Signaux Electriques SE3 L'oscillateur harmonique

Introduction : définition de l'oscillateur harmonique

****

On appelle oscillateur harmonique un système physique décrit par une grandeur x(t) dépendant du temps et vérifiant une équation différentielle de la forme : $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ où ω_0 est une constante réelle positive qui est appelée pulsation propre de l'oscillateur harmonique et qui s'exprime en rad.s^{-1}. $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$

$\ddot{x} = \frac{d(\dot{x})}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$

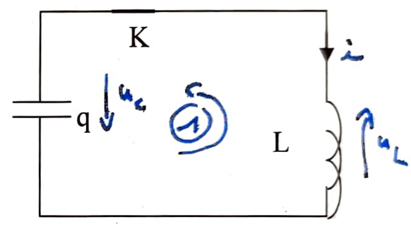
déter les cstes

Solution $x(t) = a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t)$ a et b étant constantes, déterminées par les conditions initiales.
$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$ A est l'amplitude, positive et φ l'avance de phase à l'origine.
A et φ sont constantes, déterminées par les conditions initiales

I Oscillations électrique : exemple du circuit LC

1.) Equation différentielle et résolution

Le condensateur est initialement chargé, et K est ouvert depuis longtemps. A t = 0, on ferme l'interrupteur K.



Equa diff sur u_c :

$u_c + u_L = 0$

CVR $u_L = L\frac{di}{dt} \Rightarrow L\frac{di}{dt} + u_c = 0$

CVR $i = C\frac{du_c}{dt} \Rightarrow LC\frac{d^2 i}{dt^2} + u_c = 0$

$$\boxed{\frac{d^2u_c}{dt^2} + \frac{1}{LC}u_c = 0} \quad (1)$$

$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} > 0 \Rightarrow \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$ pulsation propre

$u_c(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$

$$\boxed{u_c(t) = a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t)} \quad (2)$$

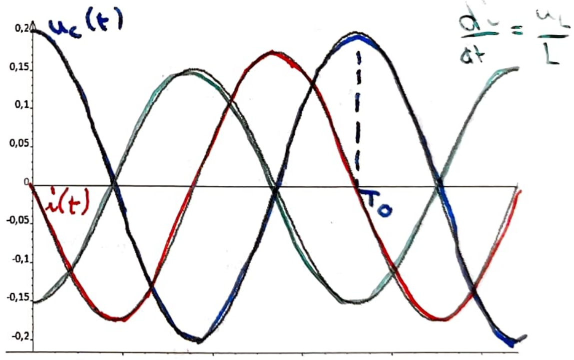
À $t = 0^-$ $\left| \begin{array}{l} u_c(0^-) = u_{c0} \\ i(0^-) = 0 \end{array} \right.$

$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}Cu_c^2$ est continue

$\mathcal{E}_L = \frac{1}{2}Li^2$ " "

donc $\left| \begin{array}{l} u_c(0^-) = u_c(0^+) \\ i(0^-) = i(0^+) \end{array} \right.$

à $t = 0^+$: $\left| \begin{array}{l} u_c(0^+) = u_{c0} \\ i(0^+) = 0 \end{array} \right.$



or $i = C\frac{du_c}{dt} \Rightarrow \left(\frac{du_c}{dt}\right)(0^+) = 0$

(2) $\Rightarrow \left| \begin{array}{l} u_c(0^+) = a\cos(0) + b\sin(0) \\ u_c(0^+) = u_{c0} \end{array} \right.$

$\Rightarrow a = u_{c0}$

(2) $\frac{du_c}{dt} = a\omega_0(-\sin(\omega_0 t)) + b\omega_0\cos(\omega_0 t)$

$\left(\frac{du_c}{dt}\right)(0^+) = -a\omega_0\sin(0) + b\omega_0\cos(0)$
$= b\omega_0$

$\frac{du_c}{dt}(0^+) = 0 \Rightarrow b\omega_0 = 0 \Rightarrow b = 0$

(2) $u_c(t) = u_{c0}\cos(\omega_0 t)$

$\boxed{\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}} \Rightarrow u_c(t) = u_{c0}\cos\left(2\pi\frac{t}{T_0}\right)$

