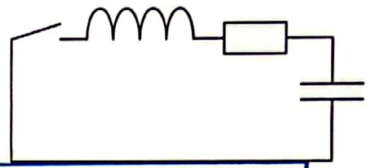
Signaux Electriques — SE4 Oscillateurs amortis en régime transitoire



I Le circuit RLC série en régime libre

1.) Mise en équation

a) Equation différentielle

Pour $t<0$ | K est ouvert depuis longtemps
C est chargé

à $t=0$ on ferme K

$E_c = \frac{1}{2} C u^2$ est continu donc $u_c(0^+) = u_{c0}$

$E_L = \frac{1}{2} L i^2$ est continu donc $i(0^+) = 0$

Pour $t>0$ Equa de maille (1) $\boxed{u_L + u_R + u_c = 0}$

Equa diff sur u_c, sur i, sur q:

CVR : $u_L = L\frac{di}{dt}$ $u_R = Ri$

$$\Rightarrow \boxed{u_c + L\frac{di}{dt} + Ri = 0} \quad (1')$$

CVR : $i = C\frac{du_c}{dt}$

$$\Rightarrow LC\frac{d^2u_c}{dt^2} + RC\frac{du_c}{dt} + u_c = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2u_c}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{LC}u_c = 0} \quad (2)$$

On dérive (1')

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{du_c}{dt} = 0$$

Or $\frac{du_c}{dt} = \frac{i}{C} \Rightarrow L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0} \quad (3)$$

$q = Cu_c \Rightarrow u_c = \frac{q}{C}$

$$(2) \Rightarrow \boxed{\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0} \quad (4)$$

u_c, i et q vérifient la même equa. diff.

$i(0^+) = C\frac{du_c}{dt}(0^+) \Rightarrow \boxed{\frac{du_c}{dt}(0^+) = 0}$

(1') à $t=0^+ \Rightarrow L\frac{di}{dt}(0^+) + Ri(0^+) + u_c(0^+) = 0$

$\Rightarrow L\frac{di}{dt}(0^+) + 0 + U_{c0} \Rightarrow \boxed{\frac{di}{dt}(0^+) = -\frac{U_{c0}}{L}}$

Rmq : À $t\infty$ Régime permanent continu, ttes les grandeurs sont constantes.

$i = C\frac{du_c}{dt} = 0$ C équivaut à 1 interrupteur ouve

$u_L = L\frac{di}{dt} = 0$ L équivaut à 1 fil.

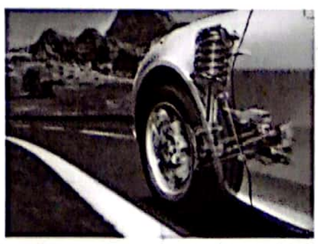
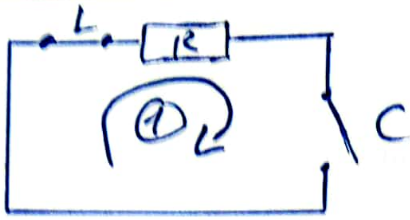


Schéma équivalent :



Circuit ouvert $\boxed{i=0}$

$\Rightarrow u_R = Ri = 0$

équa de maille ($u_R = 0$)

$u_R + u_C = 0$

$\Rightarrow u_C = 0$

b) Réduction canonique

On pose sur l'équation différentielle $\boxed{\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC}u_C(t) = 0}$ (2)

$$\boxed{\frac{d^2u_C}{dt^2} + 2\lambda\frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C(t) = 0} \text{ (a)} \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C(t) = 0} \text{ (b)}$$

$2\lambda = \frac{R}{L}$ $\boxed{\lambda = \frac{R}{2L}}$ Coefficient d'amortissement
(en s^{-1}

$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ $\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$ Pulsation propre
(en $rad.s^{-1}$

) entre (2) et (a) par identification

$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L}$ $\boxed{Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}}$ Facteur de qualité
(sans dimension

) entre (2) et (b) par identification

(1) (2)

Rmq : • $Q = \frac{L\omega_0}{R} \times \frac{\omega_0}{\omega_0} = \frac{L\omega_0^2}{R\omega_0}$

$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow Q = \frac{L}{LC} \times \frac{1}{R\omega_0}$

$\boxed{Q = \frac{1}{RC\omega_0}}$ (1)

• $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{L}{R} \times \frac{1}{\sqrt{LC}}$

$\boxed{Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}}$ (2)

Identification entre (a) et (b) :

$2\lambda = \frac{\omega_0}{Q} \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{\omega_0}{2Q}}$ (c)

2.) Les solutions

On remplace la fonction par 1, la dérivée première par r, la dérivée seconde par r^2.

