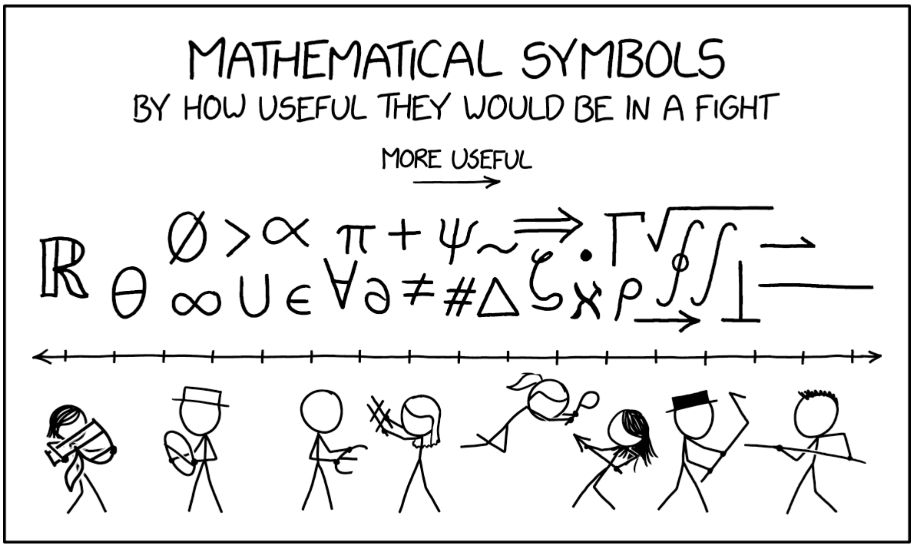
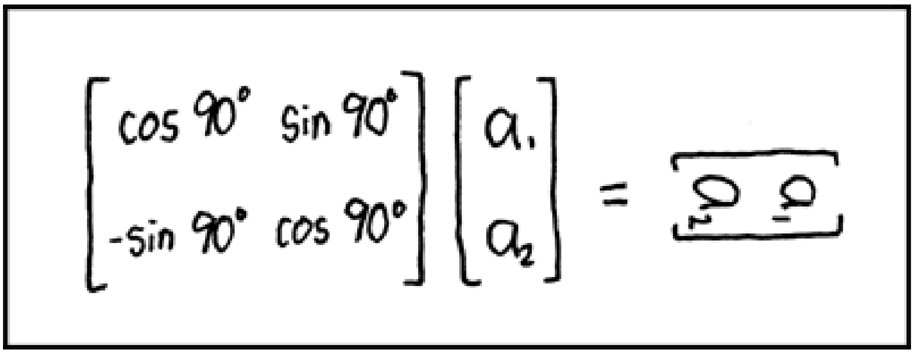
Cahier de vacances





https://xkcd.com

Rappel : $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ représente la rotation vectorielle d'angle $-\theta$.

Exercices de révision

Niveau 1

Exercice 1. On pose $z = \left(\dfrac{1+i}{1-i\sqrt{3}}\right)^{10}$.

1°) Calculer $\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(z)$.

2°) Trouver un polynôme P à coefficients réels, de plus petit degré possible, tel que $P(z) = 0$.

Exercice 2. Déterminer le signe, au voisinage de $+\infty$ de $u_n = \mathrm{sh}\left(\dfrac{1}{n}\right) - \tan\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Exercice 3. **1°)** Montrer que $1 + 2\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right) = 0$.

2°) En déduire une expression à l'aide de radicaux de $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.

Exercice 4. Soit $\Delta_n = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 2 & 4 & 2 \\ 0 & \dots & \dots & & 2 & 4 \end{vmatrix}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer Δ_n.

Exercice 5. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Soit f l'application définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par $f : M \mapsto AM$.

1°) Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$.

2°) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

3°) f est-elle surjective ?

4°) Trouver une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 6. Soit a et b des réels tels que $a < b$. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $[a,b]$, deux fois dérivable sur $]a,b[$ telle que : $f(a) = f'(a) = f(b) = 0$.
Montrer que : $\exists c \in]a,b[, f''(c) = 0$.

Exercice 7. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)$ converge et calculer la somme de la série.

Exercice 8. Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et $E = \mathbb{R}_n[X]$.
Soit f l'endomorphisme de E défini par : $\forall P \in E, f(P) = P - P'$.