T_0 période propre

$f_0 = \frac{1}{T_0}$ fréquence propre

2.) Bilan de puissance et d'énergie

(Suite page 1)

$$\boxed{i = C\frac{du_c}{dt} = -C u_c \omega_0 \sin(\omega_0 t)}$$

$$u_L = L\frac{di}{dt} = -LC u_{c0}\, \omega_0^2 \cos(\omega_0 t)$$
$$= -u_c$$

(1) $u_c + u_L = 0$

$\times i$ $\quad \boxed{u_c i + u_L i = 0}$

$i = C\dfrac{du_c}{dt}$ et $u_L = L\dfrac{di}{dt}$

$\Rightarrow C u_c \dfrac{du_c}{dt} + L u_L \dfrac{di}{dt} = 0$

$\Rightarrow \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2} C u_c^2\right) + \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2} L i^2\right) = 0$

$\Rightarrow \dfrac{d}{dt}\left(\mathcal{E}_c + \mathcal{E}_L\right) = 0$

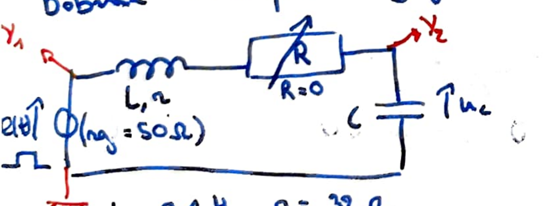
$\Rightarrow \boxed{\mathcal{E}_c + \mathcal{E}_L = \text{cste}}$

$u_c(0^+) = u_{c0}$ $\quad i(0^+) = 0$

$\mathcal{E}_c(0^+) = \dfrac{1}{2} C u_{c0}^2$ $\quad \mathcal{E}_L = 0$

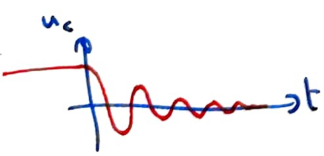
$\Rightarrow \boxed{\mathcal{E}_c + \mathcal{E}_L = \dfrac{1}{2} C u_{c0}^2}$

En pratique, la résistance de la bobine n'est pas négligeable.



$L = 0{,}1$ H $\quad r = 32\,\Omega$

$C = 0{,}1\,\mu$F



oscillations amorties

Rq : Période :

$u_c(t) = u_{c0}\cos(\omega_0 t) = u_{c0}\cos(x)$

$\cos x$ est périodique de période 2π

$\cos(x + m2\pi) = \cos(x)$ où $m \in \mathbb{Z}$

$\cos(\omega_0 t + m2\pi) = \cos\left[\omega_0\left(t + m\dfrac{2\pi}{\omega_0}\right)\right]$

$= \cos\left[\omega_0 (t + mT_0)\right]$

donc $\cos(\omega_0 t)$ est périodique de période $\boxed{T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}}$

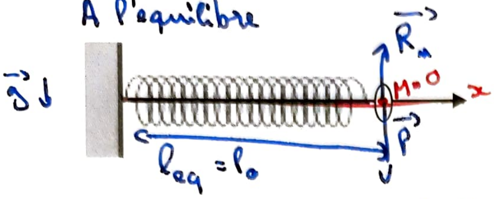
Vecteurs unitaires:
$\vec{e_x}$ ou $\vec{u_x}$
$\vec{e_y}$ ou $\vec{u_y}$
$\vec{e_z}$ ou $\vec{u_z}$

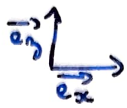
II Oscillations mécaniques : exemple du ressort horizontal

1.) Etude dynamique : Deuxième loi de Newton

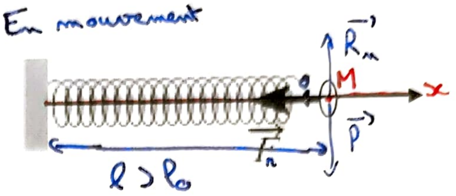
https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Meca/Oscillateurs/oscillateur_horizontal.php

À l'équilibre





En mouvement



Exemple: Ressort horizontal fixe à 1 extrémité. Petit anneau de centre M de masse m qui coulisse sans frottements le long d'un axe, à l'autre extrémité du ressort.

Système [anneau assimilé à son centre M(m)]

On fait l'étude dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

forces : · poids $\vec{P} = m\vec{g}$

· réact° du support, ⊥ au support en l'absence de frottements $\vec{R_N} \perp (Ox)$

· Force de rappel du ressort :

** $\boxed{\vec{F_r} = -k(l - l_0)\vec{e_x}}$ où $\vec{e_x}$ est dans le sens de l'étirement du ressort.

$\boxed{\vec{F_r} = -k\,x\,\vec{e_x}}$ où $x = l - l_0$

x l'allongement du ressort

l_0 longueur à vide.

k constante de raideur en $N.m^{-1}$

(plus k est grand, plus le ressort est difficile à étirer.

dessin de droite $l > l_0$ $x > 0$ donc $\vec{F_r}$ est dans le sens de $(-\vec{e_x})$ pour un ressort étiré.