Equation caractéristique $\boxed{r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0}$ équation du second degré du type $ar^2 + br + c = 0$ dont on cherche les racines.

Discriminant : $(\Delta = b^2 - 4ac)$ $\boxed{\Delta = 4\lambda^2 - 4\omega_0^2} = 4(\lambda^2 - \omega_0^2) = 4(\lambda - \omega_0)(\lambda + \omega_0)$

$\Delta > 0$ $\boxed{\lambda > \omega_0}$

$\lambda = \frac{\omega_0}{2Q} \Rightarrow \frac{\omega_0}{2Q} > \omega_0 \Rightarrow 2Q < 1$

$\Rightarrow \boxed{Q < \frac{1}{2}}$

$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ $\quad \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow 2\sqrt{\frac{L}{C}} < R \Rightarrow \boxed{R > R_c}$

où $\boxed{R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}}}$ Résistance critique

racines $r = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ $\quad r = \frac{-2\lambda \pm \sqrt{\Delta}}{2}$

$r = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$

$\Delta = 0$: $\boxed{\lambda = \omega_0}$ ou $\boxed{Q = \frac{1}{2}}$ ou $\boxed{R = R_c}$

1 racine double $\boxed{r = -\lambda}$ réelle

$\Delta < 0$: $\boxed{\lambda < \omega_0}$ ou $\boxed{Q < \frac{1}{2}}$ ou $\boxed{R < R_c}$

racine $r = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ ⚠ (j en physique $= i$ en maths)

$r = \frac{-2\lambda \pm j\sqrt{-\Delta}}{2}$

$r = -\lambda \pm j\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$

$\boxed{\Omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}} = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$

$\boxed{r = -\lambda \pm j\Omega}$

2 racines complexes

a) Cas $\Delta < 0$: Régime pseudopériodique

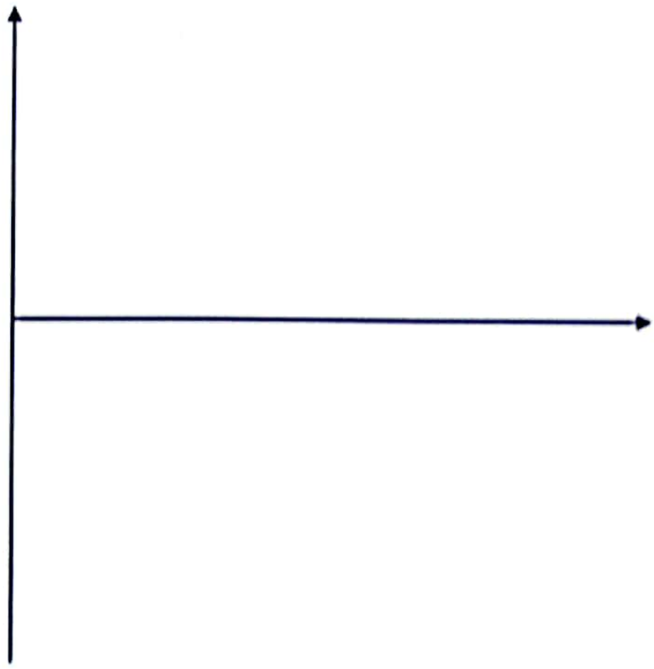
$\boxed{\lambda < \omega_0 \text{ ou } Q > \frac{1}{2} \text{ ou } R < R_c}$

2 solutions complexes r_1 et r_2 de la forme $r = \frac{-b \pm j\sqrt{-\Delta}}{2a}$ $\quad \boxed{r = -\lambda \pm j\Omega}$ partie réelle

$\boxed{\Omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}$ > 0 Pseudo-pulsation en rad.s^{-1}

Après calculs, on trouve : $\boxed{u_C(t) = \exp(-\lambda t)\cdot[a\cos(\Omega t) + b\sin(\Omega t)] = A\exp(-\lambda t)\cos(\Omega t + \varphi)}$

