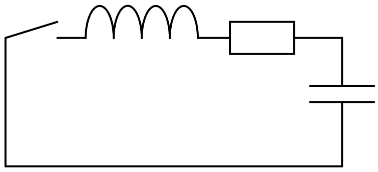
Signaux Electriques SE4 Oscillateurs amortis en régime transitoire



I Le circuit RLC série en régime libre

1.) Mise en équation

a) Equation différentielle

b) Réduction canonique

On pose sur l'équation différentielle $\boxed{\frac{d^2u_C}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{du_C}{dt}+\frac{1}{LC}u_C(t)=0}$

$\boxed{\frac{d^2u_C}{dt^2}+2\lambda\frac{du_C}{dt}+\omega_0^2u_C(t)=0}$ ou $\boxed{\frac{d^2u_C}{dt^2}+\frac{\omega_0}{Q}\frac{du_C}{dt}+\omega_0^2u_C(t)=0}$

$2\lambda=\frac{R}{L}$ $\boxed{\lambda=\frac{R}{2L}}$ Coefficient d'amortissement

$\omega_0^2=\frac{1}{LC}$ $\boxed{\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}}$ Pulsation propre

$\frac{\omega_0}{Q}=\frac{R}{L}$ $\boxed{Q=\frac{L\omega_0}{R}=\frac{1}{RC\omega_0}=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}}$ Facteur de qualité

2.) Les solutions

On remplace la fonction par 1, la dérivée première par r, la dérivée seconde par r^2.

Equation caractéristique $\boxed{r^2 + 2\lambda\, r + \omega_0^2 = 0}$ équation du second degré du type $ar^2 + br + c = 0$ dont on cherche les racines. Discriminant : ($\Delta = b^2 - 4ac$) $\boxed{\Delta = 4\lambda^2 - 4\omega_0^2}$

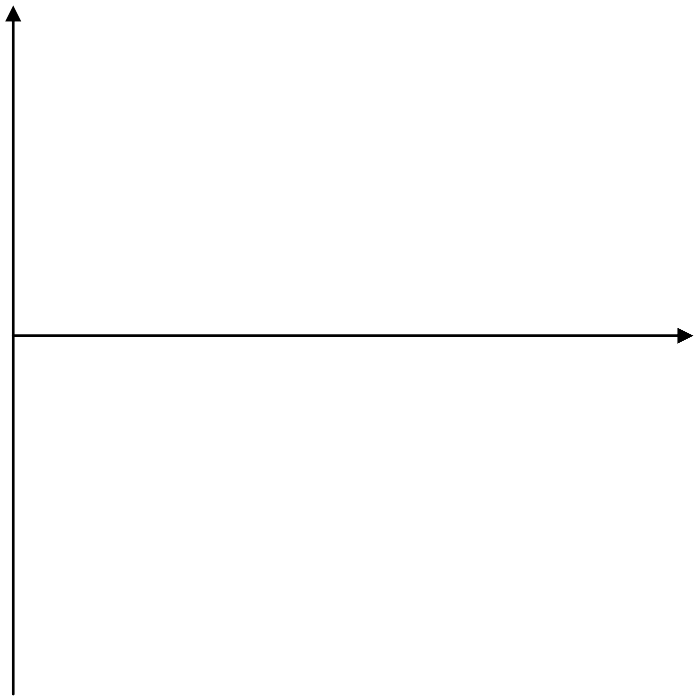
a) Cas $\Delta < 0$: Régime pseudopériodique $\boxed{\lambda < \omega_0 \text{ ou } Q > \frac{1}{2} \text{ ou } R < R_C}$

