# PROGRAMME 29 .

## PROGRAMME 29 : du 17/06 au 21/06

## Reprise de l'analyse asymptotique

## Intégration

- ★ Fonctions en escalier : Subdivision d'un segment. Fonctions en escalier définies sur un segment à valeurs réelles. Intégrale.
- ★ Intégrale d'une fonction continue sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ : Aucune construction n'est imposée. Les fonctions continues par morceaux sont hors programme. Il convient d'interpréter graphiquement l'intégrale d'une fonction continue à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ en terme d'aire mais tout développement théorique sur ce sujet est hors programme. Valeur moyenne. Notations $\displaystyle\int_{[a,b]} f$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_a^b f$. Linéarité, positivité et croissance de l'intégrale. Inégalité : $\displaystyle\left|\int_{[a,b]} f\right| \leqslant \int_{[a,b]} |f|$. Relation de Chasles. Extension de la notation $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ au cas où $b \leqslant a$. Propriétés correspondantes. L'intégrale sur un segment d'une fonction continue de signe constant est nulle si et seulement si la fonction est nulle.
- ★ Sommes de Riemann. Interprétation géométrique.
- ★ Calcul intégral : Si $f$ est une fonction continue sur l'intervalle $I$ et si $a$ est un point de $I$, alors $\displaystyle x \mapsto \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ est l'unique primitive de $f$ sur $I$ s'annulant en $x_0$. Toute fonction continue sur $I$ admet des primitives sur $I$. Calcul d'une intégrale au moyen d'une primitive. En particulier, pour $f$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, $\displaystyle\int_a^b f'(t)\ \mathrm{d}t = f(b) - f(a)$. Intégration par parties. Changement de variable.
- ★ Inégalité de Taylor-Lagrange.
- ★ Brève extension au cas des fonctions à valeurs complexes : Intégrale d'une fonction continue sur un segment, linéarité, majoration du module de l'intégrale, intégration par parties et changement de variable, inégalité de Taylor-Lagrange.

## Géométrie plane

- ★ Modes de repérage : coordonnées cartésiennes, coordonnées polaires d'un point du plan supposé muni d'un repère orthonormé (ou orthonormal).
- ★ Norme euclidienne dans $\mathbb{R}^2$. Définition géométrique du produit scalaire : si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont non nuls, alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\| \cos(\theta)$ où $\theta \equiv (\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})\ (2\pi)$ et $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$ sinon. Interprétation en termes de projection orthogonale. Bilinéarité, symétrie. Expression dans une base orthonormée. Identité remarquable $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 + 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$. Formule de polarisation associée. Caractérisation de l'orthogonalité de deux vecteurs.
- ★ Produit mixte dans le plan orienté. Définition géométrique : si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont non nuls, alors $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\| \sin(\theta)$ où $\theta \equiv (\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})\ (2\pi)$ et $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = 0$ sinon. Interprétation en terme d'aire orientée d'un parallélogramme. Bilinéarité, antisymétrie. Expression dans une base orthonormée directe. Caractérisation de la colinéarité de deux vecteurs.

- ★ Droites. Paramétrage et équation cartésienne d'une droite définie par un point et un vecteur directeur, par deux points distincts, par un point et un vecteur normal. Notation $A + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u})$. Lignes de niveau de $M \mapsto \overrightarrow{u}.\overrightarrow{AM}$ et de $M \mapsto [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM}]$. Projeté orthogonal d'un point sur une droite.
- ★ Cercles. Équation cartésienne et paramétrage d'un cercle en repère orthonormé. Caractérisation du cercle de diamètre $[AB]$ par l'équation $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

## Un résultat à énoncer

*Lorsque l'on énonce un résultat, bien définir tout ce dont on a besoin.*

- ❐ Formule de Taylor-Young.
- ❐ Primitivation d'un $DL$.
- ❐ 3 DL usuels.
- ❐ Définition d'un $o$ ou d'un équivalent (suite ou fonction).
- ❐ Opérations possibles sur les équivalents.
- ❐ Conservation locale du signe pour des suites ou fonctions équivalentes.
- ❐ Condition suffisante pour avoir un extremum local en $x_0 \in I$ pour $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $C^2$.
- ❐ Somme de Riemann associée à une fonction $f$ continue et résultat de convergence.
- ❐ Positivité, croissance, résultat avec la valeur absolue, linéarité de l'intégrale.
- ❐ Théorème fondamental de l'analyse.
- ❐ Inégalité de Taylor-Lagrange.
- ❐ Définition du produit scalaire et du produit mixte.
- ❐ Formules sur les normes : $\|\overrightarrow{u} \pm \overrightarrow{v}\|^2$, formules de polarisation, factorisation de $\|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2$ via le produit scalaire.
- ❐ Expression du produit scalaire dans une base orthonormée et du produit mixte dans une base orthonormée directe.
- ❐ Interprétation géométrique du produit mixte (cf. aire d'un parallélogramme).
- ❐ Équation d'une droite, lecture d'un vecteur directeur, d'un vecteur normal.
- ❐ Représentation paramétrique d'une droite.
- ❐ Lignes de niveau du produit scalaire, du produit mixte.
- ❐ Équation d'un cercle.

## Savoir-Faire

Concernant le chapitre de Géométrie Plane, chaque étudiant aura un petit exercice sans difficulté.

## Démonstrations

- ❐ **Exercice fait en cours :**
  Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x\sqrt{2\sin(2x)}}\,\mathrm{d}x$ en posant $t = \tan x$.
- ❐ **Exercice fait en cours :**
  Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t$.
  Déterminer le domaine de définition de $F$, sa dérivabilité et préciser sa dérivée.
- ❐ Soit $A$ et $B$ deux points distincts de $E$.
  L'ensemble des points $M$ du plan tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$.