Signaux Electriques SE2 Circuits linéaires du premier ordre en régime transitoire

Leonhard Euler*, né en 1707 à Bâle (Suisse) et mort à 76 ans en 1783 à Saint-Pétersbourg (Empire russe), est un mathématicien et physicien suisse, qui passa la plus grande partie de sa vie dans l'Empire russe et en Allemagne. Il était notamment membre de l'Académie royale des sciences de Prusse à Berlin.*

Euler fit d'importantes découvertes dans des domaines aussi variés que le calcul infinitésimal et la théorie des graphes. Il introduisit également une grande partie de la terminologie et de la notation des mathématiques modernes, en particulier pour l'analyse mathématique, comme la notion de fonction mathématique. Il est aussi connu pour ses travaux en mécanique, en dynamique des fluides, en optique et en astronomie ou en géométrie du triangle.

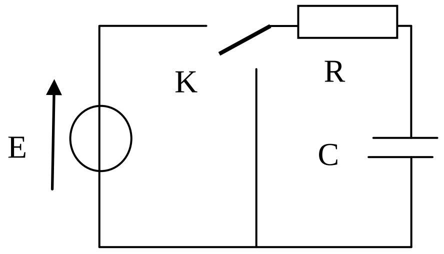
Euler est considéré comme un éminent mathématicien du XVIIIe siècle et l'un des plus grands et des plus prolifiques de tous les temps. Une déclaration attribuée à Pierre-Simon de Laplace exprime l'influence d'Euler sur les mathématiques : « Lisez Euler, lisez Euler, c'est notre maître à tous[3] ».

Introduction : les différents régimes

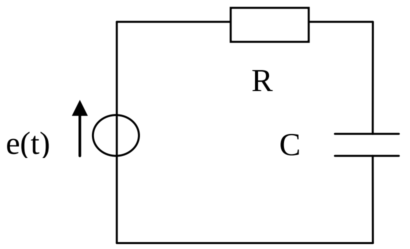
Lors du changement d'alimentation d'un circuit, on observe deux moments :
- Premier moment : le régime transitoire. Il dépend des conditions initiales et s'amortit rapidement.
- Deuxième moment : le régime permanent (ou établi ou forcé). Il est indépendant des conditions initiales et dure jusqu'au prochain changement.

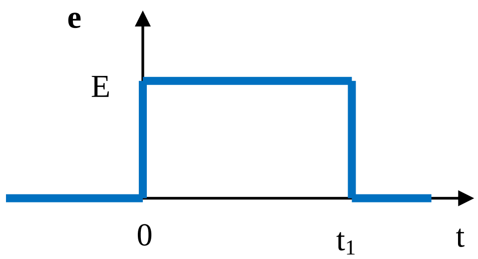
On étudie deux régimes transitoires particuliers :
- le régime libre : c'est le régime que l'on observe lorsqu'on laisse évoluer un circuit ne contenant pas de sources, avec des conditions initiales non nulles.
- la réponse à un échelon de tension ou de courant. Ce régime correspond à l'établissement d'un régime continu.

https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Elec/Transitoire/chargeRC_TS.php



On utilise en général un GBF (générateur basses fréquences) avec un signal créneau, plutôt que d'utiliser un générateur continu avec un interrupteur.





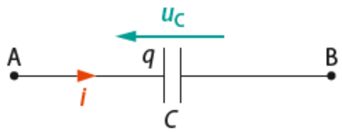
I Circuit RC série

1.) Condensateur idéal.

a) Définition

Pour un condensateur idéal en convention récepteur, la tension et charge sont liés par la loi : $u(t) = \frac{q(t)}{C}$ où C est une constante positive appelée capacité du condensateur.

La tension et l'intensité sont liées par la loi : $i = C\frac{du}{dt}$



b) Puissance et énergie reçues : $\boxed{\mathcal{E}_C = \frac{1}{2}Cu^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}}$

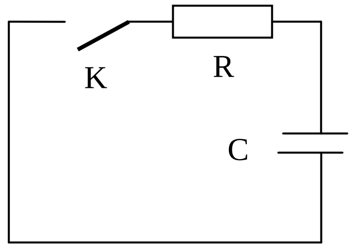
Propriété : La tension aux bornes d'un condensateur et sa charge sont des fonctions continues du temps (au sens des mathématiques).

c) Condensateur réel

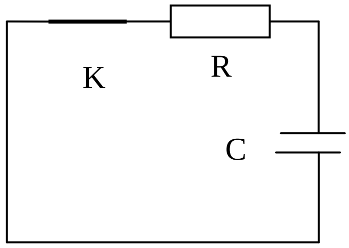
Il est constitué de deux plaques conductrices séparées par un isolant. L'isolant peut ne pas être parfait, et laisser passer un peu de courant.

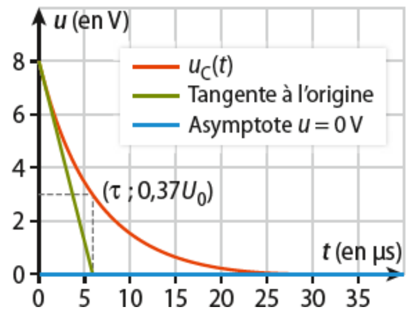
2.) Régime libre

Avant fermeture de l'interrupteur K, le condensateur est chargé et aucun courant ne circule dans le circuit.

