Exercices de révision : corrigé

Si vous trouvez des coquilles, merci de me l'indiquer. Si vous ne comprenez pas certaines parties du corrigé, vous pouvez aussi m'envoyer un message que ce soit pendant les vacances ou l'année prochaine. Rappel adresse mail : `bourzac.audrey@gmail.com`

Niveau 1

Exercice 1. **1°)**

$$z = \left(\frac{1+i}{1-i\sqrt{3}}\right)^{10} = \left(\frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}\right)^{10} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{7\pi}{12}}\right)^{10} = \frac{1}{2^5}e^{i\frac{35\pi}{6}}$$

$\dfrac{35\pi}{6} = \dfrac{36\pi}{6} - \dfrac{\pi}{6} = 6\pi - \dfrac{\pi}{6}$. Donc, $z = \dfrac{1}{2^5}e^{-i\frac{\pi}{6}} = \dfrac{1}{32}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2}\right)$.

Finalement, $\boxed{\operatorname{Re}(z) = \dfrac{\sqrt{3}}{64},\ \operatorname{Im}(z) = -\dfrac{1}{64}}$.

2°) $z \notin \mathbb{R}$. On ne peut donc pas proposer un polynôme de degré 1.

On pose : $P(X-z)(X-\overline{z})$. $P \in \mathbb{R}[X]$ et est de degré le plus petit possible tel que $P(z) = 0$.

$P = X^2 - (z+\overline{z})X + z\overline{z} = X^2 - 2\operatorname{Re}(z)X + |z|^2$. Donc $\boxed{P = X^2 - \dfrac{\sqrt{3}}{32}X + \dfrac{1}{32}}$.

Exercice 2.

$$\begin{aligned}\operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n}\right) &= \frac{1}{n} + \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \qquad \text{car } \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \\ &= -\frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\end{aligned}$$

Donc $u_n \sim -\dfrac{1}{6n^3}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, -\dfrac{1}{6n^3} < 0$ donc $\boxed{\text{au voisinage de } +\infty, u_n < 0}$.

Exercice 3. **1°)** On note $\omega = e^{i\frac{2\pi}{5}}$.

ω est une racine 5ème de l'unité et $\omega \neq 1$ donc $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$.

Or $\omega^3 = e^{i\frac{6\pi}{5}} = e^{\left(i\frac{6\pi}{5} - 2\pi\right)} = e^{-i\frac{4\pi}{5}} = \overline{\omega^2}$

$\omega^4 = e^{i\frac{8\pi}{5}} = e^{\left(i\frac{8\pi}{5} - 2\pi\right)} = e^{-i\frac{2\pi}{5}} = \overline{\omega}$.

Ainsi, $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4 = 1+\omega+\overline{\omega}+\omega^2+\overline{\omega^2} = 1+2\operatorname{Re}(\omega)+2\operatorname{Re}(\omega^2) = 1+2\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)+2\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$.

Finalement, $\boxed{1 + 2\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right) = 0}$.

2°) On sait : $\forall t \in \mathbb{R}, \cos(2t) = \cos^2 t - \sin^2 t = 2\cos^2 t - 1$.

Ainsi, $\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right) = 2\cos^2\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) - 1$.

Donc, en posant $x = \cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$, on obtient par 1 : $1+2x+2(2x^2-1) = 0$ soit encore $4x^2+2x-1 = 0$.

Ce trinôme a pour discriminant $\Delta = 4 + 16 = 20 = (2\sqrt{5})^2$.

Les racines sont : $\dfrac{-2 - 2\sqrt{5}}{8} = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}$ et $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

Ainsi, $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}$ ou $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

Or $\dfrac{2\pi}{5} \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ donc $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) \geq 0$. Comme $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4} < 0$, on en déduit que $\boxed{\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}}$.

Exercice 4. *On reconnaît un déterminant tridiagonal.*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\Delta_n = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 2 & 4 & 2 \\ 0 & \dots & \dots & & 2 & 4 \end{vmatrix}$.

Soit $n \geq 3$. On développe par rapport à L_1.

$$\begin{aligned} \Delta_n &= 4\Delta_{n-1} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 2 & 4 & 2 \\ 0 & \dots & \dots & & 2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 4\Delta_{n-1} - 4\Delta_{n-2} \qquad \text{en développant le 2e déterminant par rapport à } L_1 \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \geq 3, \Delta_n = 4\Delta_{n-1} - 4\Delta_{n-2}$.

La suite $(\Delta_n)_{n\geq 1}$ est dont une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

L'équation caractéristique est : $r^2 - 4r + 4 = 0 \iff (r-2)^2 = 0 \iff r = 2$.

Ainsi, $\exists\,!\,(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \Delta_n = (\lambda + n\mu)2^n$.

Or $\Delta_1 = 4$ et $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 4 = 12$.

On résout :

$$\begin{cases} 2\lambda + 2\mu &= 4 \\ 4\lambda + 8\mu &= 12 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu &= 2 \\ \lambda + 2\mu &= 3 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \lambda + \mu & = 2 \\ \mu = 1 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{cases}$$
$$\iff \lambda = \mu = 1$$

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Delta_n = (n+1)2^n}$.

Exercice 5. Dans la suite, on note $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1°) Soit $(M_1, M_2) \in E^2, \lambda \in \mathbb{R}$.

$f(\lambda M_1 + M_2) = A(\lambda M_1 + M_2) = \lambda A M_1 + A M_2 = \lambda f(M_1) + f(M_2)$.

Ainsi, f est linéaire. De plus, $f : E \to E$. Donc $\boxed{f \in \mathcal{L}(E)}$.

2°) Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in E$.

$$\begin{aligned} M \in \operatorname{Ker}(f) &\iff f(M) = 0 \\ &\iff AM = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff \begin{cases} x + 2z = 0 \\ y + 2t = 0 \end{cases} \qquad \text{les 2 autres lignes sont redondantes} \\ &\iff \begin{cases} x = -2z \\ y = -2t \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, $\operatorname{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} -2z & -2t \\ z & t \end{pmatrix} \ / \ (z,t) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

Ainsi, $\boxed{\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)}$.

3°) $\operatorname{Ker}(f) \neq \{0\}$ donc f n'est pas injective.

De plus, f est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie donc f est injective $\iff$ f est surjective.

On en déduit que $\boxed{f \text{ n'est pas surjective}}$.

4°) On note $M_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(M_1, M_2) est une famille génératrice de $\operatorname{Ker}(f)$. De plus, M_1 et M_2 ne sont pas colinéaires. Ainsi, (M_1, M_2) est libre. C'est donc une base de $\operatorname{Ker}(f)$. Donc $\dim(\operatorname{Ker} f) = 2$.

Par le théorème du rang, $\dim(E) = \dim(\operatorname{Ker} f) + \operatorname{rg}(f)$. Comme $\dim(E) = 4$, $\operatorname{rg}(f) = 2$.

Calculons pas exemple $N_1 = f(E_{1,1})$ et $N_2 = f(E_{1,2})$.

$$N_1 = f(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$
$$N_2 = f(E_{1,2}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Comme N_1 et N_2 ne sont pas colinéaires, ils forment une famille libre de $\operatorname{Im}(f)$. Comme elle a 2 éléments et $2 = \dim(\operatorname{Im} f)$, $\boxed{(N_1, N_2) \text{ est une base de } \operatorname{Im}(f)}$.

Exercice 6. f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. De plus $f(a) = f(b)$.
Donc, par le théorème de Rolle,

$$\exists\, d \in]a,b[,\ \ f'(d) = 0$$

f' est continue sur $[a,d]$, dérivable sur $]a,d[$ et $f'(a) = f'(d) = 0$.
Donc, par le théorème de Rolle,

$$\boxed{\exists\, c \in]a,d[,\ \ f''(c) = 0}$$

$c \in]a,d[$ donc $\boxed{c \in]a,b[}$.

Exercice 7. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)$.

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} \ln((k+1)^2) - \sum_{k=1}^{n} \ln k - \sum_{k=1}^{n} \ln(k+2)\\
&= 2\sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \sum_{k=1}^{n} \ln k - \sum_{k=1}^{n} \ln(k+2)\\
&= \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) + \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \sum_{k=1}^{n} \ln k - \sum_{k=1}^{n} \ln(k+2)\\
&= \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \sum_{k=1}^{n} \ln k + \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \sum_{k=1}^{n} \ln(k+2)\\
&= \sum_{j=2}^{n+1} \ln j - \sum_{j=1}^{n} \ln j + \sum_{j=2}^{n+1} \ln j - \sum_{j=3}^{n+2} \ln j\\
&= \ln(n+1) + \ln 2 - \ln(n+2) \qquad \text{par téléscopage}\\
&= \ln 2 + \ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right)\\
S_n &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln 2 \qquad \text{par opérations sur les limites}
\end{aligned}$$

On en déduit que $\boxed{\text{la série } \sum \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right) \text{ converge}}$ et $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right) = \ln 2}$.

Exercice 8. **1°)** Tout d'abord, on pense à justifier que f est un endomorphisme de E.

La linéarité est laissée en exercice (vient de la linéarité de la dérivation).

Soit $P \in E$. Alors $\deg(P) \leq n$. Donc $\deg(P') \leq n$.

