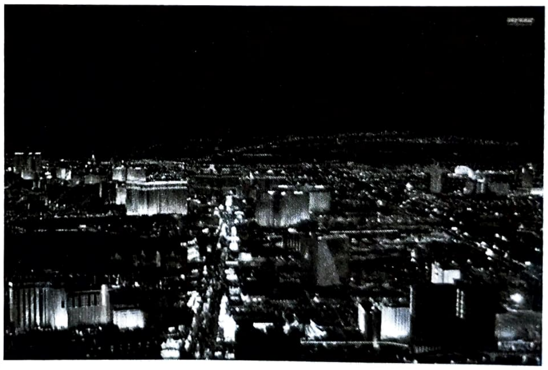
Signaux Electriques SE2 Circuits linéaires du premier ordre en régime transitoire

***Leonhard Euler**, né en 1707 à Bâle (Suisse) et mort à 76 ans en 1783 à Saint-Pétersbourg (Empire russe), est un mathématicien et physicien suisse, qui passa la plus grande partie de sa vie dans l'Empire russe et en Allemagne. Il était notamment membre de l'Académie royale des sciences de Prusse à Berlin.*

Euler fit d'importantes découvertes dans des domaines aussi variés que le calcul infinitésimal et la théorie des graphes. Il introduisit également une grande partie de la terminologie et de la notation des mathématiques modernes, en particulier pour l'analyse mathématique, comme la notion de fonction mathématique. Il est aussi connu pour ses travaux en mécanique, en dynamique des fluides, en optique et en astronomie ou en géométrie du triangle.

Euler est considéré comme un éminent mathématicien du XVIII^e siècle et l'un des plus grands et des plus prolifiques de tous les temps. Une déclaration attribuée à Pierre-Simon de Laplace exprime l'influence d'Euler sur les mathématiques : « Lisez Euler, lisez Euler, c'est notre maître à tous[3] ».

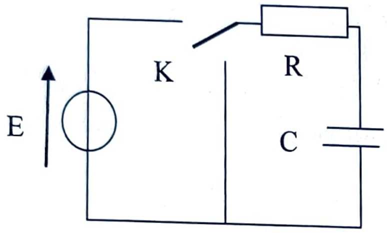


Introduction : les différents régimes

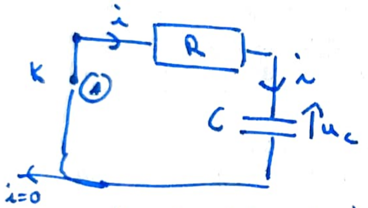
Lors du changement d'alimentation d'un circuit, on observe deux moments :
- Premier moment : le régime transitoire. Il dépend des conditions initiales et s'amortit rapidement.
- Deuxième moment : le régime permanent (ou établi ou forcé). Il est indépendant des conditions initiales et dure jusqu'au prochain changement.

On étudie deux régimes transitoires particuliers :
- le régime libre : c'est le régime que l'on observe lorsqu'on laisse évoluer un circuit ne contenant pas de sources, avec des conditions initiales non nulles.
- la réponse à un échelon de tension ou de courant. Ce régime correspond à l'établissement d'un régime continu.

https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Elec/Transitoire/chargeRC_TS.php



Décharge d'un condensateur initialement chargé :

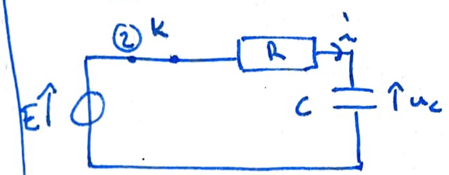


$u_c(t=0^-) = U_{c0}$ juste avant fermeture de K en ①

$u_c \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ le condensateur se comporte comme 1 générateur. $\boxed{i<0}$

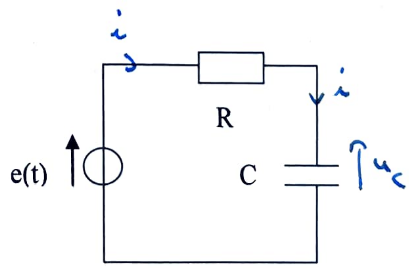
Toute la puissance fournie par C est dissipée par effet Joule dans R (chaleur)

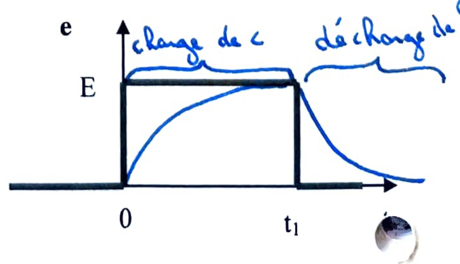
Charge du condensateur :



$u_c(t=0^-) = 0$ le condensateur se charge jusqu'à sa valeur max.

On utilise en général un GBF (générateur basses fréquences) avec un signal créneau, plutôt que d'utiliser un générateur continu avec un interrupteur.





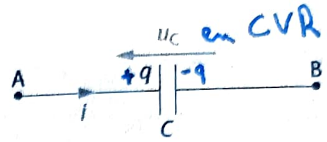
I Circuit RC série

1.) Condensateur idéal.

a) Définition

Pour un condensateur idéal en convention récepteur, la tension et charge sont liés par la loi : $u(t) = \frac{q(t)}{C}$ où C est une constante positive appelée capacité du condensateur.

La tension et l'intensité sont liées par la loi : $i = C\frac{du}{dt}$



q -> Coulomb (C)

C -> Farad (F)

u_c -> Volt (V)

Rq : $i = \frac{dq}{dt} = \frac{d(Cu_c)}{dt} = C\frac{du_c}{dt}$

En régime continu permanent : Toutes les grandeurs sont constantes.

$u_c = cst \Rightarrow i = 0$ ds le condensateur

Le condensateur équivaut à un interrupteur ouvert.

b) Puissance et énergie reçues : $\mathcal{E}_C = \frac{1}{2}Cu_c^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$

Propriété : La tension aux bornes d'un condensateur et sa charge sont des fonctions continues du temps (au sens des mathématiques).