Pour 1 ressort comprimé :

$x < 0$ $\vec{F_r}$ est dans le sens de $+\vec{e_x}$

À l'équilibre: $\sum \vec{F} = 0$

$\boxed{\vec{R_N} + \vec{P} + \vec{F_r} = 0}$

Sur (Ox): $-k(l - l_0) = 0$

$\Rightarrow \boxed{l_{eq} = l_0}$

Sur (Oz) : $+R_N - P = 0$

$\Rightarrow \boxed{R_N = mg}$

En mouvement, Deuxième loi de Newton (ou loi fondamentale de la dynamique)

$m\vec{a_M} = \vec{P} + \vec{R_N} + \vec{F_r}$

$\boxed{\vec{OM} = x\,\vec{e_x} \quad \text{ou} \quad x = l - l_0}$

$\vec{v_M} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \dot{x}\,\vec{e_x}$ $\quad \vec{a_M} = \frac{d\vec{v_M}}{dt} = \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} = \ddot{x}\,\vec{e_x}$

$\vec{e_x}$ vecteur unitaire constant et x(t)

(1) $m\ddot{x}\,\vec{e_x} = \vec{P} + \vec{R_N} + \vec{F_r}$

On projette sur (Ox) : $m\ddot{x} = -kx$

$\Rightarrow \boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0}$ Oscillateur harmonique

$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$ pulsation propre des oscillations.

$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) = a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t)$

Cas particulier: À t=0, on étire le ressort et on le lâche sans vitesse initiale :

$x(0) = x_0$ et $v(0) = 0$

$x(0) = a\cos(0) + b\sin 0 = a$ et $x(0) = x_0$

donc $\boxed{a = x_0}$

$v = \frac{dx}{dt} = -a\,\omega_0\sin(\omega_0 t) + b\,\omega_0\cos(\omega_0 t)$

$v(0) = -a\,\omega_0\sin(0) + b\,\omega_0\cos(0) = b\,\omega_0$

et $v(0) = 0$ $\Rightarrow \boxed{b = 0}$

$\Rightarrow \boxed{x(t) = x_0\cos(\omega_0 t)}$

$\boxed{v(t) = \dot{x}(t) = -x_0\,\omega_0\sin(\omega_0 t)}$

$a(t) = \frac{dv}{dt} = \ddot{x}(t) = -x_0\,\omega_0^2\cos(\omega_0 t)$

Rq: on retrouve $\ddot{x} = -\omega_0^2 x$

$\Rightarrow \boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$

$v(0) = \frac{dx}{dt}(0) = 0$ = tangente à l'origine horizontale.

$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$ cf TP

de pente $v_0 = v(0) = \frac{dx}{dt}(0)$

$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$
forme la + générale

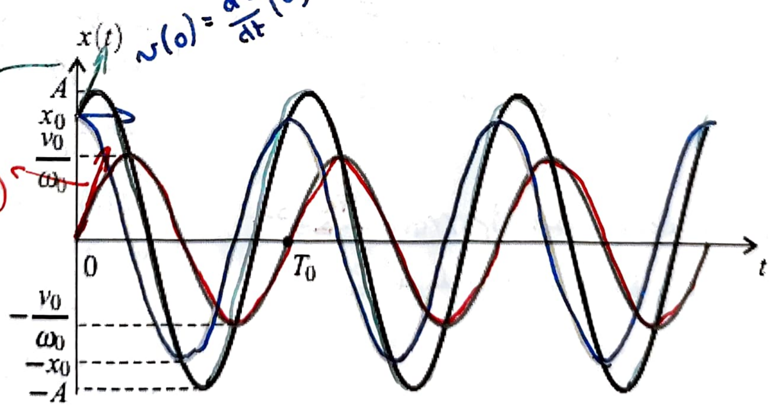
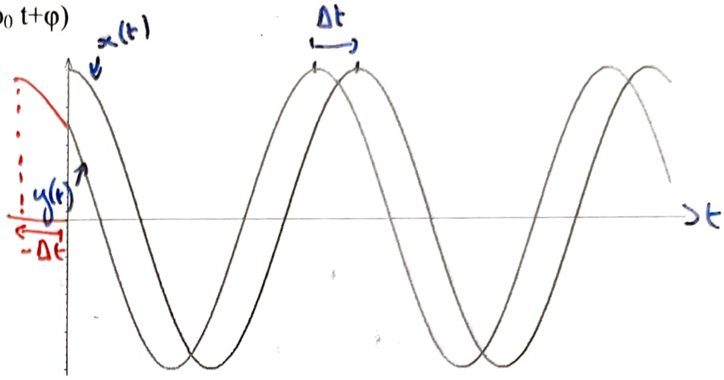