Donc, puisque E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$, $f(P) = P - P' \in E$.

Ainsi, $\boxed{f \in \mathcal{L}(E)}$.

a) Montrons que f est injective.

Soit $P \in \mathrm{Ker}(f)$. Alors $f(P) = 0$ i.e. $P' = P$.

Si $P \neq 0$ alors $\deg(P') < \deg(P)$. Exclu donc $P = 0$.

$\mathrm{Ker}(f) \subset \{0\}$. La réciproque est claire donc $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$. Donc f est injective.

Or f est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie donc $\boxed{f \text{ est bijective}}$.

b) On travaille dans $\mathcal{B} = (1, X, \ldots, X^n)$ la base canonique de E.

$f(1) = 1$ et, pour $k \in \{1, \ldots, n\}$, $f(X^k) = X^k - kX^{k-1}$.

Donc la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix}
1 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0\\
0 & 1 & -2 & \ldots & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0\\
\vdots & & & \ddots & & \vdots\\
\vdots & \ldots & \ldots & \ldots & 1 & -n\\
0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

A est triangulaire supérieure, à coefficients diagonaux tous non nuls donc A est inversible.

Donc $\boxed{f \text{ est bijective}}$.

2°) Soit $Q \in E$. f est bijective donc : $\exists! P \in E, f(P) = Q$.
Ainsi, $P - P' = Q$. On dérive successivement :

$$\begin{aligned} P - P' &= Q \\ P' - P'' &= Q' \\ &\vdots \\ P^{(n)} - P^{(n+1)} &= Q^{(n)} \end{aligned}$$

En sommant membre à membre, on obtient par téléscopage : $P - P^{(n+1)} = Q + Q' + \cdots + Q^{(n)}$.

Or $\deg(P) \leq n$ donc $P^{(n+1)} = 0$. Finalement, $\boxed{P = \sum_{k=1}^{n} Q^{(k)}}$.

Niveau 2

Exercice 9. On note $(E) : \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ x^2 y''(x) - 2y(x) = x^2$.
Soit $y : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable.
On pose : $\forall t \in \mathbb{R},\ z(t) = y(e^t)$.
Remarque : Cela revient à : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ y(x) = z(\ln x)$.
z est deux fois dérivable comme composée de fonctions deux fois dérivables.
$\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} z(t) &= y(e^t) && \times(-2) \\ z'(t) &= e^t y'(e^t) && \times(-1) \\ z''(t) &= e^t y'(e^t) + e^{2t} y''(e^t) && \times 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de } (E) &\iff \forall x > 0,\ x^2 y''(x) - 2y(x) = x^2 \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R},\ e^{2t} y''(e^t) - 2y(e^t) = e^{2t} \quad \text{car exp réalise une bijection de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}_+^* \\ &\iff \underbrace{\forall t \in \mathbb{R},\ z''(t) - z'(t) - 2z(t) = e^{2t}}_{z \text{ est solution de } (F)} \end{aligned}$$

(F) est une EDL_2 à coefficients constants avec second membre.
L'équation homogène associée est $(F_0) : z'' - z' - 2z = 0$.
L'équation caractéristique est : $r^2 - r - 2 = 0 \iff r = -1$ ou $r = 2$.
Les solutions de (F_0) sont les fonctions $t \mapsto \lambda e^{-t} + \mu e^{2t}$ où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
On cherche une solution particulière de (F) sous la forme $z : t \mapsto P(t)e^{2t}$ où $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est deux fois dérivable (2 est solution de l'équation caractéristique).
$\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} z(t) &= P(t)e^{2t} && \times(-2) \\ z'(t) &= P'(t)e^{2t} + 2P(t)e^{2t} = e^{2t}(P'(t) + 2P(t)) && \times(-1) \\ z''(t) &= 2e^{2t}(P'(t) + 2P(t)) + e^{2t}(P''(t) + 2P'(t)) \\ &= e^{2t}(P''(t) + 4P'(t) + 4P(t)) && \times 1 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} z \text{ est solution de } (F) &\iff \forall t \in \mathbb{R}, e^{2t}(P''(t) + (4-1)P'(t) + (4-2-2)P(t) = e^{2t} \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R},\ P''(t) + 3P'(t) = 1 \end{aligned}$$

On choisit $P : t \mapsto \dfrac{t}{3}$. Alors $z : t \mapsto \dfrac{t}{3}e^{2t}$ est une solution de (F).
Donc, les solutions de (F) sont les fonctions $t \mapsto \dfrac{t}{3}e^{2t} + \lambda e^{-t} + \mu e^{2t}$ où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} y \text{ est solution } &\iff \exists\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall\, t \in \mathbb{R},\ z(t) = \frac{t}{3}e^{2t} + \lambda e^{-t} + \mu e^{2t} \\ &\iff \exists\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ z(\ln x) = \frac{\ln x}{3}e^{2\ln x} + \lambda e^{-\ln x} + \mu e^{2\ln x} \\ &\qquad \text{car ln est bijective de } \mathbb{R}_+^* \text{ dans } \mathbb{R} \\ &\iff \exists\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall\, x \in \mathbb{R},\ y(x) = \frac{\ln x}{3}x^2 + \frac{\lambda}{x} + \mu x^2 \end{aligned}$$

Ainsi, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions :

$$\boxed{x \mapsto \frac{\ln x}{3}x^2 + \frac{\lambda}{x} + \mu x^2 \text{ où } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2}$$

Exercice 10. On rappelle la factorisation classique :

$$X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)$$

On a aussi $X^n - 1 = (X-1)(X^{n-1} + X^{n-2} + \cdots + 1)$.
Ainsi, en isolant $X - 1$ dans le produit : $(X-1)\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \left(X - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right) = (X-1)(X^{n-1} + X^{n-2} + \cdots + 1)$.
Comme $X - 1$ n'est pas le polynôme nul, il vient :

$$\prod_{k=1}^{n-1} \left(X - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right) = X^{n-1} + X^{n-2} + \cdots + 1$$

En évaluant en 1 (i.e. on remplace X par 1) :

$$\boxed{\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right) = n}$$

Exercice 11. **1°)** Soit $y \in \mathrm{Im}(u+v)$. Alors $\exists\, x \in E,\ y = (u+v)(x)$ i.e. $y = u(x) + v(x)$.
Ainsi $y \in \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$.
On a donc montré que : $\boxed{\mathrm{Im}(u+v) \subset \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)}$.

2°) On suppose $u + v$ bijective et $u \circ v = 0$.
$u \circ v = 0$ donc $\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Ker}(u)$.
On note $n = \dim(E)$. $\mathrm{rg}(u+v) = n$ car $u + v$ est bijective.
Or, par 1, $\mathrm{Im}(u+v) \subset \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$ donc $\dim(\mathrm{Im}(u+v)) \leq \dim(\mathrm{Im}\, u) + \dim(\mathrm{Im}\, v)$.
Donc $n \leq \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v)$.
$\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Ker}(u)$. Donc $\mathrm{rg}(v) \leq \dim(\mathrm{Ker}\, u)$.
On en déduit que : $\mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v) \leq \mathrm{rg}(u) + \dim(\mathrm{Ker}\, u)$.

Par le théorème du rang, $\dim(E) = \dim(\operatorname{Ker} u) + \operatorname{rg}(u)$. Donc $\operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v) \leq n$.

Finalement, $\boxed{\operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v) = n}$. D'où $\operatorname{rg}(v) = n - \operatorname{rg}(u) = \dim(\operatorname{Ker} u)$.

On a : $\operatorname{Im}(v) \subset \operatorname{Ker}(u)$ et $\dim(\operatorname{Im} v) = \dim(\operatorname{Ker} u)$. Donc $\boxed{\operatorname{Im}(v) = \operatorname{Ker}(u)}$.

Exercice 12. Soit n et p des entiers tels que $0 < p \leq n$.
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ tels que $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^p}$.

Visualisons sous forme d'un diagramme :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & \mathbb{R}^p \arrow[r, "g"] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{R}^p \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f \circ g"'] & \mathbb{R}^n \arrow[r, "f"] & \mathbb{R}^p \end{tikzcd}$$

$f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^p}$ donc $f \circ g$ est bijective.

$$\left.\begin{array}{l} f \circ g \text{ est injective donc } g \text{ est injective.} \\ f \circ g \text{ est surjective donc } f \text{ est surjective} \end{array}\right\} \text{cf. exo 3 du TD10, à savoir refaire}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(g \circ f) &= \{g(f(x)) \,/\, x \in \mathbb{R}^n\} \\ &= \{g(y) \,/\, y \in \operatorname{Im}(f)\} \\ &= \{g(y) \,/\, y \in \mathbb{R}^p\} \qquad \text{car } f \text{ est surjective donc } \operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}^p \\ &= \operatorname{Im}(g) \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg}(g)}$.