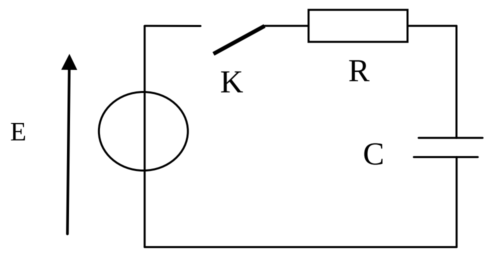


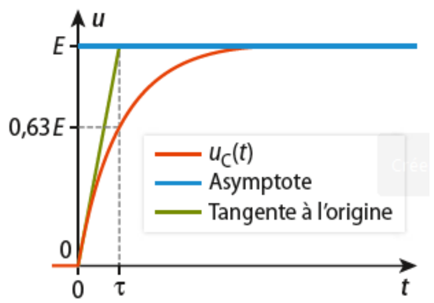
A t=0, on ferme l'interrupteur. Pour t>0, on cherche à observer l'évolution de la tension aux bornes du condensateur, ainsi que la charge portée par l'armature du condensateur, et l'intensité du courant circulant dans ce circuit.



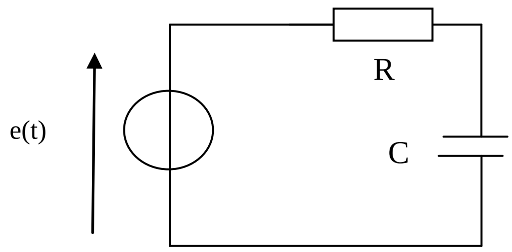


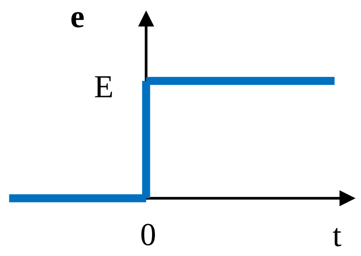
3.) Réponse à un échelon de tension





4.) Aspect énergétique





II Circuit RL série

1.) Bobine idéale.

a) Définition

Pour une bobine idéale en convention récepteur, la tension et l'intensité sont liés par la loi : $u = L\frac{di}{dt}$ où L est une constante positive appelée inductance propre de la bobine.

Ordres de grandeur de l'inductance :
L varie de quelques µH (1 spire) à quelques mH (1000 spires sans noyau de fer)
$L \cong 1H$ pour une bobine de 1000 spires avec noyau de fer
$L \cong 10$ H à 100 H pour les électroaimants

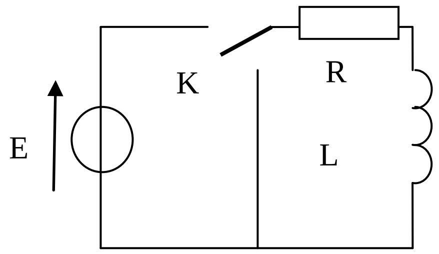
b) Puissance et énergie reçues : $\boxed{\mathcal{E}_L = \frac{1}{2}Li^2}$

Propriété : L'intensité dans une bobine est une fonction continue du temps (au sens des mathématiques).

c) Bobine réelle

Enroulement d'un fil conducteur (cuivre) sur un support non magnétique, ou sans support.

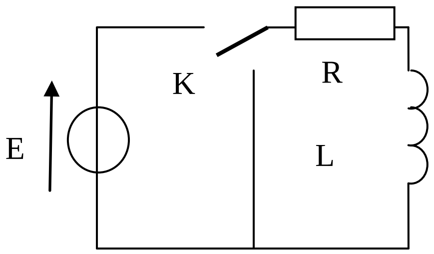
2.) Régime libre



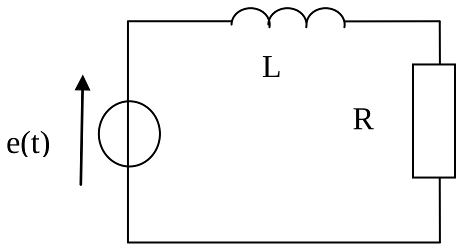
Pour t < 0, l'interrupteur est en position 1 depuis très longtemps.
A t=0, on passe l'interrupteur en position 2.

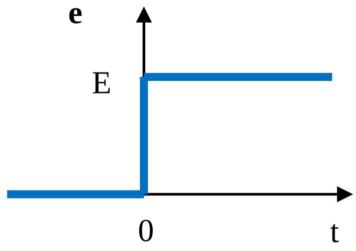
Méthode :
1. Equation de maille, qui permette de trouver une équation différentielle sur la grandeur qui nous intéresse.
2. Résolution de l'équation : solution complète = solution libre + solution forcée.
3. Détermination des constantes, en utilisant la continuité du courant dans une bobine et de la tension aux bornes d'un condensateur.