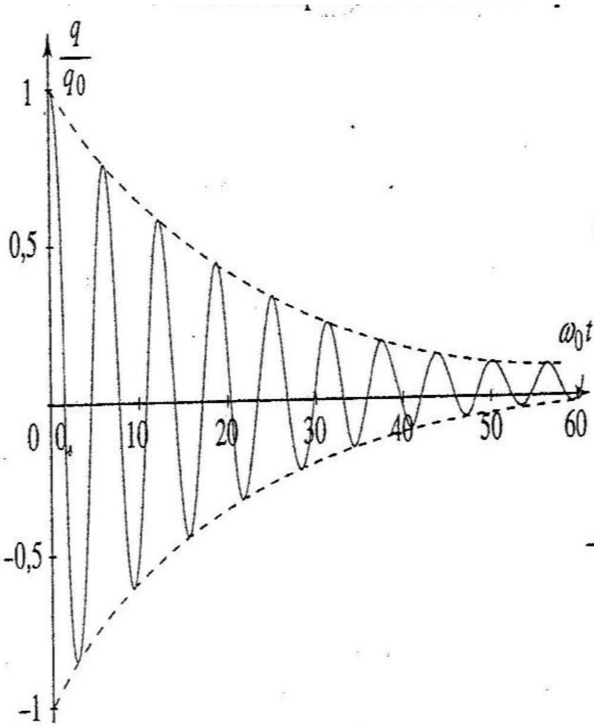
2 solutions complexes r_1 et r_2 de la forme $r = \dfrac{-b \pm j\sqrt{-\Delta}}{2a}$ $\boxed{r = -\lambda \pm j\Omega}$

$\boxed{\Omega = \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2} = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}$ Pseudo-pulsation

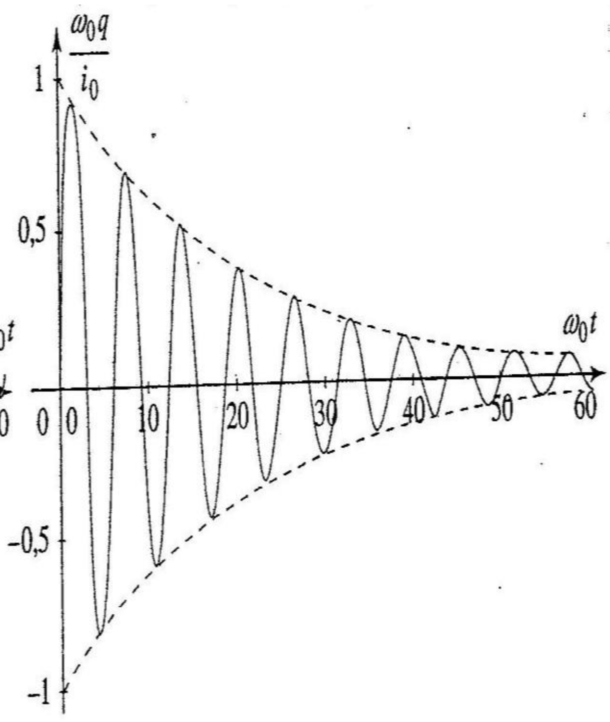
Après calculs, on trouve : $\boxed{u_C(t) = \exp(-\lambda t)\cdot\left[a\cos(\Omega t) + b\sin(\Omega t)\right] = A\exp(-\lambda t)\cos(\Omega t + \varphi)}$

où a, b, A et φ sont des constantes réelles, déterminées par les conditions initiales.





Doc. 18. *Régime pseudo-périodique.* $Q = 10$; $q(0) = q_0$ *et* $i(0) = 0$.