De plus, $(g \circ f)^2 = (g \circ f) \circ (g \circ f) = g \circ (f \circ g) \circ f = g \circ f$ car $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^p}$.
Ainsi, $(g \circ f)^2 = g \circ f$. De plus, $g \circ f$ est linéaire comme composée d'applications linéaires.
Comme $g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $g \circ f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.
On en déduit que $\boxed{g \circ f \text{ est un projecteur de } \mathbb{R}^n}$.
Caractérisons cette projection : une projection projette toujours sur son image parallèlement à son noyau.
On a vu, $\operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im}(g)$.
De plus, soit $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} x \in \operatorname{Ker}(g \circ f) &\iff g \circ f(x) = 0 \\ &\iff g(f(x)) = 0 \\ &\iff f(x) \in \operatorname{Ker}(g) \\ &\iff f(x) = 0 \qquad \text{car } g \text{ est injective donc } \operatorname{Ker}(g) = \{0\} \\ &\iff x \in \operatorname{Ker}(f) \end{aligned}$$

Ainsi, $\operatorname{Ker}(g \circ f) = \operatorname{Ker}(f)$.
Finalement, $\boxed{g \circ f \text{ est la projection sur } \operatorname{Im}(g) \text{ parallèlement à } \operatorname{Ker}(f)}$.

Exercice 13. **1°)** Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.

On rappelle que : $\forall x > 0, \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

À savoir redémontrer : on étudie $f : x \mapsto \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

On pose $t = \dfrac{1}{x}$. $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

On note $\mathrm{d}t = -\dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

$\begin{cases} \text{Si } x = \dfrac{1}{a} \text{ alors } t = a \\ \text{Si } x = a \text{ alors } t = \dfrac{1}{a} \end{cases}.$

$$\begin{aligned}
I(a) &= \int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{\operatorname{Arctan}(x)}{x}\,\mathrm{d}x = -\int_{\frac{1}{a}}^{a} x\operatorname{Arctan}(x)\left(-\frac{1}{x^2}\right)\,\mathrm{d}x \\
&= -\int_{a}^{\frac{1}{a}} \frac{1}{t}\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right)\,\mathrm{d}t \qquad \text{par chnagement de variables} \\
&= \int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{1}{t}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} t\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\pi}{2}\left[\ln(|t|)\right]_{\frac{1}{a}}^{a} - I(a) \\
2I(a) &= \frac{\pi}{2}\left(\ln a - \ln\left(\frac{1}{a}\right)\right) = \pi \ln a \\
&\boxed{I(a) = \frac{\pi}{2}\ln a}
\end{aligned}$$

2°) $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan(x))\,\mathrm{d}x.$

On pose $t = \dfrac{\pi}{4} - x$. $x \mapsto \dfrac{\pi}{4} - x$ est de classe C^1 sur $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$.

On note $dt = -\,\mathrm{d}x$.

$\begin{cases} \text{Si } x = 0 \text{ alors } t = \dfrac{\pi}{4} \\ \text{Si } x = \dfrac{\pi}{4} \text{ alors } t = 0 \end{cases}.$

$$\begin{aligned}
I &= -\int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \ln\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4} - t\right)\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1 + \frac{1-\tan t}{1+\tan t}\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{2}{1+\tan t}\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\ln 2 - \ln\left(1+\tan t\right)\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\pi}{4}\ln 2 - I \\
2I &= \frac{\pi}{4} \\
&\boxed{I = \frac{\pi}{8}\ln 2}
\end{aligned}$$

$J = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$

On pose $x = \tan t$. $t \mapsto \tan(t)$ est de classe C^1 sur $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$.

On note $\mathrm{d}x = (1+\tan^2 t)\,\mathrm{d}t$.

$\begin{cases} \text{Si } t = 0 \text{ alors } x = 0 \\ \text{Si } t = \dfrac{\pi}{4} \text{ alors } x = 1 \end{cases}.$

$J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(1+\tan t)}{1+\tan^2 t}(1+\tan^2 t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan t)\,\mathrm{d}t$

Donc $J = I$ donc $\boxed{J = \dfrac{\pi}{8}\ln 2}$.

$K = \displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{Arctan} x}{1+x}\,\mathrm{d}x.$
Soit u et v les fonctions de classe C^1 sur $[0,1]$:

$$\forall x \in [0,1],\ u(x) = \operatorname{Arctan} x \qquad u'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$
$$v(x) = \ln(1+x) \qquad v'(x) = \frac{1}{1+x}$$

Par intégration par parties, $K = [\operatorname{Arctan} x \times \ln(1+x)]_0^1 - J = \frac{\pi}{4}\ln 2 - \frac{\pi}{8}\ln 2$

Donc, $\boxed{K = \frac{\pi}{8}\ln 2}$.

Exercice 14. *Vérifions d'abord que f est bien définie au voisinage de* 0.
La fonction $t \mapsto \ln(1+t)\ln(1-t)$ est définie et continue sur l'intervalle $]-1,1[$ donc admet au moins une primitive G.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(x) \text{ existe } &\iff (x,2x) \in]-1,1[^2 \\ &\iff x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[\end{aligned}$$

Donc f est définie sur $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$. Ainsi, f est bien définie au voisinage de 0.
De plus, pour tout $x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$, $f(x) = [G(t)]_x^{2x} = G(2x) - G(x)$.
f est donc dérivable sur $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$ comme différence et composée de fonctions dérivables et, pour tout $x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2G'(2x) - G'(x) \\ &= 2\ln(1+2x)\ln(1-2x) - \ln(1+x)\ln(1-x) \\ &\underset{x\to 0}{=} 2(2x + o(x))(-2x + o(x)) - (x + o(x))(-x + o(x)) \\ &\underset{x\to 0}{=} -8x^2 + x^2 + o(x^2) \\ &\underset{x\to 0}{=} -7x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

f' admet donc un $DL_2(0)$ donc, par primitivation, f admet un $DL_3(0)$: $f(x) \underset{x\to 0}{=} f(0) - \frac{7}{3}x^3 + o(x^3)$.
Or $f(0) = 0$ donc $\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} -\frac{7}{3}x^3 + o(x^3)}$.

Exercice 15. **1°)** On a : $\operatorname{Ker}(f) \subset \operatorname{Ker}(g \circ f)$ (car si $f(x) = 0$ alors $g(f(x)) = g(0)$ i.e. $g \circ f(x) = 0$).
Réciproquement, soit $x \in \operatorname{Ker}(g \circ f)$. Montrons que $x \in \operatorname{Ker} f$.
Alors $g \circ f(x) = 0$. Donc $f(g \circ f(x)) = 0$. Ce qui s'écrit $f \circ g \circ f(x) = 0$ soit encore $(f \circ g)(f(x)) = 0$.
Or $f \circ g = \mathrm{id}_E$ donc $f(x) = 0$ i.e. $x \in \operatorname{Ker} f$.
On a montré que $\operatorname{Ker}(g \circ f) \subset \operatorname{Ker} f$.
Finalement, $\boxed{\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(g \circ f)}$.

2°) On a nécessairement $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im}(g)$ (car si y s'écrit $g \circ f(x)$ où $x \in E$ donc $y = g(f(x))$ donc $y \in \operatorname{Im}(g)$).
De plus, $\operatorname{Ker}(g \circ f) = \operatorname{Ker} f$ donc $\dim(\operatorname{Ker}(g \circ f)) = \dim(\operatorname{Ker} f)$.
Par le théorème du rang,

$$\dim(E) = \dim(\operatorname{Ker} f) + \operatorname{rg}(f)$$
$$\dim(E) = \dim(\operatorname{Ker}(g \circ f)) + \operatorname{rg}(g \circ f)$$

Donc, $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(g \circ f)$.

On récapitule, $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$ et $\dim(\mathrm{Im}(g \circ f)) = \dim(\mathrm{Im}(g))$.

Donc, $\boxed{\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}(g)}$.

3°) $(g \circ f) \circ (g \circ f) = g \circ (f \circ g) \circ f = g \circ \mathrm{id}_E \circ f$ donc $(g \circ f)^2 = g \circ f$.

De plus, $g \circ f \in \mathcal{L}(E)$.

Donc, $g \circ f$ est un projecteur de E. Ainsi, $E = \mathrm{Ker}(g \circ f) \oplus \mathrm{Im}(g \circ f)$.

On en déduit par 1 et 2 $\boxed{E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(g)}$.

Niveau 3

Exercice 16. *C'est un exercice sur une suite définie implicitement. cf. TD Suites*

1°) On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & R \\ x & \mapsto & x^5 + nx - 1 \end{array}$.

f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n'(x) = 5x^4 + n > 0$.

f_n est continue, strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$ donc f_n réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x), \lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)[$ i.e. de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

$0 \in \mathbb{R}$ donc admet un unique antécédent u_n par f_n dans $\mathbb{R}$.

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists ! u_n \in \mathbb{R}, u_n^5 + nu_n - 1 = 0}$.

Remarque : Deux choses à bien se rappeler pour la suite (c'est la même chose dite sous une forme différente) :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n^5 + nu_n - 1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n(u_n) = 0$.

2°) Étudions la monotonie de (u_n). *En général, cela passe par l'étude du signe de $f_{n+1}(u_n)$.*

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} f_{n+1}(u_n) &= u_n^5 + (n+1)u_n - 1 \\ &= u_n^5 + nu_n - 1 + u_n \\ &= u_n \qquad \text{car } f_n(u_n) = 0 \end{aligned}$$

$f_n(0) = -1$ et $f_n(u_n) = 0$ donc $f_n(0) < f_n(u_n)$.

Comme f_n est (strictement) croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que : $0 < u_n$.