Figure 1.2 – Représentation graphique de $x(t)$ en fonction de t. En gris ~~clair~~ : cas $x_0 \neq 0$ et $v_0 = 0$; en ~~gris foncé~~ : cas $x_0 = 0$ et $v_0 \neq 0$; ~~en noir~~ : cas $x_0 \neq 0$ et $v_0 \neq 0$. La période des oscillations est $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ (voir paragraphe 2).

Remarque : $x=A.\cos(\omega_0 t)$ $y=A.\cos(\omega_0 t+\varphi)$

φ l'avance de phase.

$\varphi > 0$ si $y(t)$ passe par son maximum avant $x(t)$ (y est en avance sur x sur le dessin)



$y(t) = A\cos\left(\omega_0\left(t+\frac{\varphi}{\omega_0}\right)\right)$

$\frac{\varphi}{\omega_0} = \Delta t$ (en s)

$\Rightarrow \boxed{\varphi = \omega_0 \Delta t}$ $\boxed{\varphi = \frac{2\pi \Delta t}{T_0}}$ $**$

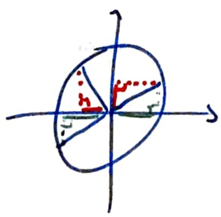
$y(t) = A\cos[\omega_0(t+\Delta t)]$ $\left(\frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\Delta t}{T_0}\right)$

changement de variable.

$t' = t+\Delta t$ $y(t') = A\cos(\omega_0 t')$

$t' = 0$ pour $t = -\Delta t$

Cas particulier : $x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)$



$v(t) = -x_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t)$

$= x_0 \omega_0 \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right)$

$\varphi = \omega_0 \Delta t = \frac{2\pi}{T_0} \Delta t$

rad rad.s^{-1} s

$\Rightarrow \Delta t = \frac{\varphi T_0}{2\pi}$

$\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \Delta t = \frac{\pi}{2} \times \frac{T_0}{2\pi} = \frac{T_0}{4}$

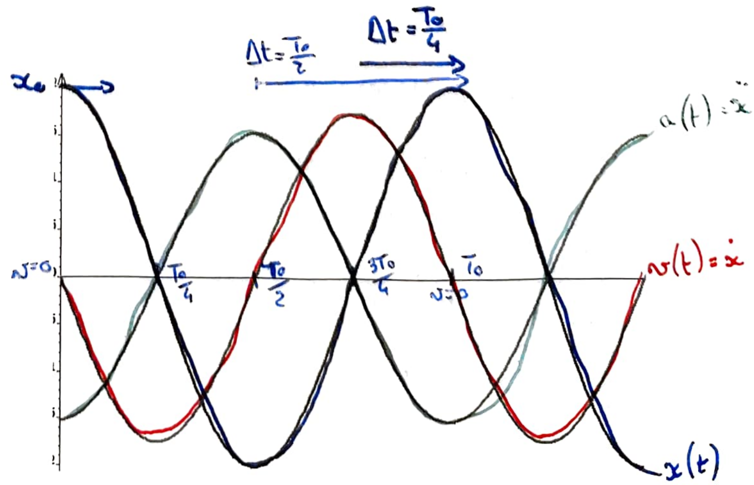
$\varphi > 0$ la vitesse est en avance sur la position de $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ou de $\Delta t = \frac{T_0}{4}$: elle est en quadrature avance.