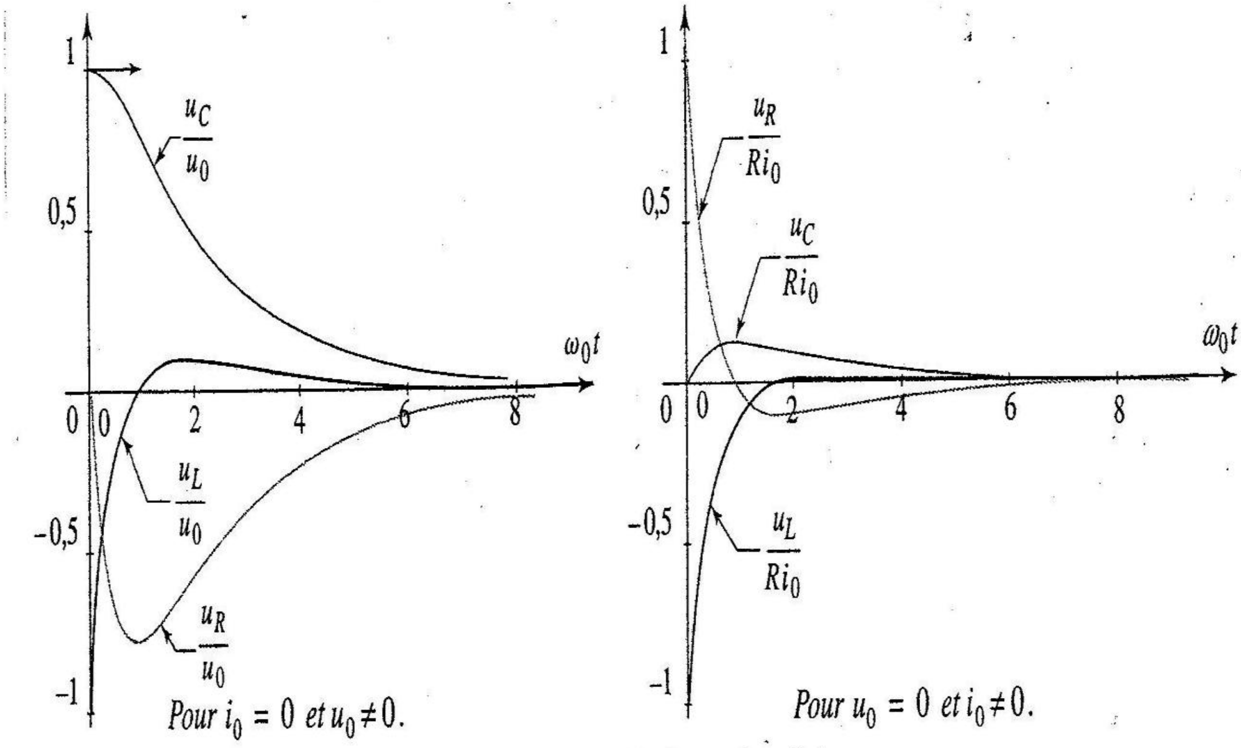


Doc. 19. *Régime pseudo-périodique.* $Q = 10$; $q(0) = 0$ *et* $i(0) = i_0$.

Remarques: 1) La pseudo-période est plus grande que la période propre. $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} < \omega_0$ donc $T > T_0$.

<u>b) Δ > 0 Régime apériodique</u> 2 solutions réelles r_1 et r_2 $\boxed{\lambda > \omega_0}$ ou $\boxed{Q < \frac{1}{2}}$ ou $\boxed{R > R_C}$

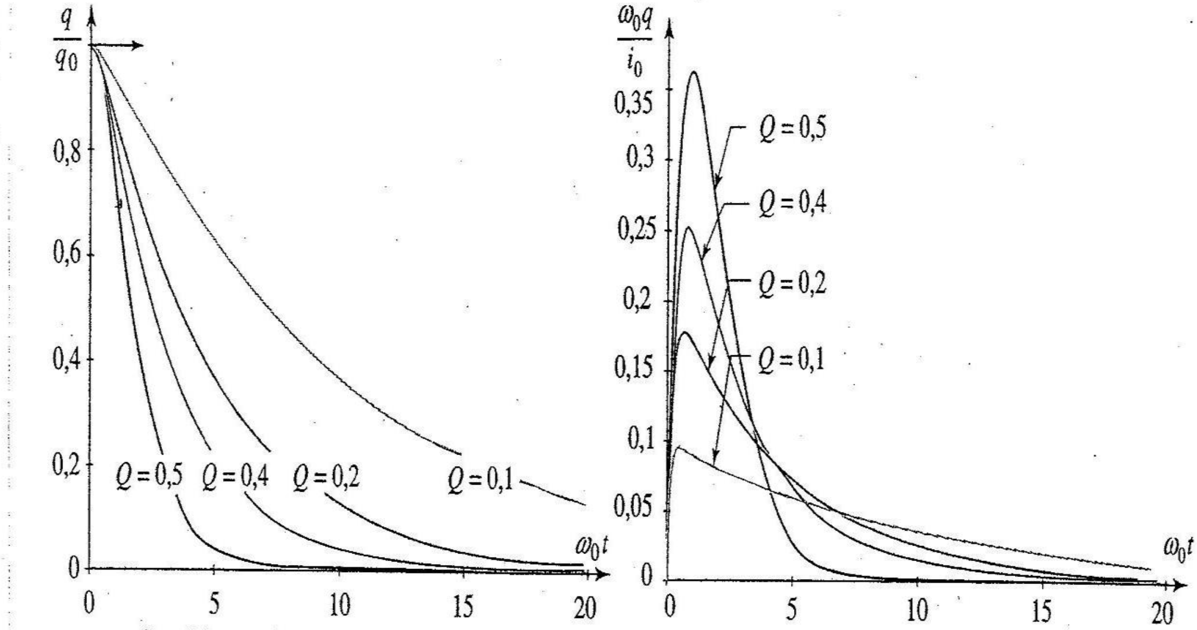
$\boxed{u_C(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}}$ A, B constantes réelles.