Ainsi, $f_{n+1}(u_n) > 0$. Or $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$ donc $f_{n+1}(u_{n+1}) < f_{n+1}(u_n)$.

Comme f_{n+1} est (strictement) croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit : $u_{n+1} < u_n$.

Donc la suite (u_n) est strictement décroissante.

De plus, (u_n) est minorée par 0 donc (u_n) converge vers un réel $\ell \geq 0$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n^5 + nu_n - 1 = 0$ donc $nu_n = 1 - u_n^5$ donc $u_n = \dfrac{1 - u_n^5}{n}$.

Comme $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$, on en déduit que $\boxed{(u_n) \text{ converge vers } 0}$.

3°) $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \dfrac{1 - u_n^5}{n}$.

Or $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $u_n = o(1)$.

Donc, $u_n = \dfrac{1 + o(1)}{n} = \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

On réinjecte :

$$\begin{aligned}
u_n &= \frac{1}{n}(1-u_n^5) \\
&= \frac{1}{n}\left(1-\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^5\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n^5}+o\left(\frac{1}{n^5}\right)\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{u_n = \frac{1}{n}-\frac{1}{n^6}+o\left(\frac{1}{n^6}\right)}$$

Exercice 17. On note $n=\dim(E)$. n est impair.
$u^3=-u$ donc $\det(u^3)=\det(-u)$.
Donc $(\det u)^3=(-1)^n\det u$ i.e. $(\det u)^3=-\det u$ puisque n est impair.
Donc $(\det u)^3+\det(u)=0$, ce qui s'écrit : $\det u((\det u)^2+1)=0$.
Donc, $\det u=0$ ou $(\det u)^2+1=0$.
Or $\det u\in\mathbb{R}$ puisque E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Donc $\det(u)^2+1>0$.
Ainsi, $\det u=0$.
On en déduit que : $\boxed{u \text{ n'est pas bijective}}$.

Exercice 18. Soit E un espace vectoriel de dimension n.

1°) Soit $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base de E.
On note $\mathcal{C}$ la famille $\mathcal{C}_i=(e_1+e_i,e_2,\dots,e_n)$ où $i\in\{2,\dots,n\}$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}_i)=\begin{pmatrix}1&0&0&\dots&\dots&0\\0&1&0&\dots&\dots&0\\\vdots&&\ddots&&&\vdots\\1&0&\dots&1&\dots&0\\\vdots&&&&\ddots&\vdots\\0&0&\dots&\dots&0&1\end{pmatrix}$$

Dans la 1ere colonne, il y a un 1 sur la $i$ème ligne.
$\det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}_i))=1$ car on reconnaît le déterminant d'une matrice triangulaire inférieure. Ainsi, $\det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}_i))\neq 0$.
Donc $\boxed{\mathcal{C}_i \text{ est une base de } E}$.

2°) *On raisonne par analyse/synthèse.*

★ *Analyse* : Soit $f\in\mathcal{L}(E)$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale pour toute base $\mathcal{B}$ de E.
Soit alors $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base de E.

Alors, $\exists\,(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in K^n,\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&\dots&0\\0&\lambda_2&&0\\\vdots&&\ddots&\vdots\\0&\dots&&\lambda_n\end{pmatrix}$.

Soit $i\in\{2,\dots,n\}$. On note $\mathcal{C}_i=(e_1+e_i,e_2,\dots,e_n)$. Alors $\mathcal{C}_i$ est une base de E.

Donc, $\exists\,(\mu_1,\dots,\mu_n)\in K^n,\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}_i}(f)=\begin{pmatrix}\mu_1&0&\dots&0\\0&\mu_2&&0\\\vdots&&\ddots&\vdots\\0&\dots&&\mu_n\end{pmatrix}$.

Ainsi, $f(e_1+e_i)=\mu_1(e_1+e_i)=\mu_1e_1+\mu_1e_i$.

On a aussi $f(e_1+e_i) = f(e_1)+f(e_i) = \lambda_1 e_1 + \lambda_i e_1$.
Donc, $\mu_1 e_1 + \mu_1 e_i = \lambda_1 e_1 + \lambda_i e_i$.
Comme (e_1, e_i) est libre, il vient : $\mu_1 = \lambda_1$ et $\mu_1 = \lambda_i$. Donc $\lambda_i = \lambda_1$.
Ainsi, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \lambda_1 I_n$. Donc $f = \lambda_1 \,\mathrm{id}_E$.

★ *Synthèse* : Réciproquement, s'il existe $\lambda \in K, f = \lambda \,\mathrm{id}_E$ alors la matrice de f est diagonale dans toute base de E.

Ainsi, $\boxed{\text{les endomorphismes solutions sont les homothéties de } E}$.

Exercice 19. On remarque que $x \mapsto xf'(x) + f(x)$ est la dérivée de $x \mapsto xf(x)$ d'où l'idée de définir la fonction

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & xf(x) - \dfrac{4}{3}x^3 \end{array}$$

φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+, \varphi'(x) = f(x) + xf'(x) - 4x^2$ donc $\varphi'(x) \geq 0$.
Donc, φ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc, pour tout $x \geq 0, \varphi(x) \geq \varphi(0)$ ie $\varphi(x) \geq 0$.
Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}_+, xf(x) \geq \dfrac{4}{3}x^3$. Si $x > 0$ on en déduit que $f(x) \geq \dfrac{4}{3}x^2$.
De plus, l'hypothèse de l'énoncé s'écrit pour $x = 0$: $f(0) \geq 0$.
Finalement, $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+, f(x) \geq \dfrac{4}{3}x^2}$.

Exercice 20. On note $C_1 = \begin{pmatrix} a \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} b \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix}, C_3 = \begin{pmatrix} b \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix}$.
On se rappelle que le déterminant d'une matrice est le déterminant de ses vecteurs colonnes.
De plus, l'application det est trilinéaire et s'annule lorsque 2 de ses variables sont égales donc
$D = \det(C_2+C_3, C_1+C_3, C_1+C_2) = \det(C_2, C_3, C_1) + \det(C_3, C_1, C_2)$
Puis $D = 2\det(C_1, C_2, C_3)$ par permutation circulaire (ce qui correspond à 2 échanges de colonnes).
Ainsi, $D = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ b^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = 2abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$ par trilinéarité.
Finalement, $\boxed{D = 2abcV(a,b,c) = 2abc(b-a)(c-a)(c-b)}$.

Exercice 21. *Vérifions d'abord que f est bien définie au voisinage de* 0.
La fonction $t \mapsto \ln(1+t)\ln(1-t)$ est définie et continue sur l'intervalle $]-1,1[$ donc admet au moins une primitive G.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(x) \text{ existe } &\iff (x, 2x) \in]-1,1[^2 \\ &\iff x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[\end{aligned}$$

Donc f est définie sur $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$. Ainsi, f est bien définie au voisinage de 0.
De plus, pour tout $x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[, f(x) = [G(t)]_x^{2x} = G(2x) - G(x)$.
f est donc dérivable sur $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$ comme différence et composée de fonctions dérivables et, pour tout $x \in$

$\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2G'(2x) - G'(x) \\ &= 2\ln(1+2x)\ln(1-2x) - \ln(1+x)\ln(1-x) \\ &\underset{x\to 0}{=} 2(2x+o(x))(-2x+o(x)) - (x+o(x))(-x+o(x)) \\ &\underset{x\to 0}{=} -8x^2 + x^2 + o(x^2) \\ &\underset{x\to 0}{=} -7x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

f' admet donc un $DL_2(0)$ donc, par primitivation, f admet un $DL_3(0)$: $f(x) \underset{x\to 0}{=} f(0) - \dfrac{7}{3}x^3 + o(x^3)$.

Or $f(0) = 0$ donc $\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} -\dfrac{7}{3}x^3 + o(x^3)}$.

Exercice 22. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1^2+2^2+\cdots+n^2}$.

Alors, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \underbrace{\frac{6}{n(n+1)(2n+1)}}_{u_n}$.

On pose : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = \dfrac{1}{x(x+1)(2x+1)}$. f est une fonction rationnelle.

Décomposons F en éléments simples. $\deg(f) < 0$ et tous les pôles sont réels et simples donc :

$$\exists!(a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \forall x > 0, f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{2x+1}$$

On multiplie par x puis on fait tendre x vers 0 : $a = 1$.
On multiplie par $x+1$ puis on fait tendre x vers -1 : $b = 1$.
On multiplie par $2x+1$ puis on fait tendre x vers $-\dfrac{1}{2}$: $c = -4$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_n = 6\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{4}{2n+1}\right)$. D'où $S_n = 6\left(H_n + H_{n+1} - 1 - 4\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1}\right)$.

$H_{2n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{\substack{1\leq k\leq 2n \\ k \text{ pair}}} \frac{1}{k} + \sum_{\substack{1\leq k\leq 2n \\ k \text{ impair}}} \frac{1}{k}$.

Cela s'écrit : $H_{2n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1}$. Soit encore $H_{2n} = \dfrac{H_n}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} + 1$.

D'où $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} = H_{2n} - \frac{H_n}{2} - 1$.