$a(t) = \frac{dv}{dt} = -x_0 \omega_0^2 \cos(\omega_0 t)$

$a(t) = x_0 \omega_0^2 \cos\left(\omega_0 t + \pi\right)$

$\boxed{\varphi = \pi} \Rightarrow \Delta t = \frac{\pi \times T_0}{2\times\pi} = \boxed{\frac{T_0}{2}}$

$a(t)$ et $x(t)$ sont en opposition de phase



2.) Etude énergétique

Rappels

Travail d'une force constante, lorsque son point d'application M se déplace de A à B : $\boxed{W_{A\to B}(\vec{F}) = \vec{F}.\overrightarrow{AB}}$

Si le travail de F ne dépend pas du chemin suivi, la force est dite conservative et le travail s'écrit sous la forme :

$$\boxed{W_{A\to B}(\vec{F}) = -[Ep(B) - Ep(A)] = -\Delta Ep}$$

Energie potentielle de pesanteur : $Epp = mgz + cste$ si z est l'altitude

Energie potentielle élastique : $Ep_e = \frac{1}{2}kx^2 + cste$ où $x = l - l_0$ l'allongement du ressort

Energie cinétique : $Ec(M) = \frac{1}{2} m v^2(M)$

L'énergie mécanique Em=Ec+ Ep se conserve si toutes les forces qui travaillent dérivent d'une énergie potentielle (en l'absence de frottements)

Rq : Pour le ressort horizontal :

$\vec{F_r} = -k(l-l_0)\vec{e_x} = -kx\,\vec{e_x}$

force de rappel du ressort

Force qui n'est pas cste, son travail s'écrit

alors $W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F_r}.\vec{dl}$ où $\vec{dl}$ est un petit déplacement

(cf MC3)

$W_{A\to B} = -\Delta E_{pe}$

Cas particulier : $x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)$

$v(t) = -x_0\omega_0 \sin(\omega_0 t)$

Energie potentiel de pesanteur : $z = cste \Rightarrow Epp = cste_2$

Energie potentiel élastique : $E_{pe} = \frac{1}{2}kx^2 + cste_3$

où $x = l - l_0$

Energie potentielle : $Ep = \sum_i Ep_i$

$Ep = \frac{1}{2}kx^2 + cste_4$

CP : $Ep = \frac{1}{2}kx_0^2\cos^2(\omega_0 t) + cste_4$

On choisit une ref pour les Ep

On prend $Ep = 0$ pour $x = 0$

$\Rightarrow cste_4 = 0$

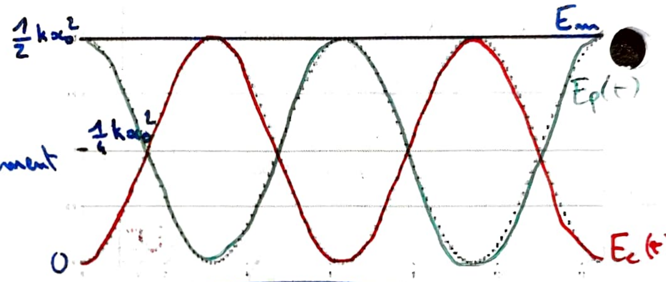
$\boxed{Ep = \frac{1}{2}kx_0^2\cos^2(\omega_0 t)}$ (1)

Rq : $\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$

$\Rightarrow \cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$

$Ep = \frac{1}{2}kx_0^2 \times \frac{1+\cos(2\omega_0 t)}{2}$

Rq tracé de Ep : $0 \le E_m, E_p \le \frac{1}{2}kx_0^2$



$\boxed{Ep = \frac{1}{4}kx_0^2(1+\cos(2\omega_0 t))}$

Pulsation : $\omega' = 2\omega_0$ $\omega' = \frac{2\pi}{T'}$ et $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

$\Rightarrow \frac{2\pi}{T'} = 2\times\frac{2\pi}{T_0} \Rightarrow T' = \frac{T_0}{2}$

Energie cinétique : $E_c = \frac{1}{2}mv^2$

$E_c = \frac{1}{2}m x_0^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t)$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow E_c = \frac{1}{2}m\times\frac{k}{m}x_0^2\sin^2(\omega_0 t)$

$\boxed{E_c = \frac{1}{2}kx_0^2\sin^2(\omega_0 t)}$ (2)

Energie mécanique $E_m = E_c + E_p$

(1) et (2) $E_m = \frac{1}{2}kx_0^2\cos^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2}kx_0^2\sin^2(\omega_0 t)$

$= \frac{1}{2}kx_0^2(\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t))$

$\boxed{E_m = \frac{1}{2}kx_0^2 = E_c + E_p \quad \forall t}$

La seule force qui travaille, la force de rappel du ressort, est dite conservative :

$W(\vec{F_r}) = -\Delta E_p$

$\Rightarrow$ l'énergie mécanique est constante

Rq : Il existe en réalité des frottements : $E_m \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$