Doc. 15. d.d.p. *aux bornes des trois dipôles : régimes apériodiques* $Q = 0,4$.

<u>c) Δ = 0 : Régime critique</u> 1 solution double réelle r_0 $\boxed{Q = \frac{1}{2}}$ ou $\boxed{\lambda = \omega_0}$ ou $\boxed{R = R_C}$

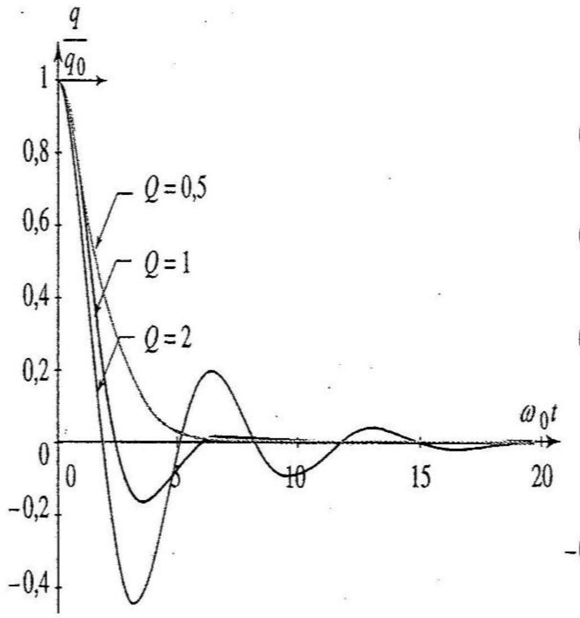
$\boxed{u_C(t) = (At + B)e^{-\lambda t}}$ A, B constantes réelles.



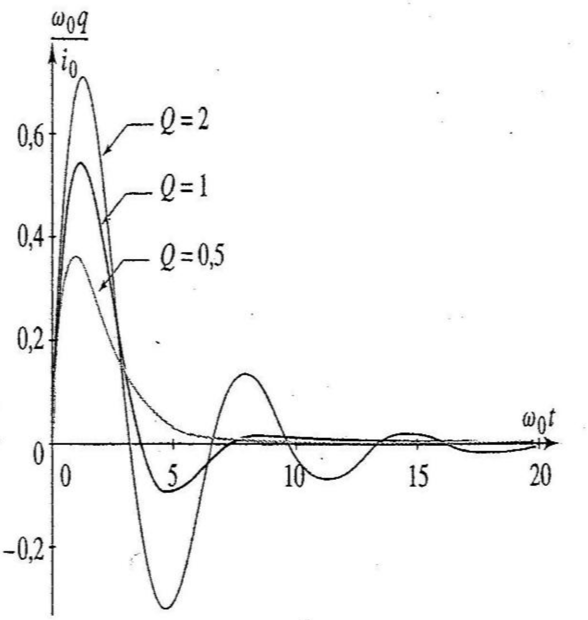
Conditions initiales ($q_0 \neq 0$, $i_0 = 0$).

Conditions initiales ($q_0 = 0$, $i_0 \neq 0$).

Doc. 14. *Régimes apériodique* ($Q < 0{,}5$) *et critique* ($Q = 0{,}5$).



Doc. 20. *Régimes pseudo-périodique et critique. Condensateur initialement chargé* $i(0) = 0$.



Doc. 21. *Régimes pseudo-périodique et critique. Intensité initiale* i_0 *dans le circuit.*

II Réponse à un échelon de tension

1.) Les équations différentielles

Généralisation : Commande f(t) Réponse y(t)

$\boxed{a_0 y + a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} = f(t)}$ Equation différentielle du second ordre (**ou du premier ordre si a_2=0**)

Solution complète : $\boxed{y(t) = y_\ell(t) + y_f(t)}$

● $y_\ell(t)$ est la solution libre ou solution générale de l'équation sans second membre (ou équation homogène)