On injecte dans S_n et on utilise : $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$.

$$\begin{aligned} S_n &= 6\left(H_n + H_{n+1} - 1 - 4H_{2n} + 2H_n + 4\right) \\ &= 6\left(H_{n+1} + 3H_n - 4H_{2n} + 3\right) \\ &= 6\left(\ln(n+1) + \gamma + 3\ln n + 3\gamma - 4\ln(2n) - 4\gamma + 3 + o(1)\right) \\ &= 6\left(\ln(n+1) + 3\ln n - 4\ln 2 - 4\ln n + 3 + o(1)\right) \\ &= 6\left(\ln(n+1) - \ln n - 4\ln 2 + 3 + o(1)\right) \\ &= 6\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 4\ln 2 + 3 + o(1)\right) \end{aligned}$$

Ainsi, (S_n) converge vers $18 - 24\ln 2$ puisque $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

On en déduit que $\boxed{\text{la série } \sum \frac{1}{1^2+2^2+\cdots+n^2} \text{ converge}}$ et $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1^2+2^2+\cdots+n^2} = 18-24\ln 2}$.

Niveau 4

Exercice 23. **1°)** *Méthode 1 :*

Par la formule du binôme, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}\sqrt{3}^k+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}(-\sqrt{3})^k \\ &= \sum_{\substack{0\le k\le n\\ k \text{ est pair}}}\binom{n}{k}2^{n-k}\times 2\times\sqrt{3}^k = \sum_{\substack{0\le k\le n\\ k \text{ est pair}}}\binom{n}{k}2^{n-k+1}\times\sqrt{3}^k\end{aligned}$$

Or, pour tout $k \in \{0,\ldots,n\}$ tel que k est pair, $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}, 2^{n-k+1} \in \mathbb{N}, (\sqrt{3})^k \in \mathbb{N}$.

Donc, comme somme d'entiers naturel, $\boxed{(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n \in \mathbb{N}}$.

Méthode 2 :

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = (2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n = \alpha^n+\beta^n$ en notant $\alpha = 2+\sqrt{3}$ et $\beta = 2-\sqrt{3}$.

Alors (u_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique :

$$(r-\alpha)(r-\beta)=0 \iff r^2-(\alpha+\beta)r+\alpha\beta=0 \iff r^2-4r+1=0$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1}-u_n$.

De plus, $u_0 = 2$ et $u_1 = 4$.

Par récurrence double, on montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{Z}$. De plus, il est clair que (u_n) est à termes positifs. Donc, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{N}}$.

2°) On note : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{v_n = \sin(\pi(2+\sqrt{3})^n)}$.

On rappelle que l'on a noté $u_n = (2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n$.

Par la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{N}$.

$v_n = \sin(\pi u_n - \pi(2-\sqrt{3})^n)$ donc $|v_n| = |\sin(\pi u_n-\pi(2-\sqrt{3})^n)| = |\sin(\pi(2-\sqrt{3})^n)|$ puisque $u_n \in \mathbb{N}$.

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}, |\sin(x)| \le |x|$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}, 0 \le |v_n| \le \pi(2-\sqrt{3})^n \quad (2-\sqrt{3}>0)$.

$1<3<4$ donc $1<\sqrt{3}<2$ donc $0<2-\sqrt{3}<1$. Ainsi, la série géométrique $\sum(2-\sqrt{3})^n$ converge.

Par un théorème de comparaison sur les séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum|v_n|$ converge. Ce qui signifie que la série $\sum v_n$ converge absolument. Finalement, $\boxed{\text{la série } \sum v_n \text{ converge}}$.

Exercice 24. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$.

1°) Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
(z+1)^n = e^{i2an} &\iff \left(\frac{z+1}{e^{i2a}}\right)^n = 1\\
&\iff \exists k \in \{0,\dots,n-1\}, \frac{z+1}{e^{i2a}} = e^{i\frac{2k\pi}{n}}\\
&\iff \exists k \in \{0,\dots,n-1\}, z = e^{i2\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)} - 1\\
&\iff \exists k \in \{0,\dots,n-1\}, z = e^{i\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)}\left(e^{i\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)} - e^{-i\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)}\right)\\
&\iff \exists k \in \{0,\dots,n-1\}, z = \underbrace{2i\sin\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)e^{i\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)}}_{\text{noté } z_k}
\end{aligned}$$

De plus, pour k et k' entre 0 et $n-1$, si $z_k = z_{k'}$ alors en prenant la ligne 3 de l'équivalence, on en déduit que $e^{i2\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)} = e^{i2\left(a+\frac{k'\pi}{n}\right)}$. Donc $e^{i\frac{2k\pi}{n}} = e^{i\frac{2k'\pi}{n}}$ donc $k = k'$ puisque k et k' sont des entiers entre 0 et $n-1$ (on sait que les $e^{i\frac{2p\pi}{n}}$ pour $p \in \{0,\dots,n-1\}$ sont distincts 2 à 2).

Ainsi, $\boxed{\text{le polynôme } P \text{ admet } n \text{ racines distinctes : les } 2i\sin\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)e^{i\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)} \text{ pour } k \in \{0,\dots,n-1\}}$.

2°) $\deg(P) = n$, P admet n racines distinctes et P est unitaire donc toutes les racines sont de multiplicité 1 et on a : $P = \prod_{k=0}^{n-1}(X - z_k) = \prod_{k=0}^{n-1}\left(X - 2i\sin\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)e^{i\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)}\right)$.

$$\begin{aligned}
P(0) &= \prod_{k=0}^{n-1}\left(-2i\sin\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)e^{i\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)}\right)\\
&= (-1)^n 2^n p_n \prod_{k=0}^{n-1} ie^{i\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)}\\
&= (-1)^n 2^n p_n \prod_{k=0}^{n-1} e^{i\left(a+\frac{k\pi}{n}+\frac{\pi}{2}\right)}\\
&= (-1)^n 2^n p_n e^{i\sum_{k=0}^{n-1}\left(a+\frac{k\pi}{n}+\frac{\pi}{2}\right)}
\end{aligned}$$

On note $S_n = \sum_{k=0}^{n-1}\left(a+\frac{k\pi}{n}+\frac{\pi}{2}\right)$.

$S_n = na + \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} k = na + \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{n}\frac{n(n-1)}{2} = na + \frac{\pi}{2}(n-1+n) = na + n\pi - \frac{\pi}{2}$.

Ainsi, $e^{iS_n} = e^{ian}(-1)^n(-i)$.

D'où, $P(0) = (-1)^n 2^n p_n e^{ian}(-1)^n(-i) = -i2^n p_n e^{ian}$.

Or, on a aussi $P(0) = 1 - e^{i2an} = e^{ian}(e^{-ian} - e^{ian}) = -2i\sin(an)e^{ian}$.

Donc, $\boxed{p_n = \frac{\sin(an)}{2^{n-1}}}$.

Exercice 25. **1°)** On note $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2}\\ a_{2,1} & a_{2,2}\end{pmatrix}$. On suppose que $(*)$: $|a_{1,1}| > |a_{1,2}|$ et $|a_{2,2}| > |a_{2,1}|$.

$\det(A) = a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2}$.

Les 2 inégalités de $(*)$ sont à termes positifs donc on peut les multiplier membre à membre.

On obtient : $|a_{1,1}a_{2,2}| > |a_{1,2}a_{2,1}|$.

Si $\det(A)=0$ alors $a_{1,1}a_{2,2}=a_{1,2}a_{2,1}$ donc $|a_{1,1}a_{2,2}|=|a_{1,2}a_{2,1}|$: exclu.
Donc $\det(A)\neq 0$ i.e. $\boxed{A \text{ est inversible}}$.

2°) Soit $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ telle que $AX=0$.

a) En développant le produit matriciel AX, on obtient : $\forall i\in\{1,\dots,n\},\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}x_j=0$.

Soit $i\in\{1,\dots,n\}$. On isole $a_{i,i}x_i$: $a_{i,i}x_i=-\displaystyle\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}a_{i,j}x_j$.

Donc, par inégalité triangulaire, $|a_{i,i}||x_i|\leq \displaystyle\sum_{j\neq i}|a_{i,j}||x_j|$.

Or, pour tout $j\in\{1,\dots,n\}, |x_j|\leq M$ donc $\displaystyle\sum_{j\neq i}|a_{i,j}||x_j|\leq\sum_{j\neq i}|a_{i,j}|M$.

Ainsi, $\boxed{|a_{i,i}||x_i|\leq M\displaystyle\sum_{\substack{1\leq j\leq n\\ j\neq i}}|a_{i,j}|}$.

b) Par l'absurde, supposons $M\neq 0$. Donc $M>0$.
On sait que $\forall i\in\{1,\dots,n\},\ \displaystyle\sum_{\substack{1\leq j\leq n\\ j\neq i}}|a_{i,j}|<|a_{i,i}|$.

Donc, puisque $M>0$, pour tout $i\in\{1,\dots,n\}, M\displaystyle\sum_{\substack{1\leq j\leq n\\ j\neq i}}|a_{i,j}|<M|a_{i,i}|$.