$P(t) = u_c(t) \times i(t)$ or $i = C\frac{du_c}{dt}$

$= u_c \times C \times \frac{du_c}{dt}$

$= C \times u_c \times \frac{du_c}{dt}$

① Or $P(t) = \frac{d\mathcal{E}_c}{dt}$ ← Joule (J)

Watt (W)

Rq : $u_c = f(t)$

$\frac{du_c}{dt} = f'(t)$

$(f^2)' = 2ff'$

Donc $ff' = \frac{1}{2}(f^2)'$

$P(t) = \frac{C}{2}\frac{d(u_c^2)}{dt}$

$P(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Cu_c^2\right)$

Par identificat° avec ①

$\mathcal{E}_c(t) = \frac{1}{2}Cu_c^2$

$u_c = \frac{q}{C} \Rightarrow \mathcal{E}_c(t) = \frac{1}{2}C \times \left(\frac{q}{C}\right)^2$

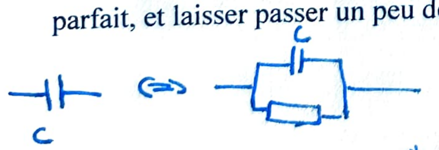
$= \frac{1}{2} \times \frac{q^2}{C}$

La puissance fournie par le géné ne peut pas prendre ∞, donc la puissance reçue par C est finie

⇒ l'énergie du condensateur est une fonct° continue du temps.

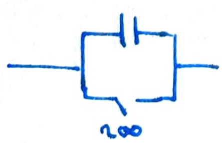
c) Condensateur réel

Il est constitué de deux plaques conductrices séparées par un isolant. L'isolant peut ne pas être parfait, et laisser passer un peu de courant.



*
*
*

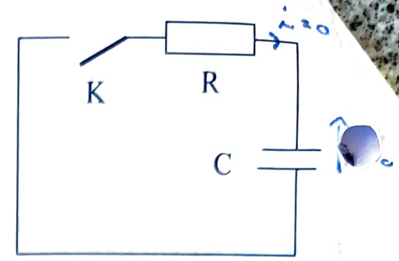
Pour un condensateur parfait, l'isolant ne laisse passer aucun courant en régime continu. R est à ∞ et équivaut à un interrupteur ouvert



2.) Régime libre

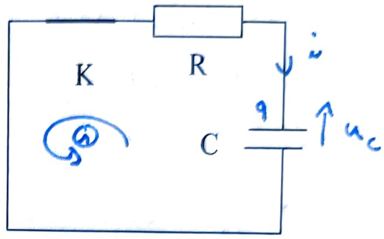
Avant fermeture de l'interrupteur K, le condensateur est chargé et aucun courant ne circule dans le circuit.

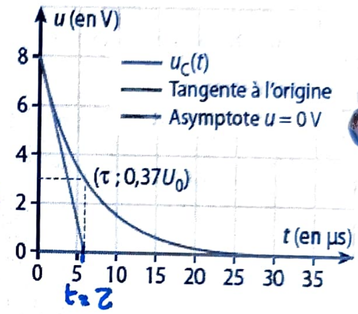
$t<0$



A t=0, on ferme l'interrupteur. Pour t>0, on cherche à observer l'évolution de la tension aux bornes du condensateur, ainsi que la charge portée par l'armature du condensateur, et l'intensité du courant circulant dans ce circuit.

$t>0$





1) Équa diff sur u_c :

équa de maille $u_c + u_R = 0$

Or $u_R = Ri$ en CVR

$\Rightarrow u_c + Ri = 0$

où $\boxed{i = C\dfrac{du_c}{dt}}$ en CVR

$\Rightarrow u_c = RC\dfrac{du_c}{dt} = 0$

$\Rightarrow \boxed{\dfrac{du_c}{dt} + \dfrac{1}{RC}u_c = 0}$ équa diff sur u_c

2) résolut° par séparat° des variables :

$\Rightarrow \dfrac{du_c}{dt} = -\dfrac{u_c}{RC}$

$\Rightarrow \int \dfrac{du_c}{u_c} = \int -\dfrac{dt}{RC}$

On cherche une primitive de chaque membre

Rq : $\int \dfrac{1}{x}dx = \ln x + \text{cste}_1$

$\int -\dfrac{dt}{RC} = -\dfrac{1}{RC}\int dt = -\dfrac{1}{RC}t + \text{cste}_2$

$\Rightarrow \ln u_c = -\dfrac{t}{RC} + \text{cste}$ (où $\text{cste} = \text{cste}_1 - \text{cste}_2$)

$\Rightarrow \exp(\ln u_c) = \exp\left(\dfrac{-t}{RC}\right) \times \underbrace{\exp(\text{cste})}_{A}$

$\Rightarrow u_c = A\exp\left(\dfrac{-t}{RC}\right)$

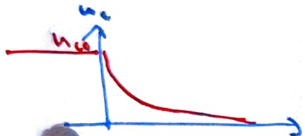
3) Déterminat° de A

$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} C u_c^2$ est une fonct° continue du temps donc u_c aussi.

$$\underbrace{u_c(t=0^-)}_{\text{juste avant fermeture K}} = \underbrace{u_c(t=0^+)}_{\text{juste après}}$$

$\Rightarrow u_{c0} = A \exp(0)$

$\Rightarrow \boxed{A = u_{c0}}$



$u_c = u_{c0} \exp\left(\frac{-t}{RC}\right)$ pour $t > 0$

$\tau = RC$ cste de temps ou temps de relaxat° du circuit.