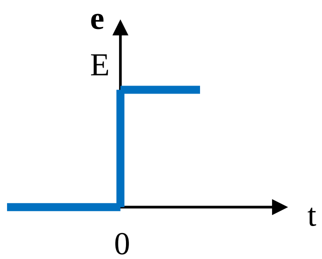
$$a_0 y_\lambda + a_1 \frac{dy_\lambda}{dt} + a_2 \frac{d^2 y_\lambda}{dt^2} = 0$$

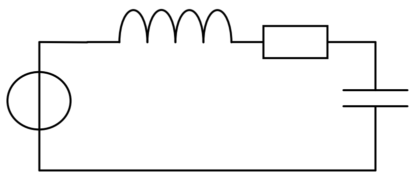
Elle correspond au régime libre du circuit (c'est-à-dire sources éteintes).

● $y_f(t)$ est la solution forcée ou solution particulière de l'équation avec second membre (ou équation complète) $a_0 y_f + a_1 \frac{dy_f}{dt} + a_2 \frac{d^2 y_f}{dt^2} = f(t)$

Elle correspond au régime permanent. Elle est du même type que le second membre : Si f(t) est une constante, $y_f(t)$ est aussi une constante.

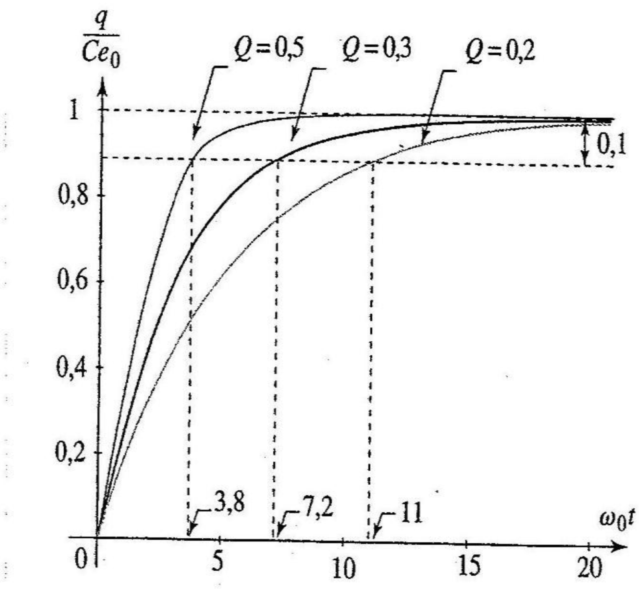
2.) Mise en équation et résolution



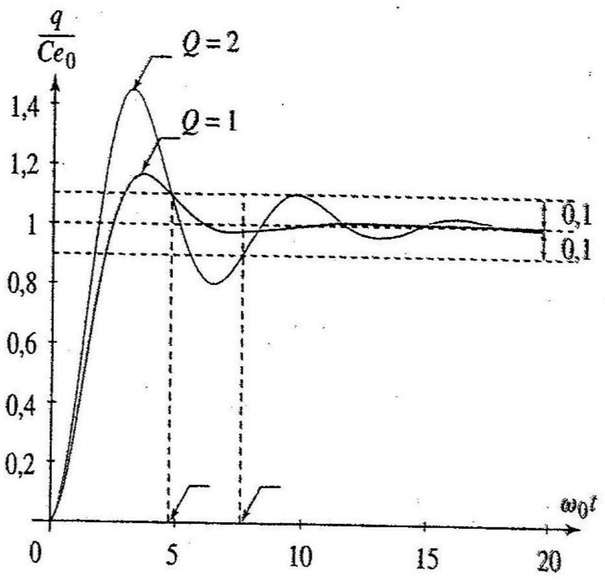


$\Delta < 0 \quad u_C(t) = \exp(-\lambda t) \cdot \left[A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right] + E = K\exp(-\lambda t)\cos(\Omega t + \varphi) + E$
$\Delta > 0 \quad u_C(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$+E
$\Delta = 0 \quad u_C(t) = (At + B)e^{-\lambda t} + E$