Donc, par transitivité, en utilisant 2a, $|a_{i,i}||x_i|<M|a_{i,i}|$. Ceci pour tout $i\in\{1,\dots,n\}$.
$M=\max\{|x_i|/1\leq i\leq n\}$ donc $\exists i_0\in\{1,\dots,n\}, M=|x_{i_0}|$.
D'où, pour $i=i_0$, $|a_{i_0,i_0}||x_{i_0}|<|x_{i_0}||a_{i_0,i_0}|$.
Comme $|x_{i_0}|>0$, on en déduit : $|a_{i_0,i_0}|<|a_{i_0,i_0}|$: exclu.
Donc $M=0$. Ainsi, pour tout $i\in\{1,\dots,n\}, x_i=0$ i.e. $X=0$.
On a montré : $\forall X\in\mathcal{M}_{n,1}(K),\ AX=0\implies X=0$.
On en déduit que $\boxed{A \text{ est inversible}}$.

Exercice 26. Soit $n\in\mathbb{N}$.
Méthode 1 :

$$\begin{aligned}
f(x)&=\ln\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right)\\
&\underset{x\to0}{=}\ln\left(e^x-\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+o(x^{n+1})\right) \qquad \text{car } e^x\underset{x\to0}{=}\sum_{k=0}^{n+1}\frac{x^k}{k!}+o(x^{n+1})\\
&\underset{x\to0}{=}\ln\left(e^x\left(1-e^{-x}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+o\left(e^{-x}x^{n+1}\right)\right)\right)\\
&\underset{x\to0}{=}x+\ln\left(1-(1+o(1))\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+o(x^{n+1})\right) \qquad \text{car } e^{-x}\underset{x\to0}{\sim}1\\
&\underset{x\to0}{=}x+\ln\left(1-\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+o(x^{n+1})\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{f(x)\underset{x\to0}{=}x-\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+o(x^{n+1})} \text{ car } \begin{cases}-\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}+o(x^{n+1})\underset{x\to0}{\longrightarrow}0\\ \ln(1+X)\underset{X\to0}{=}X+o(X)\end{cases}$$

Méthode 2 : On dérive

Comme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$, f est définie sur un voisinage D de 0 et est dérivable sur D.

$\forall x \in D$,

$$f'(x) = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\frac{x^{k-1}}{k!}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}} = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}} = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{k}}{k!}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}} = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k}}{k!} - \frac{x^n}{n!}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}}$$
$$= 1 - \frac{x^n}{n!}\underbrace{\frac{1}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}}}_{g(x)}$$

$g(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ donc $\dfrac{1}{g(x)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ donc $g(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + o(1)$ donc

$f'(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \dfrac{x^n}{n!}(1+o(1)) = 1 - \dfrac{x^n}{n!} + o(x^n)$.

Par primitivation, $f(x) \underset{x\to 0}{=} f(0) + x - \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)n!} + o(x^{n+1})$.

Ainsi, $\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} + o(x^{n+1})}$

Exercice 27. f est continue sur l'intervalle $[a,b]$ donc $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

De même, $G : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)^3\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f^3 qui s'annule en a.

On pose, pour tout $x \in [a,b], \varphi(x) = \left(\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 - \displaystyle\int_a^x f(t)^3\,\mathrm{d}t$. $\forall x \in [a,b], \varphi(x) = F(x)^2 - G(x)$.

φ est dérivable sur $[a,b]$ comme produit et différence de fonction dérivables sur $[a,b]$ et, pour tout $x \in [a,b]$,

$$\varphi'(x) = 2F'(x)F(x) - G'(x) = 2f(x)F(x) - f(x)^3$$
$$= f(x)\left(\underbrace{2\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t - f(x)^2}_{\psi(x)}\right)$$

$\psi : x \mapsto 2F(x) - f(x)^2$ est dérivable sur $[a,b]$ et, pour tout $x \in [a,b]$,

$$\psi'(x) = 2F'(x) - 2f(x)f'(x)$$
$$= 2f(x) - 2f(x)f'(x)$$
$$= 2f(x)(1 - f'(x))$$

$\forall x \in [a,b], 0 \leq f'(x)$. Donc f est croissante sur $[a,b]$ donc, pour tout $x \in [a,b], f(x) \geq f(a)$ i.e. $f(x) \geq 0$.

On a aussi $f'(x) \leq 1$ donc $\psi'(x) \geq 0$.

Ainsi, ψ est croissante sur $[a,b]$ et $\psi(a) = 0$ donc, pour tout $x \in [a,b], \psi(x) \geq 0$.

On rappelle aussi que $f(x) \geq 0$.

Finalement, pour tout $x \in [a,b], \varphi'(x) \geq 0$.

φ est croissante sur $[a,b]$ et $\varphi(a) = 0$ donc, pour tout $x \in [a,b], \varphi(x) \geq 0$.

En particulier, $\varphi(b) \geq 0$, ce qui s'écrit : $\boxed{\int_a^b f(t)^3 \,\mathrm{d}t \leq \left(\int_a^b f(t)\right)^2}$.

Exercice 28.

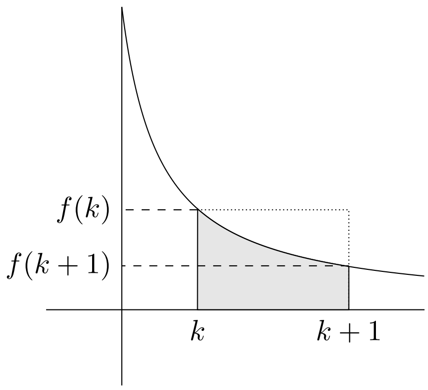
Point méthode :

On remarque que $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ se primitive en $x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln^2 x$. D'où l'idée d'une comparaison série / intégrale (déjà vue en TD sur les séries et sur l'intégration).

On explique à nouveau l'idée.

Supposons que f est décroissante, positive, sur $[n_0, +\infty[$ où $n_0 \in \mathbb{N}$ et que l'exercice utilise la série $\sum f(k)$.

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq n_0$. *Faisons un schéma pour visualiser.*



L'aire sous la courbe de f sur le segment $[k, k+1]$ est comprise entre l'aire du rectangle de hauteur $f(k+1)$ et de base $[k, k+1]$ et l'aire du rectangle de hauteur $f(k)$ et de base $[k, k+1]$.

`Démonstration` : $\forall t \in [k, k+1],\ f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$.

Donc, par croissance de l'intégrale, $\displaystyle\int_k^{k+1} f(k+1)\,\mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} f(k)\,\mathrm{d}t$

Soit encore, $f(k+1) \leq \displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(k)$.

Remarque : Il faut être capable de retrouver cette inégalité très rapidement grâce au schéma.

★ ★

Retour à l'exercice :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} - \frac{1}{2}\ln^2 n$.

★ Tout d'abord, voyons si la fonction $f : t \mapsto \dfrac{\ln t}{t}$ est décroissante. Ce qui permettra d'en déduire des inégalités qui nous serviront ensuite.

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $t > 0, f'(t) = \dfrac{1 - \ln t}{t}$ donc $f'(t) \leq 0$ pour $t \geq e$.

Ainsi, f est décroissante sur $[3, +\infty[$.

Pour tout k entier ≥ 3, $f(k+1) \leq \displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(k)$.

Ce qui s'écrit : $\boxed{\dfrac{\ln(k+1)}{k+1} \leq \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t \leq \frac{\ln k}{k}}$.

Ce qui s'écrit, en calculant l'intégrale : $\boxed{(*) : \quad \dfrac{\ln(k+1)}{k+1} \leq \dfrac{1}{2}(\ln^2(k+1) - \ln^2 k) \leq \dfrac{\ln k}{k}}$.

★ Étudions la monotonie de la suite (u_n).

$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = \dfrac{\ln(n+1)}{n+1} - \dfrac{1}{2}\ln^2(n+1) + \dfrac{1}{2}\ln^2 n$.

On en déduit par $(*)$ (en prenant $k = n$ dans l'inégalité de gauche) que $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

Donc la suite (u_n) est décroissante.

$\bigstar$ Il suffit alors de minorer (u_n).

Pour ça, intéressons-nous à la suite (S_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} = \sum_{k=2}^{n} \frac{\ln k}{k}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 4$. On reprend $(*)$ (inégalité de droite). On somme pour $k = 3$ à $k = n$.

Alors, $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{2}(\ln^2(k+1) - \ln^2 k) \leq \sum_{k=3}^{n} \frac{\ln k}{k}$.

Par téléscopage, $\dfrac{1}{2}(\ln^2(n+1) - \ln^2 3) \leq S_n - \dfrac{\ln 2}{2}$.

Donc $S_n - \dfrac{1}{2}\ln^2 n \geq \dfrac{1}{2}\ln^2(n+1) - \dfrac{1}{2}\ln^2 n + \dfrac{\ln 2}{2} - \dfrac{1}{2}\ln^2 3$.

Ainsi, puisque ln est croissante, $u_n \geq \dfrac{\ln 2}{2} - \dfrac{1}{2}\ln^2 3$.

Donc (u_n) est minorée.

On a montré que la suite (u_n) est décroissante et minorée donc $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge}}$.

Exercice 29. Pour $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 (1-t)^p t^q \, \mathrm{d}t$.

On a bien sûr envie d'essayer une intégration par parties.

Décalons l'un des indices : $I_{p+1,q} = \displaystyle\int_0^1 (1-t)^{p+1} t^q \, \mathrm{d}t$.