$u_c = u_{c0} \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)$ → nombre sans dimension

4) Courbe

Rq: $u_c(t) = u_{c0} \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)$

$u_c(t=\tau) = u_{c0} \exp(-1) = 0{,}37\, u_{c0}$

tangente à l'origine

Rq: $f'(a) = \frac{y - f(a)}{x - a}$ (2)

$u_c(t=0) = u_{c0}$

$\frac{du_c}{dt} = u_{c0} \times \left(\frac{-1}{\tau}\right) \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)$

$\left(\frac{du_c}{dt}\right)(t=0) = \frac{-u_{c0}}{\tau}$

(2) $\Rightarrow \frac{-u_{c0}}{\tau} = \frac{y - u_{c0}}{t - 0}$

$\Rightarrow y - u_{c0} = \frac{-u_{c0} \cdot t}{\tau}$

$\Rightarrow \boxed{y = u_{c0}\left(1 - \frac{t}{\tau}\right)}$ tangente à l'origine

$y = 0$ pour $t = \tau$

→ permet de déterminer τ

· Régime permanent atteint à moins de 1% près

$u_c(t) = \frac{u_{c0}}{100} \Rightarrow u_{c0} \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) = \frac{u_{c0}}{100}$

$\Rightarrow \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) = \frac{1}{100} \Rightarrow \frac{t}{\tau} = \ln(100)$

$\Rightarrow \boxed{t = 4{,}6\, \tau}$

Au bout de 5τ, le régime permanent est atteint.

5) Étude d'autres grandeurs

· charge $u_c = \frac{q}{C} \Rightarrow \boxed{q = C u_c}$

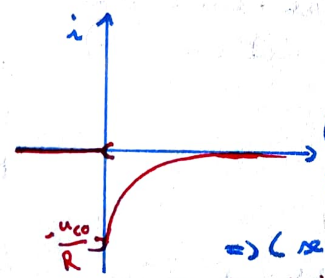
$t < 0$ $u_c = u_{c0}$ $q = q_0 = C u_{c0}$

$t > 0$ $u_c = u_{c0} \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) \Rightarrow q = q_0 \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)$

· intensité : $i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_c}{dt}$

$\frac{du_c}{dt} = \frac{-u_{c0}}{\tau} \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)$ où $\tau = RC$

$i = \frac{-u_{c0}}{RC} \times C \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)$ $\boxed{i(t) = -\frac{u_{c0}}{R} \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) \text{ pour } t > 0}$



$i < 0$ donc circule en sens inverse du sens indiqué.

$\Rightarrow C$ se comporte ≈ un générateur

$i = 0$ avant fermeture de K (circuit ouvert)

* Rq: On peut déterminer les valeurs à $t = 0^+$ et
* à $t\infty$ sans résoudre l'équa diff.
*

À $t = 0^+$ $u_c(0^-) = u_c(0^+)$

$\Rightarrow \boxed{u_c(0^+) = u_{c0}}$

(1) equ de maille $u_c + u_R = 0$

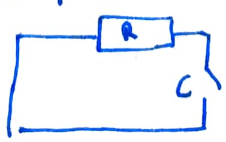
$\Rightarrow u_c + Ri = 0 \Rightarrow i = \frac{-u_c}{R}$

À $t\infty$ on est en régime permanent continu.

Toutes les grandeurs sont constantes.

$u_c = $ cste $\Rightarrow i = C\frac{du_c}{dt} = 0$ $i(t\infty) = 0$

C équivaut à un interrupteur ouvert.

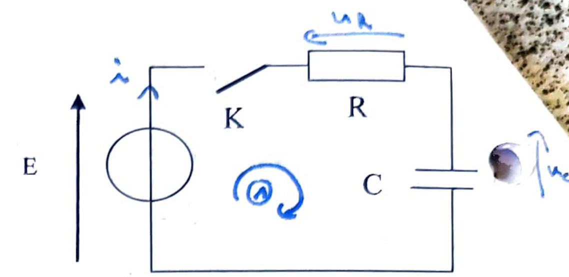


$u_R = Ri$

$u_R(t\infty) = 0$

$u_c(t\infty) = 0$

3.) Réponse à un échelon de tension



Pour $t < 0$ $i = 0$

C déchargé $u_c = 0$ $q = 0$

À $t = 0$ on ferme K

① Équa diff sur u_c

équa de maille $E - u_c - u_R = 0$

$\Rightarrow E = u_c + u_R$

or $u_R = Ri$ (CVR)

$\Rightarrow E = u_c + Ri$

or $i = C\frac{du_c}{dt}$ (CVR)

$\Rightarrow E = RC\frac{du_c}{dt} + u_c$

$\Rightarrow \boxed{\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{RC}u_c = \frac{E}{RC}}$ second membre non nul

② Résolut°

ⓐ Solut° libre : Solut° de l'équat° sans second membre (ou solut° homogène)

$$\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{RC}u_{cl} = 0$$

$\Rightarrow u_{cl} = A\exp\left(\frac{-t}{RC}\right)$

ⓑ Solut° forcée : solut° particulière de l'équat° avec second membre. Du m type que le second membre.

Ici $\frac{E}{RC}$ = cste $\Rightarrow u_{cf}$ = cste

$$\underbrace{\frac{du_{cf}}{dt}}_{=0} + \frac{1}{RC}u_{cf} = \frac{E}{RC}$$

$\Rightarrow \boxed{u_{cf} = E}$

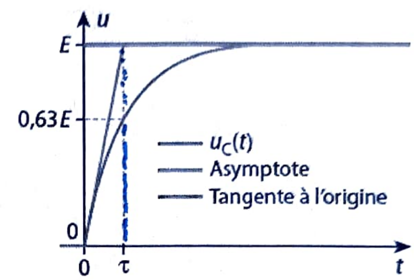
ⓒ solut° complète : $u_c(t) = u_{cf} + u_{cl}$

$u_c(t) = A\exp\left(\frac{-t}{RC}\right) + E$

③ Déterminat° de A :

$u_c(0^-) = u_c(0^+)$ car u_c est continue

($\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}Cu_c^2$ est continue)



$\Rightarrow 0 = A\exp(0) + E$

$\Rightarrow A = -E$

$u_c(t) = E - E\exp\left(\frac{-t}{RC}\right)$

$\Rightarrow \boxed{u_c(t) = E\left(1 - \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)\right) \text{ où } \tau = RC}$

τ constante de temps

④ Courbe

$t \to +\infty$: $\exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) \to 0$ $u_c(t) \to E$

$t = \tau$: $u_c(t=\tau) = E(1 - \exp(-1))$
$= 0{,}63E$

La tangente à l'origine coupe l'asymptote en $t = \tau$

⑤ Autres grandeurs :

