémentaire, système complet d'événements, événements disjoints ou incompatibles, événement contraire. Une variable aléatoire X est une application définie sur l'univers Ω à valeurs dans un ensemble E.
- ★ Probabilité sur un univers fini. Espace probabilisé (Ω, P). Propriétés des probabilités : réunion de deux événements, événement contraire, différence, croissance. La formule du crible est hors programme. Notations $P(X \in A), P(X = x), P(X \leq x)$. Une probabilité P sur Ω est déterminée par la distribution de probabilités $(P(\{\omega\})_{\omega\in\Omega}$ (famille finie d'éléments de $\mathbb{R}_+$ de somme 1). Probabilité uniforme.
- ★ Définition d'une probabilité conditionnelle P_A. Une probabilité conditionnelle est une probabilité. Formule des probabilités composées, des probabilités totales, de Bayes.

Un résultat à énoncer

- ❒ Définition d'une matrice de vecteurs, d'une application linéaire.
- ❒ Interprétation de $y = f(x)$.
- ❒ Définition d'une matrice de passage.
- ❒ Formules de changements de bases.
- ❒ Définition de la fonction det (fonction n-linéaire et antisymétrique par rapport aux colonnes de sa variables et telle que $\det(I_n) = 1$).
- ❒ Propriétés calculatoires du det (échange colonnes (ou lignes), invariance par transvection, $\det(\lambda A)$, det d'un produit, det de la transposée).
- ❒ Formule de développement d'un déterminant par rapport à une ligne ou une colonne.
- ❒ Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base.
- ❒ Déterminant d'un endomorphisme. Indépendance par rapport à la base.
- ❒ Propriétés des cardinaux (réunion disjointe ou pas, différence d'ensembles, complémentaire, produit cartésien).
- ❒ Définition d'une p-liste, d'un p-arrangement, d'une permutation, d'une p-combinaison.
- ❒ Définition d'un système complet d'événements.
- ❒ Définition d'une probabilité.
- ❒ Propriétés des probabilités (événement contraire, différence d'ensembles, réunion de 2 événements, croissance).
- ❒ Définition de la probabilité uniforme.
- ❒ Définition d'une probabilité conditionnelle.
- ❒ Formule des probabilités composées.
- ❒ Formule des probabilités totales.
- ❒ Formule de Bayes.

Démonstrations

- ❐ Calcul du déterminant de Vandermonde : $V(a,b,c) = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$ où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.
- ❐ Démonstration combinatoire :
  Soit $n \geq 2$ et $p \leq 1 \leq n-1$. $p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$ (« Formule du capitaine »)
- ❐ Formule des probabilités totales.