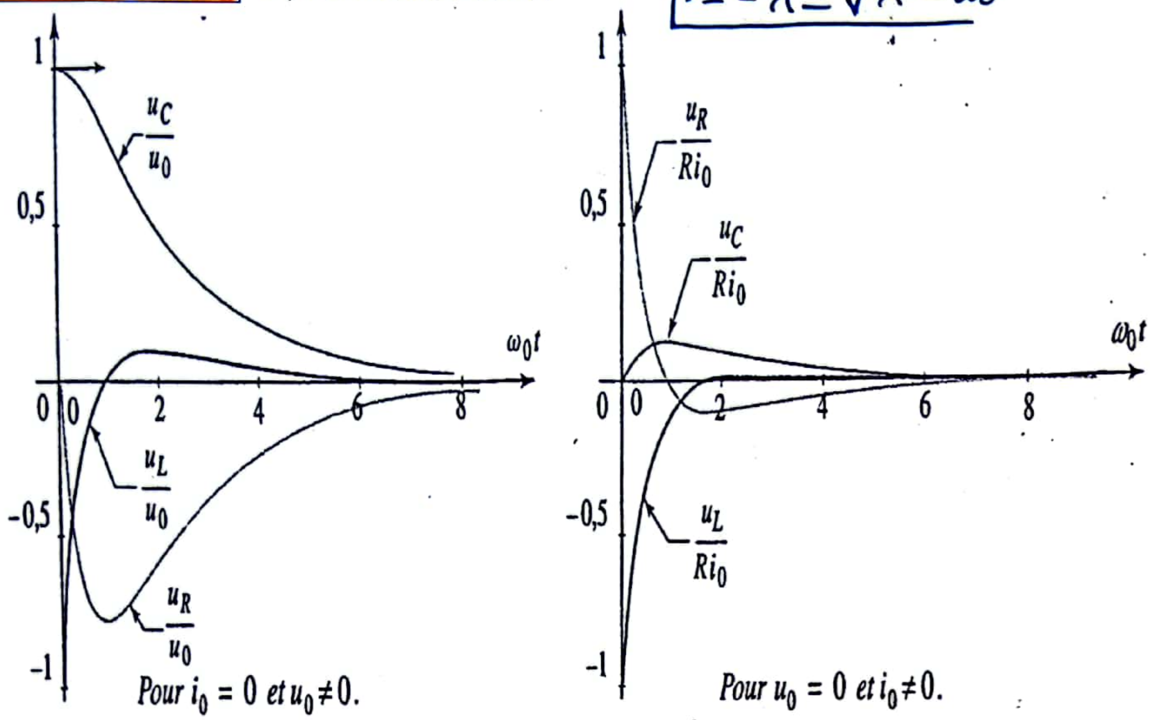
où a, b, A et φ sont des constantes réelles, déterminées par les conditions initiales.



b) Δ > 0 Régime apériodique 2 solutions réelles r_1 et r_2 $\boxed{\lambda > \omega_0}$ ou $\boxed{Q < \frac{1}{2}}$ ou $\boxed{R > R_c}$

$u_C(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$ A, B constantes réelles.