Soit u et v les fonctions de classe C^1 sur $[0,1]$:

$$\forall t \in [0,1], \quad u(t) = (1-t)^{p+1} \qquad u'(t) = -(p+1)(1-t)^p$$
$$v(t) = \frac{t^{q+1}}{q+1} \qquad v'(t) = t^q$$

Par intégration par parties, $I_{p+1,q} = \left[\dfrac{(1-t)^{p+1}t^{q+1}}{q+1}\right]_0^1 + \dfrac{p+1}{q+1}\displaystyle\int_0^1 (1-t)^p t^{q+1} \, \mathrm{d}t$. Donc, $I_{p+1,q} = \dfrac{p+1}{q+1} I_{p,q+1}$.

La difficulté réside surtout dans la présence des 2 indices. En particulier, dans la formule obtenue, ils ne varient pas dans le même sens.

Tentons de conjecturer une formule. Comme c'est assez complexe (2 indices), on rédigera ensuite complètement la récurrence.

Recherche au brouillon :

$$\begin{aligned}
I_{p,q} &= \frac{p}{q+1} I_{p-1,q+1} \\
&= \frac{p}{q+1}\frac{p-1}{q+2} I_{p-2,q+2} \\
&= \frac{p}{q+1}\frac{p-1}{q+2}\frac{p-2}{q+3} I_{p-3,q+3} \\
&= \dots \\
&= \frac{p}{q+1}\frac{p-1}{q+2}\frac{p-2}{q+3}\cdots\frac{1}{q+p} I_{0,q+p} \\
&= \frac{p!q!}{(q+p)!} I_{0,p+q}
\end{aligned}$$

Or $I_{0,p+q} = \displaystyle\int_0^1 t^{p+q} \, \mathrm{d}t = \left[\frac{t^{p+q+1}}{p+q+1}\right]_0^1 = \frac{1}{p+q+1}$.

Démontrons par récurrence que : $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, I_{p,q} = \dfrac{p!q!}{(p+q+1)!}$.

Attention, on ne peut faire de récurrence que sur un seul indice.

On pose, pour $p \in \mathbb{N}, H_p$: $\boxed{\forall q \in \mathbb{N}}, I_{p,q} = \dfrac{p!q!}{(p+q+1)!}$.

— Pour $p=0$: $\forall q\in\mathbb{N}, I_{0,q}=\dfrac{1}{q+1}$ donc $I_{0,q}=\dfrac{p!q!}{(q+1)!}$.
Ainsi, H_0 est vraie.

— Soit $p\in\mathbb{N}$ fixé. On suppose que H_p est vraie donc, $\boxed{\text{pour tout } q\in\mathbb{N}}$, $I_{p,q}=\dfrac{p!q!}{(p+q+1)!}$.
$\forall q\in\mathbb{N}, I_{p+1,q}=\dfrac{p+1}{q+1}I_{p,q+1}=\dfrac{p+1}{q+1}\dfrac{p!(q+1)!}{(p+q+1)!}$ en utilisant H_p avec l'entier $q+1$ (*c'est pour ça que le « $\forall q$ » doit être à l'intérieur de* H_p).
Ainsi, $I_{p+1,q}=\dfrac{(p+1)!q!}{((p+1)+q)!}$. Ainsi, H_{p+1} est vraie.

— On a montré par récurrence que :

$$\boxed{\forall (p,q)\in\mathbb{N}^2, I_{p,q}=\frac{p!q!}{(p+q+1)!}}$$

Exercice 30. Soit E un K-ev de dimension finie $n\geq 2$. Soit u un endomorphisme de E de rang $n-1$.

1°) Considérons $f=u|_{\mathrm{Im}(u^k)}$ i.e. la restriction de f au sev $\mathrm{Im}(u^k)$: $f:\begin{array}{ccc}\mathrm{Im}(u^k) & \to & E\\ x & \mapsto & u(x)\end{array}$.

On applique le théorème du rang à f : $\dim(\mathrm{Im}(u^k))=\dim(\mathrm{Ker}\, f)+\mathrm{rg}(f)$.
Donc $\mathrm{rg}(u^k)=\dim(\mathrm{Ker}(f))+\mathrm{rg}(f)$.
Or $\mathrm{Ker}(f)=\{x\in\mathrm{Im}(u^k)\,/\,u(x)=0\}=\mathrm{Im}(u^k)\cap\mathrm{Ker}(u)$. Donc $\dim(\mathrm{Ker}(f))\leq\dim(\mathrm{Ker}\, u)$.
u est de rang $n-1$ donc, par le théorème du rang appliqué à u : $\dim(\mathrm{Ker}(u))=1$.
Ainsi, $\dim(\mathrm{Ker}(f))\leq 1$.
D'autre part, $\mathrm{Im}(f)=\{f(x)\,/\,x\in\mathrm{Im}(u^k)\}=\{u(x)\,/\,x\in\mathrm{Im}(u^k)\}=\mathrm{Im}(u^{k+1})$.
Donc, $\mathrm{rg}(f)=\mathrm{rg}(u^{k+1})$.
Ainsi, $\mathrm{rg}(u^k)\leq\mathrm{rg}(u^{k+1)}+1$.
En appliquant le théorème du rang à u^k et u^{k+1} :

$$\begin{aligned} n&=\dim(\mathrm{Ker}(u^k))+\mathrm{rg}(u^k)\\ n&=\dim(\mathrm{Ker}(u^{k+1}))+\mathrm{rg}(u^{k+1})\end{aligned}$$

Donc, $n-\dim(\mathrm{Ker}(u^k))\leq n-\dim(\mathrm{Ker}(u^{k+1})$ soit encore $\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(u^{k+1}))\leq\dim(\mathrm{Ker}(u^k))+1}$.

2°) On suppose que $u^n=0$.
On pose, pour tout $k\in\{0,\dots,n\}, \alpha_k=\dim(\mathrm{Ker}(u^k))$.
$\alpha_0=\dim(\mathrm{Ker}(u^0))=\dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{id}_E))=0$ et $\alpha_n=\dim(\mathrm{Ker}(u^n))=\dim(E)=n$.
De plus, pour tout $k\in\mathbb{N}, \alpha_{k+1}\leq\alpha_k+1$ ce qui peut s'écrire : $\alpha_{k+1}-\alpha_k\leq 1$.
Par l'absurde, supposons : $\exists k_0\in\{0,\dots,n-1\}, \alpha_{k_0+1}-\alpha_{k_0}<1$.
En sommant de $k=0$ à $k=n-1$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(\alpha_{k+1}-\alpha_k)<n$ (*on somme* $n-1$ *inégalités larges et une inégalité stricte : on garde le strict*).
Par téléscopage : $\alpha_n-\alpha_0<n$ i.e. $n<n$: exclu.
Donc, pour tout $k\in\{0,\dots,n-1\}, \alpha_{k+1}=\alpha_k+1$. La suite (α_k) est arithmétique de raison 1 et $\alpha_0=0$ donc, pour tout $k\in\{0,\dots,n\}, \alpha_k=k$.
Ainsi, $\boxed{\forall k\in\{0,\dots,n\}, \dim(\mathrm{Ker}(u^k))=k}$.

Exercice 31. **1°)** G est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme différence et produit de fonctions dérivables. Pour tout

$x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
G'(x) &= F''(x)\sin x + F'(x)\cos x - F'(x)\cos x + F(x)\sin x \\
G'(x) &= (F''(x) + F(x))\sin x \\
F''(x) &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k P^{(2k+2)}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k P^{(2k+2)}(x) \qquad \text{car } P \text{ est de degré } 2n \text{ donc } P^{(2n+2)}(x) = 0 \\
\text{ainsi} \quad F''(x) + F(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k P^{(2k+2)}(x) + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k P^{(2k)}(x) \\
&= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} P^{(2j)}(x) + \sum_{j=0}^{n} (-1)^j P^{(2j)}(x) \text{ en posant } j = k+1 \text{ dans la 1ere somme} \\
&= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} (P^{(2j)}(x) - P^{(2j)}(x)) + P^{(0)}(x) \\
F''(x) + F(x) &= P(x) \\
&\boxed{G'(x) = P(x)\sin x}
\end{aligned}$$

2°)

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi P(x)\sin x \,\mathrm{d}x &= \int_0^\pi G'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= G(\pi) - G(0) \\
&= F'(\pi)\sin\pi - F(\pi)\cos\pi - F'(0)\sin 0 + F(0)\cos 0
\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^\pi P(x)\sin x \,\mathrm{d}x = F(0) + F(\pi)}$$

3°) $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = \dfrac{x^n(a-bx)^n}{n!}$. Donc 0 est racine d'ordre n de P.

Ainsi, $\boxed{\text{pour } k \in \{0, \ldots, n-1\},\ P^{(k)}(0) = 0}$

4°) $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
P(x) &= \frac{x^n}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}(-bx)^k \qquad \text{par la formule du binôme} \\
&= \frac{x^n}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-b)^k a^{n-k} x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!} \binom{n}{k} (-b)^k a^{n-k} x^{n+k}
\end{aligned}$$

On a obtenu l'écriture développée du polynôme P.

$\boxed{\text{Le coefficient de } x^{n+k} \text{ dans } P \text{ est } \dfrac{1}{n!}\dbinom{n}{k}(-b)^k a^{n-k}}$.