1°) Démontrer que f est bijective de deux manières :

a) sans utiliser de matrice de f

b) en utilisant une matrice de f

2°) Soit $Q \in E$. Trouver P tel que $f(P) = Q$.

Indication : Si $P \in E$, quel est le polynôme $P^{(n+1)}$?

$\boxed{\text{Niveau 2}}$

Exercice 9. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle : $x^2y'' - 2y = x^2$ en effectuant le changement $t = \ln(x)$.

Exercice 10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)$.

Exercice 11. Soit E un K-ev de dimension finie. Soit u et v des endomorphismes de E.

1°) Montrer que $\mathrm{Im}(u+v) \subset \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$.

2°) On suppose $u+v$ bijective et $u \circ v = 0$. Montrer que : $\mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v) = \dim(E)$.
Montrer que $\mathrm{Im}(v) = \mathrm{Ker}(u)$.

Exercice 12. Soit n et p des entiers tels que $0 < p \leq n$.
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ tels que $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^p}$.
Donner le rang et la nature de $g \circ f$.
Indication : $f \circ g$ est bijective. Qu'en déduit-on ? cf. exo fait en TD (à redémontrer...)

Exercice 13. *Les deux questions sont indépendantes.*

1°) Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $I(a) = \displaystyle\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{\mathrm{Arctan}(x)}{x}\,\mathrm{d}x$.
Calculer $I(a)$ en effectuant un changement de variables échangeant les bornes.

2°) Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan(x))\,\mathrm{d}x$ en effectuant un changement de variables échangeant les bornes.
En déduire $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ puis $K = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{Arctan}(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 14. Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 3 de $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} \ln(1+t)\ln(1-t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 15. Soit E un espace vectoriel.
Soit f et g des endomorphismes de E tels que $f \circ g = \mathrm{id}_E$.

1°) Montrer que $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}(f)$.

2°) Montrer que $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}(g)$.

3°) En déduire que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(g)$.

$\boxed{\text{Niveau 3}}$

Exercice 16. **1°)** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists!\, u_n \in \mathbb{R}, u_n^5 + nu_n - 1 = 0$.

2°) Montrer que (u_n) converge vers 0.

3°) Écrire un développement asymptotique de u_n à 2 termes.

Exercice 17. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie impaire.
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 + u = 0$. u est-il bijectif ?

Exercice 18. Soit E un espace vectoriel de dimension n.

1°) Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

Montrer que, pour tout $i \in \{2, 3, \dots, n\}, (e_1 + e_i, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E.

2°) Déterminer tous les endomorphismes de E dont la matrice est diagonale dans toute base.

Exercice 19. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ dérivable telle que : $\forall x \geq 0, xf'(x) + f(x) \geq 4x^2$.
Montrer que : $\forall x \geq 0, f(x) \geq \dfrac{4}{3}x^2$.

Exercice 20. On rappelle dans cet exercice le résultat sur les déterminants de Vandermonde.

On note, pour tous réels a, b, c, $V(a,b,c) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$. Alors, $V(a,b,c) = (b-a)(c-a)(c-b)$.

Calculer alors, pour tous réels a, b, c, le déterminant : $D = \begin{vmatrix} b+c & a+c & a+b \\ b^2+c^2 & a^2+c^2 & a^2+b^2 \\ b^3+c^3 & a^3+c^3 & a^3+b^3 \end{vmatrix}$.

Exercice 21. Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 3 de $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} \ln(1+t)\ln(1-t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 22. On pose, pour tout $n \geq 1$, $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
On admet qu'il existe un réel γ tel que : $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$.

En déduire la convergence de la série $\displaystyle\sum \frac{1}{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}$ et calculer sa somme.

Niveau 4

Exercice 23. On souhaite montrer que la série $\sum \sin(\pi(2+\sqrt{3})^n)$ converge.

1°) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, (2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n \in \mathbb{N}$.

2°) Conclure.

Exercice 24. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$.

1°) Déterminer les racines du polynôme $P = (X+1)^n - e^{i2an}$. Combien y en a-t-il ?

2°) En déduire la valeur du produit : $p_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n} + a\right)$.

Exercice 25. Soit n un entier ≥ 2.
Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, |a_{i,i}| > \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} |a_{i,j}|$$

1°) On suppose $n = 2$. Montrer que A est inversible.

