PROGRAMMES 27 ET 28 .

PROGRAMME 27 : du 27/05 au 31/05

Espaces probabilisés finis

- ★ Lien entre vocabulaire ensembliste et vocabulaire des probabilités. On se limite aux univers finis. Événement élémentaire, système complet d'événements, événements disjoints ou incompatibles, événement contraire. Une variable aléatoire X est une application définie sur l'univers Ω à valeurs dans un ensemble E.
- ★ Probabilité sur un univers fini. Espace probabilisé (Ω, P). Propriétés des probabilités : réunion de deux événements, événement contraire, différence, croissance. La formule du crible est hors programme. Notations $P(X \in A, P(X = x), P(X \leq x)$. Une probabilité P sur Ω est déterminée par la distribution de probabilités $(P(\{\omega\})_{\omega\in\Omega}$ (famille finie d'éléments de $\mathbb{R}_+$ de somme 1). Probabilité uniforme.
- ★ Définition d'une probabilité conditionnelle P_A. Une probabilité conditionnelle est une probabilité. Formule des probabilités composées, des probabilités totales, de Bayes.
- ★ Loi P_X d'une variable aléatoire. La loi de X est déterminée par la connaissance de $X(\Omega)$ et des valeurs $P(X = x)$ pour $x \in X(\omega)$. On note $X \sim Y$ la relation $P_X = P_Y$. Variable aléatoire $f(X)$. Loi de $f(X)$. Si $X \sim Y$ alors $f(X) \sim f(Y)$. Loi conditionnelle d'une variable aléatoire sachant un événement A.
- ★ Couple de variables aléatoires : La loi conjointe de X et Y est la loi de (X, Y), les lois marginales de (X, Y) sont les lois de X et de Y. La loi conjointe permet d'en déduire les lois marginales. Notation $P(X = x, Y = y)$ pour désigner $P((X = x) \cap (Y = y))$. Extension aux n-uplets de variables aléatoires.
- ★ Indépendance de deux événements, de n événements. L'indépendance implique l'indépendante 2 à 2 mais la réciproque est fausse. Si A et B sont indépendants alors A et $\overline{B}$ le sont aussi. Indépendance de 2 variables aléatoires (notation $X \perp\!\!\!\perp Y$), de n variables aléatoires. Si X et Y sont indépendantes alors $f(X)$ et $g(Y)$ le sont. Lemme des coalitions : si $X_1 \dots, X_n$ sont indépendantes alors $f(X_1, \dots, X_m), g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.
- ★ Lois usuelles : Loi uniforme sur $\{x_1, \dots, x_n\}$. Loi de Bernoulli de paramètre p dans $[0, 1]$. Notation $X \sim \mathcal{B}(p)$. Lien entre variable aléatoire de Bernoulli et indicatrice d'un événement. Loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$. Notation $X \sim \mathcal{B}(n, p)$. Interprétations des lois. Si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes et suivent la même loi $\mathcal{B}(p)$ alors $X_1 + \cdots + X_n$ suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$.

Espérance et variance

- ★ Espérance $E(X) = \displaystyle\sum_{x\in X(\Omega)} xP(X = x)$. Variable aléatoire centrée.
- ★ Linéarité, croissance, inégalité triangulaire ($|E(X)| \leq E(|X|)$).
- ★ Espérance d'une variable constante, uniforme, de Bernoulli, binomiale.
- ★ Formule du transfert : $E(f(X)) = \displaystyle\sum_{x\in X(\Omega)} f(x)P(X = x)$.

  La formule s'applique aux couples.

  Si X et Y sont indépendantes alors $E(XY) = E(X)E(Y)$. La réciproque est fausse.

- ★ Variance et écart-type : $V(X) = E((X - E(X))^2)$. Variable réduite, centrée réduite. Relation $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$, relation $V(aX + b) = a^2 V(X)$.

  Variance d'une variable de Bernoulli, d'une variable binomiale.
- ★ Covariance de 2 variables aléatoires : $\text{Cov}(X, Y) = E(\,(X - E(X))(Y - E(Y))\,)$.

  Deux variables dont la covariance est nulle sont décorrélées.