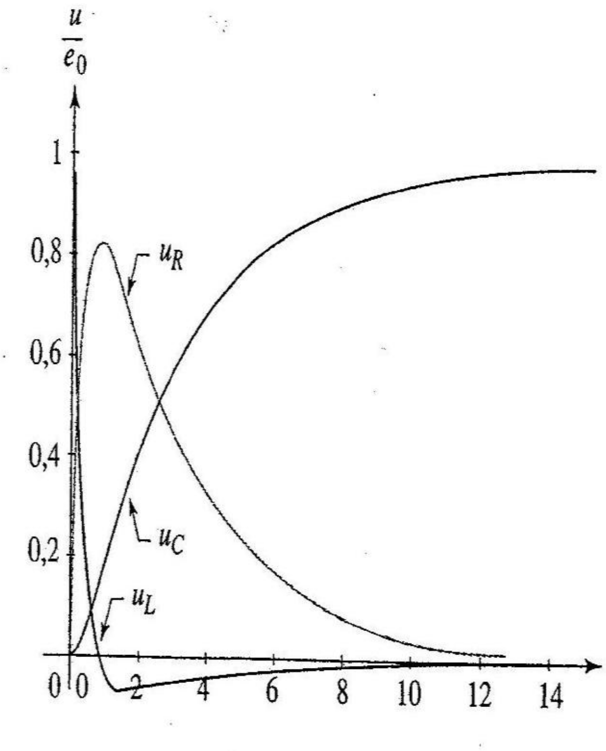
3.) Les résultats



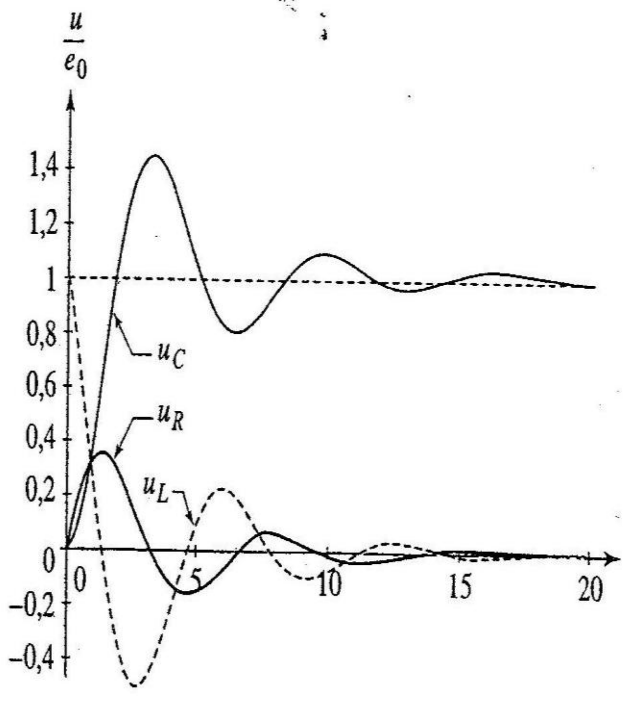
Doc. 35a. *Réponse à un échelon de tension. Régimes apériodiques.*



Doc. 36a. *Réponse à un échelon de tension. Régimes pseudo-périodiques.*



Doc. 35c. *Réponse à un échelon de tension. Q = 0,3.*



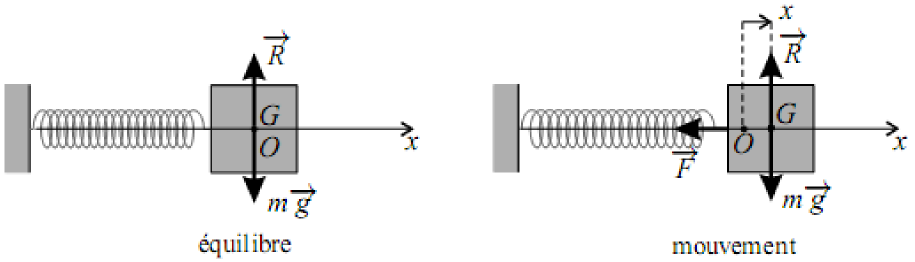
Doc. 36c. *Réponse à un échelon de tension. Q = 2.*

4.) Bilan énergétique

III Oscillateur amorti avec frottement visqueux

1.) Mise en équation

https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Meca/Oscillateurs/oscillateur_horizontal.php



$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\alpha}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{k}{m}x=0}$ Formes canoniques : $\boxed{\frac{d^2x}{dt^2}+2\lambda\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0}$ ou $\boxed{\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\omega_0}{Q}\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0}$