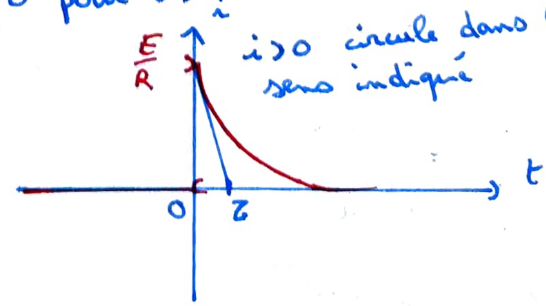
. charge $q = Cu_c = C.E\left(1 - \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)\right)$ pour $t > 0$

. intensité $i = C\frac{du_c}{dt}$

$i = C \times \left[-E \times \left(\frac{-1}{RC}\right)\exp\left(\frac{-t}{RC}\right)\right]$

$\boxed{i = \frac{E}{R}\exp\left(\frac{-t}{RC}\right) \text{ pour } t > 0}$

$i = 0$ pour $t > 0$



$i > 0$ circule dans le sens indiqué

exp : i varie de façon brutale en $t = 0$

Rq : Obtention directe des valeurs :

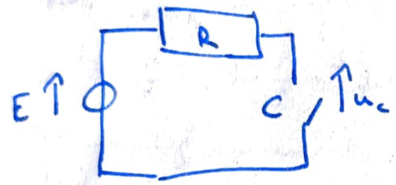
à $t=0^+$: $u_c(0^-) = u_c(0^+) \Rightarrow u_c(0^+) = 0$

(a) $E = Ri + u_c$

$\Rightarrow E = Ri(0^+) + u_c(0^+) \Rightarrow i(0^+) = \frac{E}{R}$

à $t\infty$: régime permanent continu

$u_c = cste \Rightarrow \boxed{i = 0} \Rightarrow$ C équivaut à un interrupteur ouvert



$\Rightarrow u_R = 0$ à $t = +\infty$

(a) $E = u_R + u_c \Rightarrow \boxed{u_c = E}$ à $t\infty$

4.) Aspect énergétique

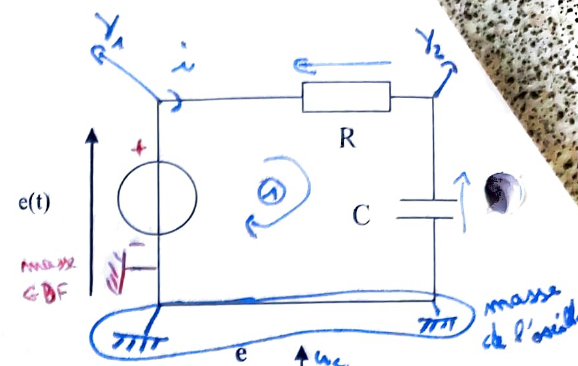
équat° de la maille ① : $e(t) = u_R(t) + u_c(t)$

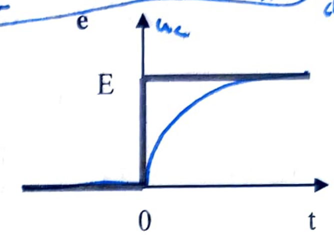
$\times i \Rightarrow \underbrace{e\,i}_{\text{CVG}} = \underbrace{u_R\,i + u_c\,i}_{\text{CVR}}$

$$\boxed{P_{\text{fournie par la géné}} = P_{\text{reçue par } R} + P_{\text{reçue par } C}}$$

$u_R = Ri$ et $i = C\dfrac{du_c}{dt} \Rightarrow e\,i = Ri^2 + u_c \times C\dfrac{du_c}{dt}$

$\Rightarrow e\,i = Ri^2 + \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}Cu_c^2\right)$ ← démo p3





Par def : $P = \dfrac{d\mathcal{E}}{dt}$

$\Rightarrow \mathcal{E}_{0\to t} = \int_0^t P\,dt$

on intègre ① entre $t=0$ et t

$$\int_0^t e\,i\,dt = \int_0^t Ri^2\,dt + \int_0^t \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Cu_c^2\right)dt$$

$$\mathcal{E}_{\text{géné}\,0\to t} = \mathcal{E}_{R\,0\to t} + \mathcal{E}_{c\,0\to t}$$

Il y a conservat° de l'énergie

Pour un échelon de tension montant (de 0 à E)

entre $t=0$ et $t\infty$

$$\mathcal{E}_{c_0\to+\infty} = \int_0^t \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Cu_c^2\right)dt = \left[\frac{1}{2}Cu_c^2\right]_{t=0}^{t\infty}$$

$$= \frac{1}{2}\left(u_c^2(t\infty) - u_c^2(0)\right)C$$

$$= \frac{1}{2}C\left(E^2 - 0^2\right)$$

$$\boxed{\mathcal{E}_{c\,0\to+\infty} = \frac{1}{2}CE^2}$$

$\mathcal{E}_{\text{géné}} = \int_0^{+\infty} e\,i\,dt$ où $\left|\begin{array}{l} e = E \\ i = C\dfrac{du_c}{dt}\end{array}\right.$

$$\mathcal{E}_{\text{géné}} = \int_0^{+\infty} EC\frac{du_c}{dt}\,dt = CE\left[u_c\right]_0^{+\infty}$$

$$= CE\left(u_c(t\infty) - u_c(0)\right)$$

$$= CE\,(E - 0)$$

$$\boxed{\mathcal{E}_{\text{géné}} = CE^2}$$

Conservat° de l'énergie : $\mathcal{E}_{R\,0\to+\infty} = \mathcal{E}_{\text{géné}\,0\to+\infty} - \mathcal{E}_{c\,0\to+\infty}$

$$\mathcal{E}_{R\,0\to+\infty} = CE^2 - \frac{1}{2}CE^2 = \frac{1}{2}CE^2$$

La moitié de l'énergie fournie est dissipée par R sous forme de chaleur, l'autre moitié étant stockée dans le condensateur.

