PROGRAMMES 1 et 2.

PROGRAMME 1 : du 16/09 au 20/09

Méthodes de base en analyse

- ★ Fonction carré et racine carrée. Équivalences pour a, b réels positifs : $a = b \iff a^2 = b^2$, $a < b \iff a^2 < b^2$, $a \leq b \iff a^2 \leq b^2$. Idem avec la fonction racine.
- ★ Valeur absolue d'un réel. Inégalité triangulaire. Interprétation sur la droite réelle de $|x| = r$, $|x| \leq r, |x| \geq r$ où $r \in \mathbb{R}_+$ et $x \in \mathbb{R}$.
- ★ Généralités sur les fonctions : Ensemble de définition. Représentation graphique d'une fonction f à valeurs réelles. Parité, imparité, périodicité. Interprétation géométrique de ces propriétés. Asymptotes horizontales, verticales. Définition des asymptotes obliques (*à ce stade, seulement sur des exemples simples, pas de méthode spécifique d'étude*). Opérations sur les fonctions (somme, multiplication par un réel, produit, composée).
- ★ Fonctions particulières : Fonctions polynomiales (exemples de factorisation d'un polynôme de degré 3). Fonctions affines.
- ★ Continuité, dérivation : Définitions. Équation de la tangente en un point. Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient, d'une composée.
- ★ Monotonie d'une fonction (large, stricte) : définition. Cas d'une fonction dérivable.
  Si $f : I \to \mathbb{R}$ est strictement croissante et x et y sont dans I alors $x = y \iff f(x) = f(y)$, $x < y \iff f(x) < f(y)$, $x \leq y \iff f(x) \leq f(y)$.
- ★ Étude de la fonction logarithme népérien, de la fonction exponentielle.

Remarque aux colleurs : Les fonctions puissances $x \mapsto x^\alpha$ avec un réel quelconque α ne sont pas au programme 1.

Un énoncé au choix à demander

Lorsque l'on énonce un résultat, bien définir tout ce dont on a besoin.

- ❒ Définition de la valeur absolue
- ❒ Traduire pour $x \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}_+$, $|x| = r, |x| \leq r, |x| \geq r$
- ❒ Inégalité triangulaire
- ❒ Définition de la continuité en un point et de la dérivabilité en un point
- ❒ Équation de la tangente en un point où f est dérivable
- ❒ Définition de la monotonie (large ou stricte)
- ❒ Propriétés algébriques des fonctions ln et exp

Démonstrations

- ❒ Résoudre l'inéquation $\sqrt{x^2 - 3x + 2} \leq x + 1$.
- ❒ Soit $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$. Donner le domaine de définition de f.
  Montrer que f est dérivable (au moins) sur $]-1, 1[$ et calculer f' sur ce domaine.
- ❒ Pour tous réels strictement positifs a et b, $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ (*sachant que* ln *est dérivable et connaissant sa dérivée*).

PROGRAMME 2 : du 26/09 au 29/09

Reprise des méthodes de base en analyse et fin du chapitre

- ★ Étude des fonctions puissances. Dérivée, variations et graphe. Les fonctions puissances sont définies sur $\mathbb{R}_+^*$ et prolongées en 0 le cas échéant. Seules les fonctions puissances entières sont en outre définies sur $\mathbb{R}_-^*$.
  Relations $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$, $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$, $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$, $\left(\dfrac{x}{y}\right)^\alpha = \dfrac{x^\alpha}{y^\alpha}, x^{\alpha-\beta} = \dfrac{x^\alpha}{x^\beta}$.
  Fonction logarithme décimal. Notation log ou $\log_{10}$.
  Croissances comparées des fonctions logarithme, puissances et exponentielle.
  Limites usuelles $\dfrac{\ln x}{x-1} \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 1, \dfrac{\ln(1+x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1, \dfrac{e^x-1}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$.
- ★ Bijectivité, réciproque d'une bijection. Graphe d'une réciproque. Théorème de la bijection.
- ★ Racines $n^{\text{èmes}}$.
- ★ Inégalités dans $\mathbb{R}$: opérations sur les inégalités. Différentes méthodes pour prouver des inégalités. Les inégalités suivantes sont à connaître : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1+x$, $\forall x > 0, \ln x \leq x-1$ ce qui s'écrit aussi : $\forall x > -1, \ln(1+x) \leq x$.
- ★ Parties majorées, minorées, bornées. Notion de minimum, maximum. Extension aux fonctions
- ★ Fonctions sinus, cosinus, tangente. Dérivée, variations, graphes. Cercle trigonométrique.
  Formules à connaître par coeur : $\cos(a\pm b)$, $\sin(a\pm b)$, $\cos(2a)$, $\sin(2a)$, $\tan(a\pm b)$. Formules à savoir retrouver : $\cos(a)\cos(b)$, $\sin(a)\sin(b)$, $\sin(a)\cos(b)$, $\cos p \pm \cos q$, $\sin p \pm \sin q$.
  Les étudiants doivent savoir retrouver des formules du type $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ et résoudre des équations et inéquations trigonométriques simples en s'aidant du cercle trigonométrique.
  Limites classiques : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}, \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x}, \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x}$.
  Inégalité classique : $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| \leq |x|$.

Un énoncé au choix à demander

Lorsque l'on énonce un résultat, bien définir tout ce dont on a besoin.

- ❒ Définition de la valeur absolue
- ❒ Traduire pour $x \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}_+$, $|x| = r, |x| \leq r, |x| \geq r$
- ❒ Définition de la continuité en un point et de la dérivabilité en un point
- ❒ Limites usuelles issues des taux d'accroissement des fonctions $\exp, \sin, \cos, \tan$ en 0 et $\ln$ en 1
- ❒ Définition de la monotonie (large ou stricte)
- ❒ Définition de la bijectivité d'une application
- ❒ Définition de x^α et propriétés classiques
- ❒ Croissances comparées (formes générales avec des puissances α et β)
- ❒ Définition d'un majorant, d'un maximum d'une partie A de $\mathbb{R}$
- ❒ 3 formules trigo (parmi celles à apprendre par cœur).
- ❒ En s'aidant du cercle trigo, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right), \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.

Démonstrations

- ❒ Soit $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$. Donner le domaine de définition de f.
  Montrer que f est dérivable (au moins) sur $]-1, 1[$ et calculer f' sur ce domaine.
- ❒ Justifier que l'équation $\ln(x) = x - 3$ admet une unique solution dans $[1, +\infty[$.
- ❒ Retrouver $\sin a \cos b$ et $\cos p - \cos q$.