2°) Cas général : Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ telle que $AX = 0$.

a) On note $M = \max\{|x_i|/1 \leq i \leq n\}$.

Montrer que : $\forall i \in \{1, \dots, n\}, |a_{i,i}||x_i| \leq M \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} |a_{i,j}|$.

b) En déduire que A est inversible.

Exercice 26. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Déterminer le $DL_{n+1}(0)$ de $f : x \mapsto \ln\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right)$.

Exercice 27. Soit a et b des réels tels que $a < b$. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f(a) = 0$ et, pour tout $x \in [0, 1], 0 \leq f'(x) \leq 1$.

Montrer, en faisant une étude de fonctions, que : $\int_a^b f(t)^3 \,\mathrm{d}t \leq \left(\int_a^b f(t)\right)^2$.

Exercice 28. Soit la suite (u_n) définie par : $\forall n \geq 1, u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} - \frac{1}{2}\ln^2 n$.

Montrer que la suite (u_n) converge.

Exercice 29. Pour $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, calculer $I_{p,q} = \int_0^1 (1-t)^p t^q \,\mathrm{d}t$.

Exercice 30. Soit E un K-ev de dimension finie $n \geq 2$. Soit u un endomorphisme de E de rang $n-1$.

1°) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, \dim(\mathrm{Ker}(u^{k+1})) \leq \dim(\mathrm{Ker}(u^k)) + 1$.

Indication : utiliser $f = u|_{\mathrm{Im}(u^k)}$.

2°) On suppose que $u^n = 0$.

Montrer que : $\forall k \in \{0, \dots, n\}, \dim(\mathrm{Ker}(u^k)) = k$.

Exercice 31. On se propose de montrer que $\pi \notin \mathbb{Q}$.

Nous allons raisonner par l'absurde : on suppose que π s'écrit $\pi = \frac{a}{b}$ où a et b sont dans $\mathbb{N}^*$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et P un polynôme de degré $2n$. On définit deux fonctions :

$$F : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} (-1)^k P^{(2k)}(x) \qquad G : x \mapsto F'(x)\sin(x) - F(x)\cos(x)$$

1°) Justifier que G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer G' en fonction du polynôme P.

2°) En déduire que $\int_0^\pi P(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x = F(0) + F(\pi)$.

Désormais, P est défini par : $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!}$.

3°) Pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$, montrer que $P^{(k)}(0) = 0$.

4°) Calculer le coefficient de x^{n+k} dans l'expression développée de P pour $k \in \{0, \dots, n\}$.

5°) Calculer $P^{(n+k)}(0)$ pour $k \in \{0, \dots, n\}$.

En déduire que c'est un élément de $\mathbb{Z}$.

6°) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, P(\pi - x) = P(x)$.

7°) On pose, pour $n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^\pi \frac{x^n(a-bx)^n}{n!}\sin(x)\,\mathrm{d}x$.

Montrer que $I_n \in \mathbb{N}^*$.

8°) Montrer que la suite (I_n) converge vers 0.

9°) Conclure.

Pour finir : trois énigmes

Énigme 1

Il y a deux clans de martiens : les tuku, qui mentent toujours, et les taka, qui disent toujours la vérité.
Un voyageur rencontre trois martiens et leur demande leur clan.
Le premier marmonne quelque chose que personne ne comprend ;
le deuxième répond : « il dit qu'il est un tuku » ;
le troisième dit au deuxième : « tu es un menteur ».
À quel clan appartient le troisième martien ?

Énigme 2

Combien vaut :

$$\begin{aligned} &2024^2 - 2023^2 \\ &+2022^2 - 2021^2 \\ &+\dots \\ &+4^2 - 3^2 \\ &+2^2 - 1^2 ? \end{aligned}$$

Énigme 3

Deux bicyclettes partent à vingt km de distance et se dirigent l'une vers l'autre, chacune roulant à 10 km par heure. En même temps, une mouche qui vole à 15 km par heure part de la roue de la première bicyclette et vole jusqu'à la seconde, puis fait demi-tour et vole jusqu'à la roue de la première bicyclette, et continue ainsi de suite jusqu'à ce qu'elle soit écrasée entre les deux roues.
Question : quelle distance la mouche a-t-elle couverte ?

Le mot de la fin à Calvin et Hobbes