Pour 1 échelon descendant :

$$\mathcal{E}_{c\,0\to+\infty} = \frac{1}{2}C\left(0^2 - E^2\right)$$

$$\boxed{\mathcal{E}_{c\,0\to+\infty} = -\frac{1}{2}CE^2}$$

$\mathcal{E}_{\text{géné}\,0\to+\infty} = 0$ car $e = 0$ pour $t > 0$

$$\mathcal{E}_{R\,0\to+\infty} = -\mathcal{E}_{c\,0\to\infty} = \frac{1}{2}CE^2$$

C. se comporte ĉ un générateur

---

e(t) sur la voie 1 de l'oscillo

$u_c(t)$ ——— 2 ———

II Circuit RL série

1.) Bobine idéale.

a) Définition

Pour une bobine idéale en convention récepteur, la tension et l'intensité sont liés par la loi : $u = L\frac{di}{dt}$ où L est une constante positive appelée inductance propre de la bobine.

Ordres de grandeur de l'inductance :
L varie de quelques µH (1 spire) à quelques mH (1000 spires sans noyau de fer)
$L \cong 1H$ pour une bobine de 1000 spires avec noyau de fer
$L \cong 10$ H à 100 H pour les électroaimants

En régime continu permanent, i = cste $\Rightarrow u_L = 0$

$\boxed{\text{bobine idéale équivaut à un fil}}$

b) Puissance et énergie reçues : $\mathcal{E}_L = \frac{1}{2}Li^2$

Propriété : L'intensité dans une bobine est une fonction continue du temps (au sens des mathématiques).

$$P(t) = u(t) \times i(t)$$
$$= L\frac{di}{dt} \times i$$
$$P(t) = Li\frac{di}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right)$$

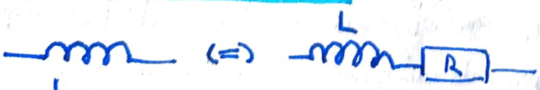
Rq : $\frac{di^2}{dt} = 2 \times i \times \frac{di}{dt}$

$$\left.\begin{array}{l} P(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right) \\ P(t) = \frac{dE}{dt} \end{array}\right\} \mathcal{E}_L = \frac{1}{2}Li^2$$

$\mathcal{E}_L(t)$ est une fonct° continue du temps.

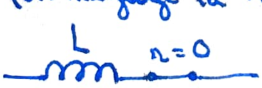
c) Bobine réelle

Enroulement d'un fil conducteur (cuivre) sur un support non magnétique, ou sans support.



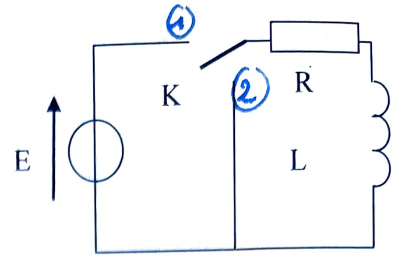
cf TP | L = 0,1 H
r = 32 Ω

Pour une bobine parfaite : r = 0
(on néglige la résistance des fils)



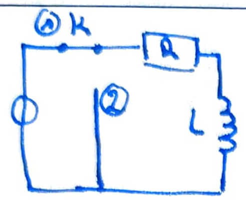
2.) Régime libre

Pour $t < 0$, l'interrupteur est en position 1 depuis très longtemps.
A t=0, on passe l'interrupteur en position 2.



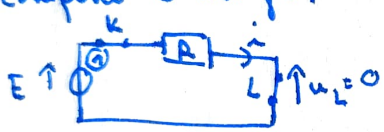
Méthode :
1. Equation de maille, qui permette de trouver une équation différentielle sur la grandeur qui nous intéresse. i
2. Résolution de l'équation : solution complète = solution libre + solution forcée.
3. Détermination des constantes, en utilisant la continuité du courant dans une bobine et de la tension aux bornes d'un condensateur.

Pour $t < 0$:



On est en régime permanent continu. Ttes les grandeurs sont ctes : i = cste.

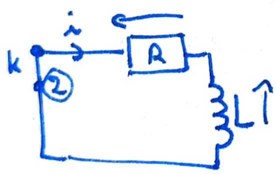
$\Rightarrow u_L = L\frac{di}{dt} = 0 \Rightarrow$ la bobine parfaite se comporte ĉ un fil.



$E - Ri = 0$

$\Rightarrow i = \frac{E}{R}$ à $t = 0^-$

Pour $t \geq 0$:



① équat° de maille :

$\boxed{u_L + Ri = 0}$ ①

or $u_L = L\frac{di}{dt}$

$\Rightarrow L\frac{di}{dt} + Ri = 0 \Rightarrow \frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = 0$

② Résolut° : $\frac{di}{dt} = \frac{-R}{L}i$

$\Rightarrow i(t) = A\exp\left(\frac{-R}{L}t\right)$

$\tau = \frac{L}{R} \Rightarrow i(t) = A\exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)$

③ Déterminer A

$E_L = \frac{1}{2}Li^2$ est une fonct° continue, donc i aussi

$\Rightarrow i(t=0^-) = i(t=0^+)$

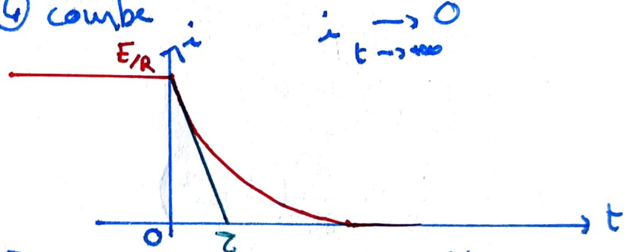
$\Rightarrow \frac{E}{R} = A\exp(0)$

$\Rightarrow A = \frac{E}{R}$

$\boxed{\Rightarrow i(t) = \frac{E}{R}\exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)}$

④ courbe

$i \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$



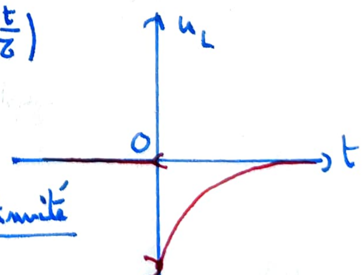
⑤ Autres grandeurs $u_L = L\frac{di}{dt}$

Au bout de 5τ, le régime permanent est atteint.