Pulsation propre	Coefficient d'amortissement	Facteur de qualité

2.) Analogie électromécanique

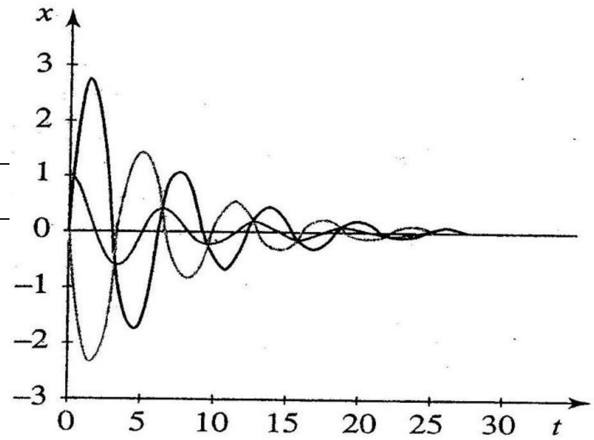
Mécanique	Electricité
Equation différentielle :	
Pulsation propre :	
Facteur de qualité	
Elongation :	
Vitesse :	
Masse :	
Coefficient de frottement fluide :	
Raideur du ressort :	
Energie mécanique :	

3.) Solutions

a) Régime pseudo-périodique

Δ<0	$\lambda < \omega_0$	ou	$Q > \frac{1}{2}$

$$\boxed{x(t) = \exp(-\lambda t) \cdot \left[A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right] = K\exp(-\lambda t)\cos(\Omega t + \varphi)}$$



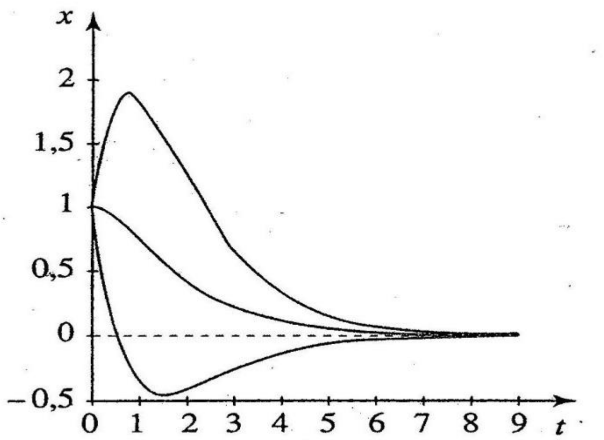
Doc. 12. *Oscillateur harmonique amorti par frottement fluide : régime pseudo-périodique* $\left(Q > \frac{1}{2}\right)$.

Le mobile est lâché en $x = x_0$ *avec une vitesse* v_0 *positive, nulle ou négative pour les trois cas apparaissant sur la figure.*

b) Régime apériodique

Δ>0	$\lambda > \omega_0$	ou	$Q < \frac{1}{2}$

$$\boxed{x(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}}$$

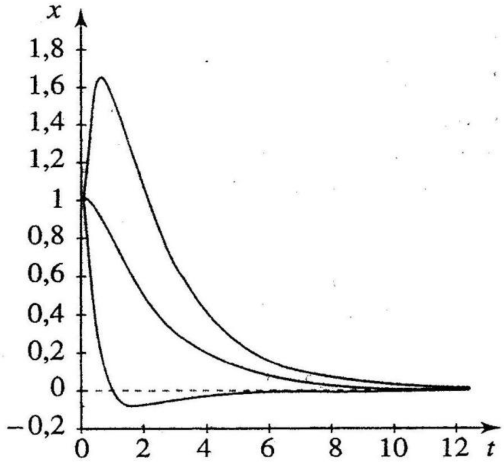


Doc. 17. *Oscillateur harmonique amorti par frottement fluide : régime apériodique* $\left(Q < \frac{1}{2}\right)$ *suivant les conditions initiales, l'élongation passe par un extremum ou tend uniformément vers zéro.*

c) Régime critique

$\Delta=0 \quad \lambda = \omega_0 \quad$ ou $\quad Q = \frac{1}{2}$

$\boxed{x(t) = (At + B)e^{-\lambda t}}$



Doc. 15. *Oscillateur harmonique amorti par frottement fluide : régime critique* $\left(Q = \frac{1}{2}\right)$. *Les conditions initiales sont les mêmes que celles du mouvement pseudo-périodique* (*doc.* 12). *Dans tous les cas, le retour à l'équilibre s'effectue plus rapidement.*

4.) Bilan énergétique