PROGRAMMES 5 et 6.

PROGRAMME 5 : du 14/10 au 18/10

Reprise des sommes

Nouvelles fonctions usuelles

- ❒ Résultat sur la dérivabilité d'une fonction réciproque.
- ❒ Définition de Arcsin, dérivabilité et dérivée
- ❒ Définition de Arccos, dérivabilité et dérivée
- ❒ Définition de Arctan, dérivabilité et dérivée
- ❒ Définition de ch, sh, écriture de $\exp(x)$ en fonction de $\mathrm{ch}(x)$ et $\mathrm{sh}(x)$, formule reliant $\mathrm{ch}^2(x)$ et $\mathrm{sh}^2(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. Dérivées, variations et graphe.

Remarque aux colleurs : La seule formule de trigonométrie hyperbolique à connaître est $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$ pour $x \in \mathbb{R}$. La fonction tangente hyperbolique et les fonctions hyperboliques réciproques sont hors programme.

Un énoncé au choix à demander

- ❒ Sommes usuelles : $\sum_{k=0}^{n} k, \sum_{k=0}^{n} k^2, \sum_{k=0}^{n} k^3$ où $n \in \mathbb{N}$
- ❒ $\sum_{k=0}^{n} q^k$ où $n \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{R}$ puis $\sum_{k=p}^{n} q^k$ pour $0 \leq p \leq n$
- ❒ Factorisation de $a^n - b^n$, $a^3 - b^3, a^3 + b^3$
- ❒ Formule du binôme de Newton
- ❒ Écrire de deux manières $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j}$
- ❒ Définition de Arcsin, dérivabilité et dérivée
- ❒ Définition de Arccos, dérivabilité et dérivée
- ❒ Définition de Arctan, dérivabilité et dérivée
- ❒ Définition de ch, sh, écriture de $\exp(x)$ en fonction de $\mathrm{ch}(x)$ et $\mathrm{sh}(x)$, formule reliant $\mathrm{ch}^2(x)$ et $\mathrm{sh}^2(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$

Démonstrations

- ❒ Formule du binôme de Newton.
- ❒ Dérivabilité de Arcsin et dérivée.
- ❒ Formule donnant $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.

PROGRAMME 6 : du 04/11 au 08/11

Reprise des nouvelles fonctions usuelles

Complexes

- ★ Parties réelle et imaginaire. Opérations sur les nombres complexes.
  Conjugaison, compatibilité avec les opérations.
- ★ Module d'un nombre complexe. Relation $|z|^2 = z\,\overline{z}$, module d'un produit, d'un quotient.
  Inégalité triangulaire, cas d'égalité.
- ★ Nombres complexes de module 1 : Notation $\mathbb{U}$. Définition de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$ pour θ réel. Si θ et θ' sont deux réels, alors : $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta'}$.
  Formules d'Euler : $\cos(\theta) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}}{2}$, $\sin(\theta) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}}{2i}$
  Formule de Moivre.
  Applications à la trigonométrie : Linéarisation, opération inverse.
- ★ Écriture d'un nombre complexe non nul sous la forme $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
  Arguments d'un nombre complexe non nul. Notation $\mathrm{Arg}(z) \equiv \theta(2\pi)$.
  Factorisation de $e^{ip} \pm e^{iq}, 1 \pm \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$.
  Calcul de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(kt)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(kt)$.
  Argument d'un produit, d'un quotient.
- ★ Équation du second degré : Racines carrées d'un nombre complexe.
  Résolution des équations du second degré, discriminant.
  Somme et produit des racines d'une équation du second degré.

Question de savoir-faire

On demandera à chaque étudiant, en plus de la preuve et de l'énoncé, une linéaristation ou une « dé-linéarisation » par passage en complexes.

Un énoncé au choix à demander

- ❒ Définition rigoureuse de Arcsin, dérivabilité et dérivée
- ❒ Définition rigoureuse de Arccos, dérivabilité et dérivée
- ❒ Définition rigoureuse de Arctan, dérivabilité et dérivée
- ❒ Définition de ch, sh, écriture de $\exp(x)$ en fonction de $\mathrm{ch}(x)$ et $\mathrm{sh}(x)$, formule reliant $\mathrm{ch}^2(x)$ et $\mathrm{sh}^2(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$
- ❒ Définition du module de $z \in \mathbb{C}$ (2 expressions à donner)
- ❒ Donner 2 caractérisations pour $z \in \mathbb{R}$, 2 caractérisations pour $z \in i\mathbb{R}$
- ❒ Propriétés de la conjugaison (somme, différence, produit, quotient)
- ❒ Propriétés du module (produit, quotient)
- ❒ Traduire $|z| = 1$ de trois manières ($x^2 + y^2 = 1$ si $x = \mathrm{Re}(z), y = \mathrm{Im}(z)$, $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$, $\exists \theta \in \mathbb{R}, z = e^{i\theta}$)
- ❒ Inégalité triangulaire
- ❒ Formules d'Euler
- ❒ Propriétés algébrique des $e^{i\theta}$, formule de Moivre
- ❒ Écriture trigonométrique d'un complexe non nul
- ❒ Résultat sur les racines carrées d'un complexe non nul
- ❒ Solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ avec a, b, c complexes, $a \neq 0$
- ❒ Relations racines/coefficients pour une équation de degré 2

Démonstrations

- ❒ Formule donnant $\mathrm{Arctan}\, x + \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.
- ❒ Pour tous complexes z_1 et z_2, $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.
- ❒ Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(kt)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(kt)$ où $t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$.