$u_L = L \times \frac{E}{R} \times \left(\frac{-1}{\tau}\right)\exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)$

$= L \times \frac{E}{R} \times \frac{-R}{L}\exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)$

$\boxed{u_L = -E\exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)}$



On observe une discontinuité sur u_L en $t = 0$

Rq: exp on observe une variat° très rapide, mais pas de discontinuité. Il existe dans les circuits des condensateurs "parasites" et des bobines "parasites" dans tous les composants.

Rq : Valeurs initiales et finales sans résolut°

à $t = 0^+$: par continuité : $i(0^+) = \frac{E}{R}$

① Equat° de maille : $u_L + u_R = 0$

$\Rightarrow u_L = -u_R = -Ri$

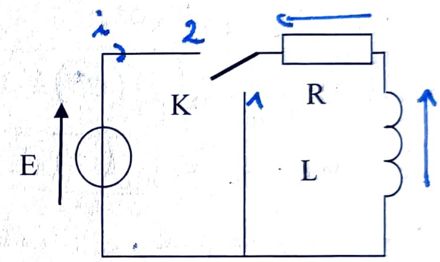
$\Rightarrow u_L(0^+) = -E$

à $t\infty$: régime permanent continu
la bobine équivaut à un fil

À $t\infty$ $\boxed{u_L = 0} \overset{①}{\Rightarrow} u_R = 0$

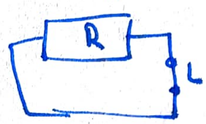
$\Rightarrow \boxed{i = \frac{u_R}{R} = 0}$

3.) Réponse à un échelon de tension



Pour $t<0$ k en posit° 1 depuis très longtemps.

$\boxed{u_L = 0 \quad i = 0}$



à $t = 0$ k est passé en posit° 2.

① équat° de maille

① $E = u_R + u_L$ ou $u_R = Ri$ et $u_L = L\frac{di}{dt}$ en CVR

$E = Ri + \frac{L\,di}{dt} \Rightarrow \boxed{\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L}}$ ②

② Résolut°

a) solut° libre : solut° de l'équat° sans second membre.

$\frac{di_e}{dt} + \frac{R}{L}i_e = 0 \Rightarrow \frac{di_e}{dt} = \frac{-R}{L}i_e$

$\Rightarrow i_e(t) = A\exp\left(\frac{-R}{L}t\right)$

b) solut° forcée : solut° particulière du m̂ type que le second membre.

$\frac{E}{L}$ = cste donc i_f est cste $\Rightarrow \frac{di_f}{dt} = 0$

$\frac{di_f}{dt} + \frac{R}{L}i_f = \frac{E}{L} \Rightarrow i_f = \frac{E}{R}$

c) solut° complète : $i(t) = i_e(t) + i_f$

$i(t) = A\exp\left(\frac{-R}{L}t\right) + \frac{E}{R}$

③ Déterminat° de la cste.

$\mathcal{E}_L = \frac{1}{2}Li^2$ est une fonct° continue donc i aussi.

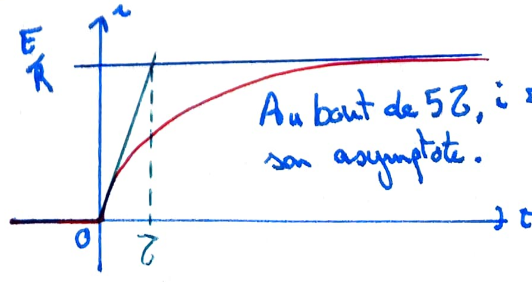
$\Rightarrow i(0^+) = i(0^-)$

$\Rightarrow 0 = A + \frac{E}{R} \Rightarrow A = \frac{-E}{R}$

$\boxed{i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - \exp\left(\frac{-R}{L}t\right)\right)}$

$i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)\right)$

④ Courbe



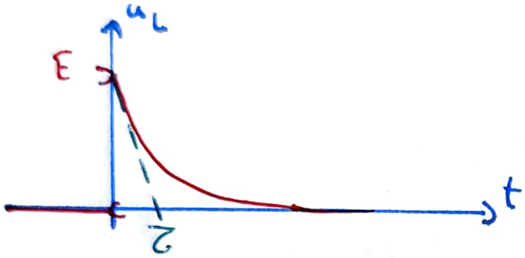
Au bout de 5τ, i rejoint son asymptote.

⑤ Autres grandeurs $u_L = L\frac{di}{dt}$

$$u_L = \frac{-E}{R} \times \left(\frac{-R}{L}\right) \times L \exp\left(\frac{-R}{L}t\right)$$

$$u_L = E \exp\left(\frac{-R}{L}t\right)$$

$$i = \frac{E}{R} - \frac{E}{R}\exp\left(\frac{-R}{L}t\right)$$



Rq : Valeurs à $t = 0^+$ et t_∞

à $t = 0^+$: $i(0^-) = i(0^+)$

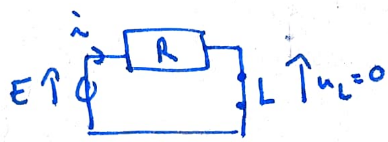
$\Rightarrow \boxed{i(0^+) = 0} \Rightarrow \boxed{u_R(0^+) = 0}$

① $E = u_R + u_L \Rightarrow \boxed{u_L(0^+) = E}$

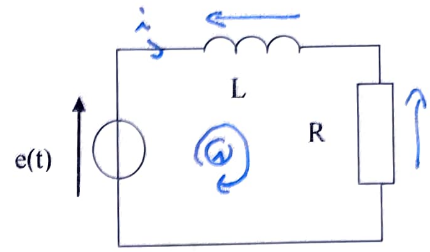
à t_∞ : régime permanent continu

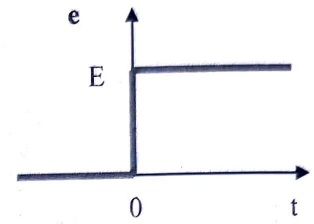
① $E = Ri + u_L$ $\boxed{u_L(\infty) = 0}$