$\boxed{r = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}}$

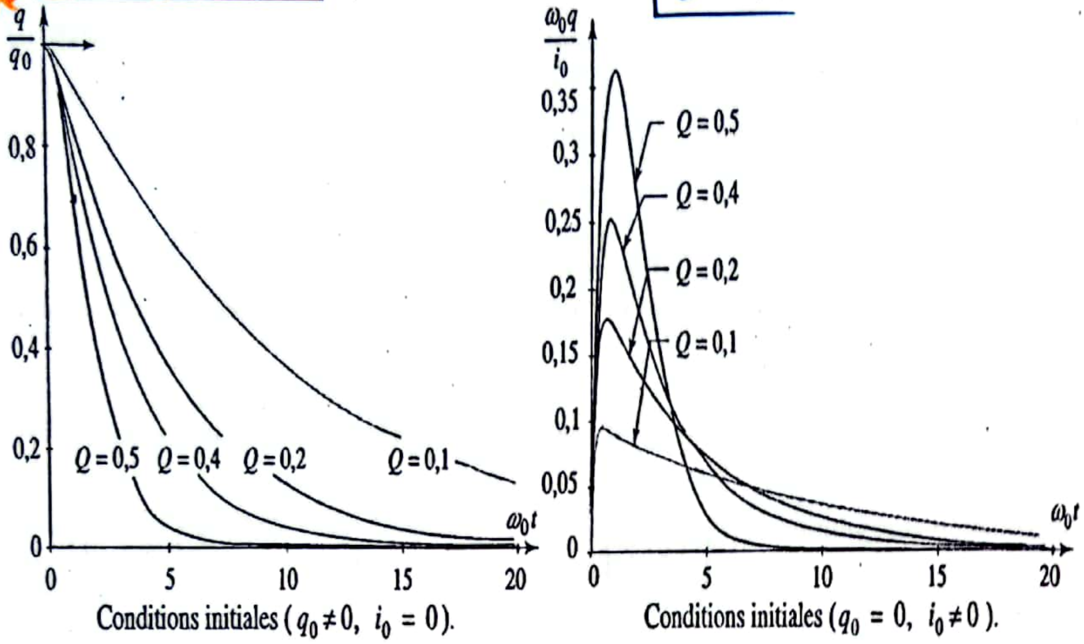


Doc. 15. d.d.p. *aux bornes des trois dipôles : régimes apériodiques* $Q = 0{,}4$.

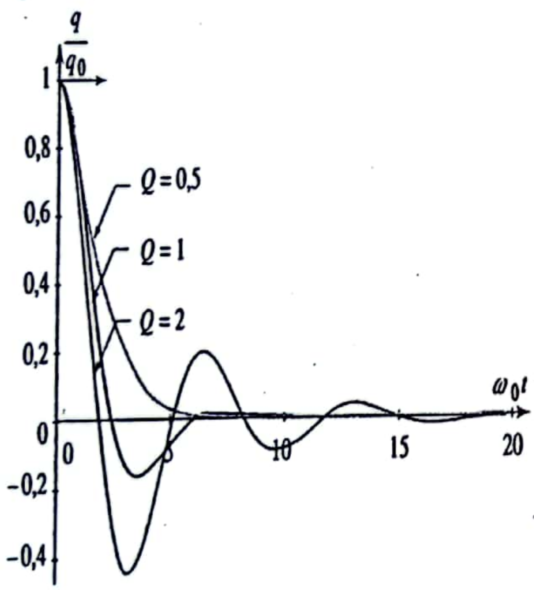
Scanné avec CamScanner

c) $\Delta = 0$: Régime critique 1 solution double réelle r_0 $\boxed{Q = \frac{1}{2}}$ ou $\boxed{\lambda = \omega_0}$ ou $\boxed{R = R_C}$

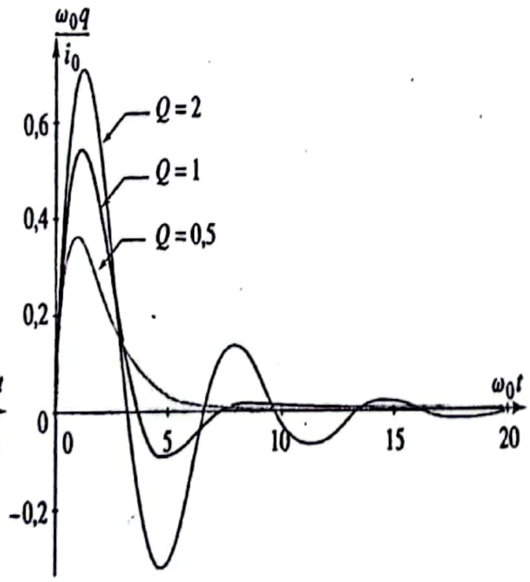
$u_c(t) = (At + B)e^{-\lambda t}$ A, B constantes réelles. $r_0 = -\lambda$



Doc. 14. *Régimes apériodique ($Q < 0{,}5$) et critique ($Q = 0{,}5$).*



Doc. 20. *Régimes pseudo-périodique et critique. Condensateur initialement chargé $i(0) = 0$.*



Doc. 21. *Régimes pseudo-périodique et critique. Intensité initiale i_0 dans le circuit.*