  Relation $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$. Cas de 2 variables indépendantes.
- ★ Variance d'une somme, cas de variables décorrélées. On retrouve la variance d'une variable binomiale.
- ★ Inégalité de Markov, inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Un résultat à énoncer

- ❒ Définition d'un système complet d'événements.
- ❒ Définition d'une probabilité.
- ❒ Propriétés des probabilités (événement contraire, différence d'ensembles, réunion de 2 événements, croissance).
- ❒ Définition de la probabilité uniforme.
- ❒ Définition d'une probabilité conditionnelles.
- ❒ Formule des probabilités composées.
- ❒ Formule des probabilités totales.
- ❒ Formule de Bayes.
- ❒ Loi de $f(X)$ en fonction de X.
- ❒ Définition d'une loi conjointe, des lois marginales.
- ❒ Formule donnant une loi marginale connaissant la loi conjointe.
- ❒ Indépendance de 2 événements, de n événements.
- ❒ Définition d'une loi uniforme, d'une loi de Bernoulli. Interprétations.
- ❒ Définition d'une loi binomiale. Interprétation.
- ❒ Définition de l'espérance et propriétés.
- ❒ Formule du transfert.
- ❒ Définition de la variance et autre formule ($V(X) = E(X^2) - E(X)^2$). Relation $V(aX + b)$.
- ❒ Espérance et variance d'une variable de Bernoulli, d'une variable binomiale.
- ❒ Définition de la covariance et autre formulation.
- ❒ Variance d'une somme de 2 variables, de n variables.
- ❒ Inégalité de Markov.
- ❒ Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
- ❒ Loi faible des grands nombres.

Démonstrations

- ❒ Formule des probabilités totales.
- ❒ Calcul de la variance d'une variable suivant une loi binomiale (connaissant l'espérance).
- ❒ *Loi faible des grands nombres* :

  Soit $X_1 \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles, indépendantes et de même loi, d'espérance m et d'écart-type σ. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.

  Pour tout $\varepsilon > 0$, $P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

PROGRAMME 28 : du 03/06 au 07/06

Reprise des probabilités (espaces probabilisés finis, espérance, variance)

Analyse asymptotique

★ Compléments sur les DL : Formule de Taylor-Young (développement limité à l'ordre n au voisinage d'un point a de I d'une application de classe $\mathcal{C}^n$ sur I). Primitivation des DL. Les étudiants doivent connaître les développements limités à tout ordre au voisinage de 0 de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, exp, sin, cos, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$, $x \mapsto (1+x)^\alpha$, $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto \operatorname{Arctan} x$ et de tan à l'ordre 3.

★ Relations de domination : cas des suites

- ❒ Notations $u_n = O(v_n)$, $u_n = o(v_n)$, $u_n \sim v_n$.
- ❒ Liens entre les relations de comparaison. Équivalence entre les relations $u_n \sim v_n$ et $u_n - v_n = o(v_n)$. Opérations sur les équivalents : produit, quotient, puissances. Équivalents classiques. Propriétés conservées par équivalence : signe (localement), limite. On ne somme pas, on ne fait pas la composée d'équivalent de manière générale (à part par la valeur absolue et la puissance α, indépendante de la variable).

★ Relations de comparaison : cas des fonctions. Adaptation aux fonctions des définitions et résultats du paragraphe précédent (en un point ou à l'infini).

★ Applications : Calcul d'équivalents et de limites. Étude locale d'une fonction : tangente, position relative de la courbe et de la tangente. Détermination d'asymptotes et études des positions relatives. Condition suffisante à l'ordre 2 pour un extremum local.

Un résultat à énoncer

Lorsque l'on énonce un résultat, bien définir tout ce dont on a besoin.

- ❒ Définition de l'espérance et propriétés.
- ❒ Formule du transfert.
- ❒ Définition de la variance et autre formule ($V(X) = E(X^2) - E(X)^2$). Relation $V(aX+b)$.
- ❒ Espérance et variance d'une variable de Bernoulli, d'une variable binomiale.
- ❒ Définition de la covariance et autre formulation.
- ❒ Variance d'une somme de 2 variables, de n variables.
- ❒ Inégalité de Markov.
- ❒ Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
- ❒ Formule de Taylor-Young.
- ❒ Primitivation d'un DL.
- ❒ 3 DL usuels.
- ❒ Définition d'un o ou d'un équivalent (suite ou fonction).
- ❒ Opérations possibles sur les équivalents.
- ❒ Conservation locale du signe pour des suites ou fonctions équivalentes.
- ❒ Condition suffisante pour avoir un extremum local en $x_0 \in I$ pour $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^2.

Démonstrations

- ❒ Calcul de la variance d'une variable suivant une loi binomiale (connaissant l'espérance).
- ❒ *Loi faible des grands nombres* :
  Soit $X_1 \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles, indépendantes et de même loi, d'espérance m et d'écart-type σ. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.
  Pour tout $\varepsilon > 0$, $P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
- ❒ Déterminer le $DL_{2n+1}(0)$ de Arctan.