$\Rightarrow \boxed{i(\infty) = \frac{E}{R}}$



4.) Aspect énergétique





① équ de maille $e(t) = u_L + u_R$

$\times i \Rightarrow e i = u_L i + u_R i$

$$\boxed{P_{\text{fournie par la géné}} = P_{\text{reçue par } L} + P_{\text{reçue par } R}}$$

$\begin{cases} u_L = L\dfrac{di}{dt} \\ u_R = Ri \end{cases} \Rightarrow e i = L i \dfrac{di}{dt} + R i^2$

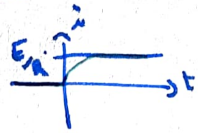
$$\Rightarrow \boxed{e i = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} L i^2\right) + R i^2}$$

$$\int_0^t e i\,dt = \int_0^t \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} L i^2\right) dt + \int_0^t R i^2\,dt$$

$$\mathcal{E}_{\substack{géné \\ 0\to t}} = \mathcal{E}_{\substack{L \\ 0\to t}} + \mathcal{E}_{\substack{R \\ 0\to t}}$$

Pour un échelon montant de $t = 0$ à $t\ \infty$

$$\mathcal{E}_{L\,0\to+\infty} = \left[\frac{1}{2} L i^2\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2} L \cdot \frac{E^2}{R}$$



$$\mathcal{E}_{g\,0\to+\infty} = \int_0^{+\infty} E i\,dt$$

où $i(t) = \frac{E}{R}\left[1 - \exp\left(\frac{-R}{L}t\right)\right]$

$$\mathcal{E}_{g\,0\to+\infty} = \int_0^{+\infty} E \times \frac{E}{R}\left(1 - \exp\left(\frac{-R}{L}t\right)\right) dt$$

$$= \frac{E^2}{R} \int_0^{+\infty} \left(1 - \exp\left(\frac{-R}{L}t\right)\right) dt$$

$$\mathcal{E}_{g\,0\to+\infty} = \frac{E^2}{R}\left[t + \frac{R}{L}\exp\left(\frac{-R}{L}t\right)\right]_0^{+\infty}$$

$\mathcal{E}_{g\,0\to+\infty}$ tend vers $+\infty$

$\mathcal{E}_{R\,0\to+\infty} + \mathcal{E}_{L\,0\to+\infty} = \mathcal{E}_{g\,0\to+\infty}$

$\Rightarrow \mathcal{E}_{R\,0\to+\infty} = \mathcal{E}_{g\,0\to+\infty} - \mathcal{E}_{L\,0\to+\infty}$

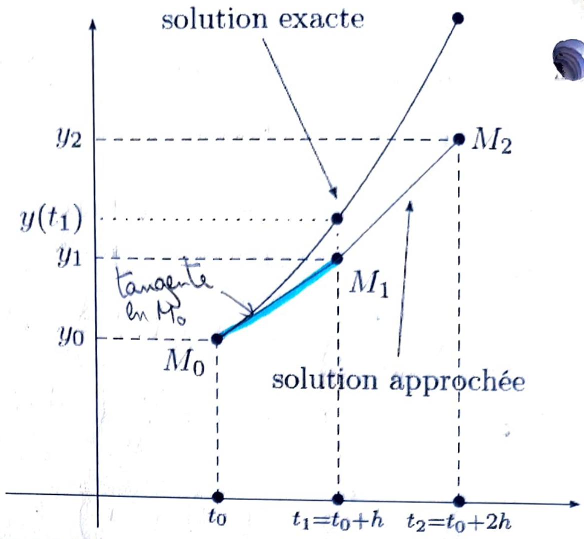
$\mathcal{E}_{R\,0\to+\infty}$ tend vers $+\infty$

Rq : $[\exp(at)]' = a\exp(at)$

III Méthode d'Euler

1.) Principe

Soit y définie par $\boxed{y'(t) = F(y(t), t)}$ et $y(t_0)=y_0$ avec t_0 et y_0 fixés.



On souhaite obtenir une approximation de la fonction y sur l'intervalle [a,b] :

- On subdivise l'intervalle [a,b] en n petits segments de longueur $h = \frac{b-a}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. On pose alors $t_0 = a$, $t_1 = t_0+h$, $t_2 = t_0 + 2h \ldots t_k = t_0+kh$, $t_n = t_0 + nh = b$

- On part de t_0. On approche le petit morceau de courbe entre t_0 et t_1 par la tangente à la courbe au point d'abscisse t_0.

On a $\frac{y_1-y_0}{h} = y'(t_0)$ d'où $y_1 = y_0 + hy'(t_0)$ ou $y_1 = y_0 + hF(y_0, t_0)$

De manière générale, on pose pour tout k : $\frac{y_{k+1}-y_k}{h} = y'(t_k)$ d'où $y_{k+1} = y_k + hy'(t_k) = y_k + hF(y_k, t_k)$

où $h = t_{k+1} - t_k$

Pour l'équation différentielle de la charge du circuit RC :

Pour la charge :

$$\frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{RC} = \frac{E}{RC}$$

$$\tau = RC \Rightarrow \frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{\tau} = \frac{E}{\tau}$$

$$\Rightarrow \frac{du_c}{dt} = \frac{E-u_c}{\tau}$$

correspond à : $y'(t) = F(y(t), t)$

or $\frac{du_c}{dt} = \frac{u_{ck+1} - u_{ck}}{t_{k+1} - t_k}$

ou $h = t_{k+1} - t_k$

$u_{ck+1} = u_c(t_{k+1})$

$u_{ck} = u_c(t_k)$

$$\Rightarrow u_{ck+1} = u_{ck} (t_{k+1} - t_k)\left(\frac{du_c}{dt}\right)_{t_k}$$

$$u_{ck+1} = u_{ck} + h\left(\frac{du_c}{dt}\right)_{t_k}$$

1 $\boxed{\Rightarrow u_{ck+1} = u_{ck} + h\left(\frac{E-u_{ck}}{\tau}\right)}$

à programmer

équat° de la tangente à l'instant t_k

Rq : Déf de la dérivée

$$y'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \left(\frac{y(t) - y_0}{t - t_0}\right)$$