3.) Réponse à un échelon de tension



4.) Aspect énergétique

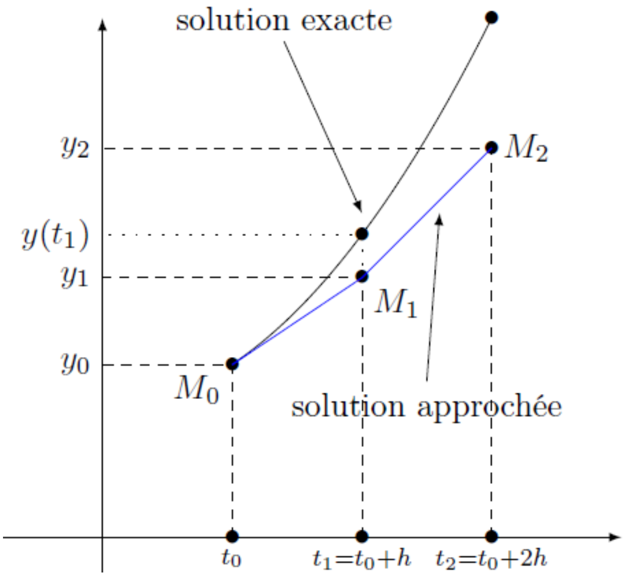




III Méthode d'Euler

1.) Principe

Soit y définie par $\boxed{y'(t) = F(y(t), t)}$ et $y(t_0)=y_0$ avec t_0 et y_0 fixés.



On souhaite obtenir une approximation de la fonction y sur l'intervalle [a,b] :

- On subdivise l'intervalle [a,b] en n petits segments de longueur $h = \frac{b-a}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. On pose alors $t_0 = a$, $t_1 = t_0+h$, $t_2 = t_0 + 2h$...$t_k = t_0+kh$, $t_n = t_0 +nh=b$

- On part de t_0. On approche le petit morceau de courbe entre t_0 et t_1 par la tangente à la courbe au point d'abscisse t_0.

On a $\frac{y_1-y_0}{h} = y'(t_0)$ d'où $y_1 = y_0 + hy'(t_0)$ ou $y_1 = y_0 + hF(y_0, t_0)$

De manière générale, on pose pour tout k : $\frac{y_{k+1}-y_k}{h} = y'(t_k)$ d'où $y_{k+1} = y_k + hy'(t_k) = y_k + hF(y_k, t_k)$

Pour l'équation différentielle de la charge du circuit RC :

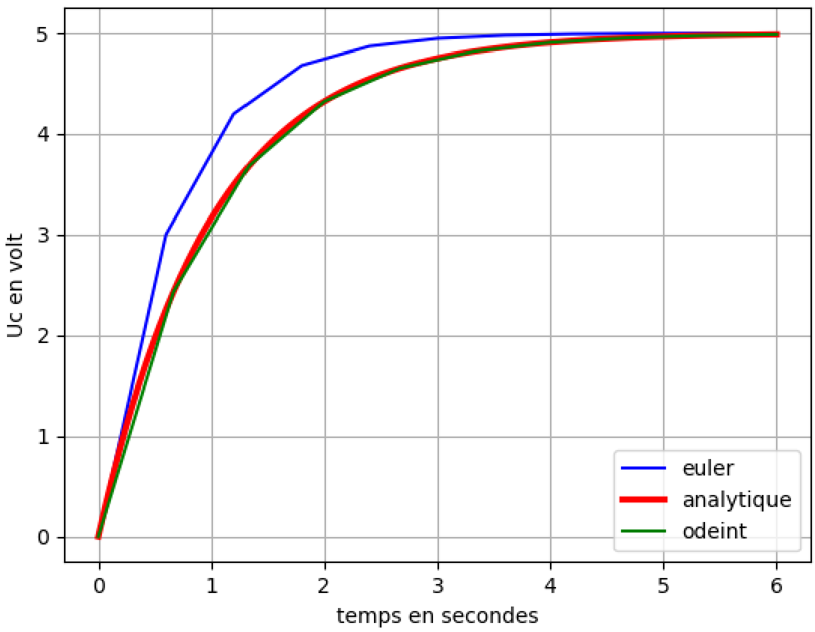
2.) Mise en œuvre

```python
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint


#l'équadiff s'écrit: u'(t)=f(u(t),t) avec f:(u,t)->(E - u)/tau
#la relation de récurrence s'écrit: u_{k+1} = u_k + h*f(u_k, t_k)

def ordre1_euler(tau, E, n):
    t = 0
    u = U0
    les_t = [0]
    les_u = [U0]
    h = tmax / n
    for i in range(n):
        #les_t contient [t0,...,ti] et les_u contient [u0,...,ui]
        u = u + h * (E - u) / tau
        t = t + h
        les_u.append(u)
        les_t.append(t)
    return(les_t, les_u)
##Tracé de la solution de la méthode d'Euler
E=5
U0=0
tau=1
tmax=6*tau
n = 10  #MODIFIER LE NOMBRE DE POINTS

les_t, les_u = ordre1_euler( tau, E, n)
plt.plot(les_t, les_u, color='b',label='euler')
```



IV Application directe : Association des bobines et condensateurs parfaits