5°) Par la formule de Taylor, puisque $\deg(P) = 2n$: $P = \displaystyle\sum_{j=0}^{2n} \frac{P^{(j)}(0)}{j!} x^j$.

Ainsi, le coefficient de x^{n+k} dans P est $\dfrac{P^{(n+k)}(0)}{(n+k)!}$.

Par unicité des coefficients de P, on en déduit que : $\dfrac{P^{(n+k)}(0)}{(n+k)!} = \dfrac{1}{n!}\dbinom{n}{k}(-b)^k a^{n-k}$.

Donc, $\boxed{P^{(n+k)}(0) = \dfrac{(n+k)!}{n!}\dbinom{n}{k}(-b)^k a^{n-k}}$.

$n+k \geq n$ donc $\dfrac{(n+k)!}{n!} \in \mathbb{N}$. $\dbinom{n}{k} \in \mathbb{N}$. Comme a et b sont dans $\mathbb{N}$ et k et $n-k$ sont des entiers naturels, il vient : $\boxed{P^{(n+k)}(0) \in \mathbb{Z}}$.

6°) $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
P(\pi - x) &= P\left(\frac{a}{b} - x\right) \\
&= \frac{1}{n!}\left(\frac{a}{b} - x\right)^n \left(a - b\left(\frac{a}{b} - x\right)\right)^n \\
&= \frac{1}{n!}\frac{(a-bx)^n}{b^n}(bx)^n \\
&\boxed{P(\pi - x) = P(x)}
\end{aligned}$$

7°) $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \displaystyle\int_0^\pi P(x)\sin x \,\mathrm{d}x = F(0) + F(\pi)$ par 2.

$F(0) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P^{(2k)}(0)$.

Or par 4 et 5, pour tout $j \in \{0, \dots, 2n\}, P^{(j)}(0) \in \mathbb{Z}$. Donc $F(0) \in \mathbb{Z}$.

$F(\pi) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P^{(2k)}(\pi)$.

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}, P(\pi - x) = P(x)$. Donc, en dérivant, pour tout $x \in \mathbb{R}, -P'(\pi - x) = P'(x)$.

Puis en redérivant, pour tout $x \in \mathbb{R}, P''(\pi - x) = P''(x)$.

Par récurrence élémentaire, on prouve $\forall j \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, P^{(j)}(\pi - x) = (-1)^j P^{(j)}(x)$.

En particulier, pour tout $j \in \mathbb{N}, P^{(j)}(\pi) = (-1)^j P^{(j)}(0)$ donc $P^{(j)}(\pi) \in \mathbb{Z}$. D'où, $F(\pi) \in \mathbb{Z}$.

Finalement, comme somme d'entiers, $F(0) + F(\pi) \in \mathbb{Z}$. Donc $I_n \in \mathbb{Z}$.

On note $\varphi \mapsto \dfrac{x^n(a-bx)^n}{n!}\sin x$.

Si $x \in [0, \pi]$ alors $0 \leq x \leq \dfrac{a}{b}$ donc $bx \leq a$ puisque $b > 0$. Donc $(a - bx)^n \geq 0$.

On a aussi $x^n \geq 0$ et $\sin x \geq 0$. Donc φ est positive sur $[a, b]$.

φ est une fonction continue, positive sur $[0, \pi]$, non identiquement nulle donc $\displaystyle\int_0^\pi \varphi(x)\,\mathrm{d}x > 0$.

Ainsi, $I_n > 0$.

Finalement, $\boxed{I_n \in \mathbb{N}^*}$.

8°) $\forall x \in [0, \pi]$,

$0 \leq x^n \leq \pi^n$ et $0 \leq a - bx \leq a$. Donc $0 \leq (a - bx)^n \leq a^n$.

D'autre part, $0 \leq \sin x \leq 1$.

Ainsi, $0 \leq \dfrac{x^n(a-bx)^n}{n!}\sin x \leq \dfrac{(a\pi)^n}{n!}$.

Par croissance de l'intégrale, $0 \leq \displaystyle\int_0^\pi \frac{x^n(a-bx)^n}{n!}\,\mathrm{d}x \leq \frac{(a\pi)^n}{n!}\pi$ i.e. $0 \leq I_n \leq \dfrac{(a\pi)^n}{n!}\pi$.

Or, on sait que pour tout $t \in \mathbb{R}, t^n = o(n!)$. Donc $\dfrac{(a\pi)^n}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Par le théorème d'encadrement, on en déduit que $\boxed{\text{la suite } (I_n) \text{ converge vers } 0.}$

9°) La suite (I_n) converge vers 0 donc, en choisissant $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ dans la définition de la limite :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, I_n \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

Or $I_n \in \mathbb{N}^*$ donc $I_n \geq 1$. On arrive à une contradiction.
On en déduit (enfin) que $\boxed{\pi \notin \mathbb{Q}}$.

Trois énigmes

Énigme 1
Il est impossible que le premier martien ait dit « je suis un tuku ». En effet, s'il est un tuku, alors il doit mentir, et donc se dire taka ; et si c'est un taka, il doit dire la vérité. Donc le second martien ment. Le troisième martien dit donc la vérité : c'est un taka.

Énigme 2
Notons S cette somme.

$$\begin{aligned} 2024^2 - 2023^2 &= (2024-2023)(2024+2023) = 2024 + 2023 \\ 2022^2 - 2021^2 &= (2022-2021)(2022+2021) = 2022 + 2021 \\ &\dots \\ 2^2 - 1^2 &= (2-1)(2+1) = 2+1 \end{aligned}$$

On somme : $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{2024} k = \frac{2024 \times 2025}{2} = 2049300$.

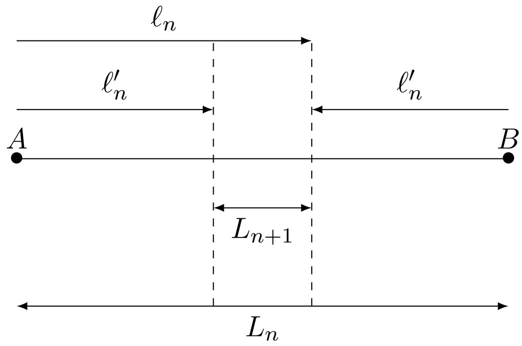
Énigme 3

Version longue

Chaque fois que la mouche se trouve sur la roue d'une bicyclette détermine un instant n.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\begin{cases} L_n \text{ la distance entre les 2 bicyclettes à l'instant } n \\ \ell_n \text{ la distance couverte pas la mouche de l'instant } n \text{ à l'instant } n+1 \\ \ell'_n \text{ la distance couverte pas une bicyclette de l'instant } n \text{ à l'instant } n+1 \end{cases}$.

Instant $n = 1$ i.e. instant initial : $L_1 = 20$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Examinons le passage de l'instant n à l'instant $n+1$.
On note A et B les positions des deux bicyclettes à l'instant n.
Supposons que la mouche est au point A.
Faisons un schéma :



On note S la distance couverte par la mouche.
S correspond à la somme de la série (convergente bien sûr) $\sum_{n\geq 1} \ell_n$.

- $\ell_n = \dfrac{3}{2}\ell'_n$ donc $\ell'_n = \dfrac{2}{3}\ell_n$
- $L_n = \ell_n + \ell'_n = \ell_n + \dfrac{2}{3}\ell_n$ donc $L_n = \dfrac{5}{3}\ell_n$
- $L_{n+1} = \ell_n - \ell'_n = \ell_n\left(1 - \dfrac{2}{3}\right)$ donc $L_{n+1} = \dfrac{\ell_n}{3}$

Le 2e point appliqué au rang $n+1$ donne : $L_{n+1} = \dfrac{5}{3}\ell_{n+1}$.
Donc, avec le 3e point, on obtient : $\dfrac{5}{3}\ell_{n+1} = \dfrac{\ell_n}{3}$. Ainsi, $\ell_{n+1} = \dfrac{1}{5}\ell_n$.
$S = \ell_1 + \ell_2 + \cdots = \ell_1\left(1 + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{5^2} + \dots\right) = \ell_1 \dfrac{1}{1-\frac{1}{5}} = \dfrac{5}{4}\ell_1$.
Or $\ell_1 = \dfrac{3}{5}L_1 = \dfrac{3}{5} \times 20 = 12$.
Finalement, $S = 15$.

Version courte

Les bicyclettes sont à 20 km de distance au début et roulent à 10 km par heure donc mettent une heure pour se rejoindre. Pendant cette heure, la mouche vole sur 15 km.

Une anecdote sur John Von Neumann

Von Neumann était au dire de tous ceux qui l'ont connu l'un des esprits les plus brillants du vingtième siècle. Il avait en particulier une mémoire et une rapidité très impressionnante. Paul Halmos, mathématicien a dit de lui : « Nous pouvons tous penser clairement, plus ou moins, pendant un certain temps ; mais la clarté de Von Neumann était, en permanence, de plusieurs ordres de grandeur supérieure à celle de la plupart d'entre nous ».
L'énigme des 2 bicyclettes fut posée à Von Neumann lors d'un dîner. Il la résolut en un instant, décevant celui qui la lui avait posée. « Oh, vous connaissiez déjà l'astuce ! » « Quelle astuce ? » demanda Von Neumann : « tout ce que j'ai fait, c'est de sommer la somme infinie ».