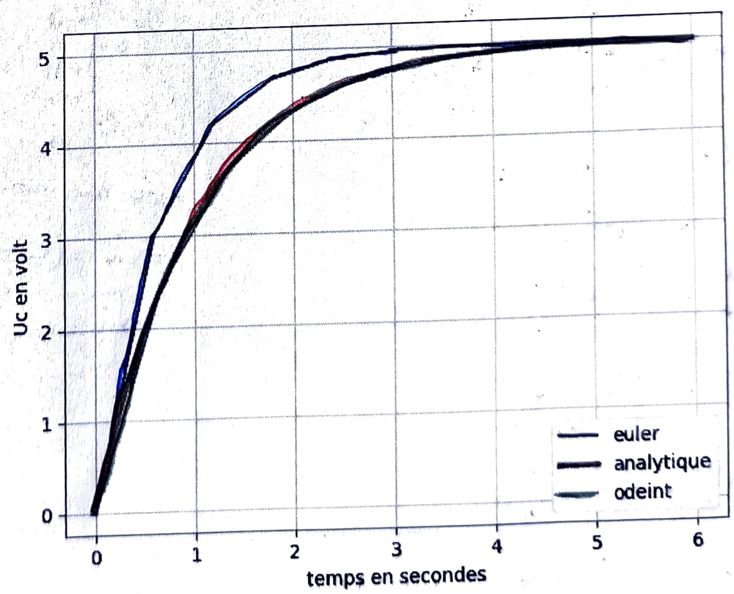
2.) Mise en œuvre

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint


#l'équadiff s'écrit: u'(t)=f(u(t),t) avec f:(u,t)->(E - u)/tau
#la relation de récurrence s'écrit: u_{k+1} = u_k + h*f(u_k, t_k)

def ordre1_euler(tau, E, n):
    t = 0       ) conditᵒ initiales
    u = U0
    les_t = [0]   ) liste
    les_u = [U0]
    h = tmax / n
    for i in range(n):
        #les_t contient [t0,...,ti] et les_u contient [u0,...,ui]
        u = u + h * (E - u) / tau) récurrence -> équatᵒ tangente
        t = t + h
        les_u.append(u) ) remplir les listes
        les_t.append(t)
    return(les_t, les_u)
##Tracé de la solution de la méthode d'Euler
E=5
U0=0
tau=1
tmax=6*tau
n = 10  #MODIFIER LE NOMBRE DE POINTS

les_t, les_u = ordre1_euler( tau, E, n) )appel de la fonctᵒ
plt.plot(les_t, les_u, color='b',label='euler')
          abscisse  ordonné
```

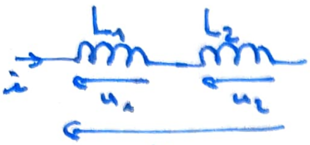


euler avec 10 points
pour 100 points : euler fonctionne

IV Application directe : Association des bobines et condensateurs parfaits

1) Bobines idéales

a) Série



$u_1 = L_1 \frac{di}{dt}$

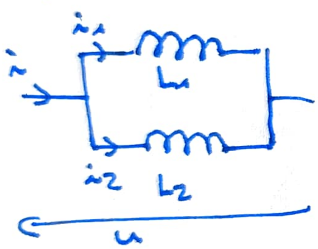
$u_2 = L_2 \frac{di}{dt}$ en CVR

addit° des tensions : $u = u_1 + u_2$

$$\Rightarrow u = L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} = \frac{di}{dt}(L_1 + L_2)$$

$$\boxed{u = L_{eq} \frac{di}{dt} \text{ ou } L_{eq} = L_1 + L_2}$$

b) Parallèle



en CVR

$u = L_1 \frac{di_1}{dt} \Rightarrow \frac{di_1}{dt} = \frac{u}{L_1}$

$u = L_2 \frac{di_2}{dt} \Rightarrow \frac{di_2}{dt} = \frac{u}{L_2}$

Loi des noeuds :

$i = i_1 + i_2$

$\frac{di}{dt} = \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt}$

(1),(2) $\Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{u}{L_1} + \frac{u}{L_2}$

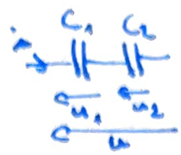
$\Rightarrow \frac{di}{dt} = u\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right)$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{u}{L_{eq}} \text{ avec } \frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}}$$

Les bobines parfaites s'associe selon les m̂ lois que les R.

2) Condensateur parfait

a) série



$u = C\frac{du_{c1}}{dt} + C\frac{du_{c2}}{dt}$

en CVR

$i = C_1 \frac{du_1}{dt} \Rightarrow \frac{du_1}{dt} = \frac{i}{C_1}$

$i = C_2 \frac{du_2}{dt} \Rightarrow \frac{du_2}{dt} = \frac{i}{C_2}$

Additivité des tension : $u = u_1 + u_2$

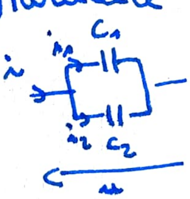
$$\Rightarrow \frac{du_c}{dt} = \frac{du_1}{dt} + \frac{du_2}{dt} = \frac{i}{C_1} + \frac{i}{C_2}$$

$$\Rightarrow \frac{du_c}{dt} = i\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)$$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{du_c}{dt} = \frac{i}{C_{eq}} \text{ avec } \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{i = C_{eq} \frac{du_c}{dt}}$$

b) Parallèle



Loi des noeuds $i = i_1 + i_2 = C_1 \frac{du}{dt} + C_2 \frac{du}{dt}$

$\Rightarrow i = (C_1 + C_2)\frac{du}{dt}$

$$\Rightarrow \boxed{i = C_{eq} \frac{du}{dt} \text{ où } C_{eq} = C_1 + C_2}$$