Résumé de cours SE5 Oscillateurs en régime sinusoïdal forcé

Représentation complexe $j^2 = -1$ et $j = \exp(j\pi/2)$

$\underline{z} = x + jy$ $\quad |\underline{z}| = \sqrt{x^2+y^2}$ $\quad \underline{z} = |\underline{z}|.\left[\frac{x}{|\underline{z}|} + j\frac{y}{|\underline{z}|}\right]$

$\underline{z} = |\underline{z}|e^{j\varphi} = |\underline{z}|[cos\varphi + jsin\varphi]$ donc $cos\varphi = \frac{x}{|\underline{z}|}$ $\quad sin\varphi = \frac{y}{|\underline{z}|}$ $\quad tan\varphi = \frac{y}{x}$

Hypothèses : Dipôle linéaire passif en convention récepteur

parcouru par $i(t) = Im\cos(\omega t+\varphi_i)$ $\quad \underline{i}(t) = Im\exp[j(\omega t+\varphi_i)] = \underline{Im}\exp(j\omega t)$ $\quad$ où $\underline{Im} = Im\exp(j\varphi_i)$

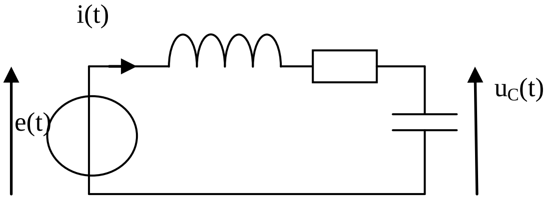
à ses bornes $u(t) = Um\cos(\omega t+\varphi_u)$ $\quad \underline{u}(t) = Um\exp[j(\omega t+\varphi_u)] = \underline{Um}\exp(j\omega t)$ $\quad$ où $\underline{Um} = Um\exp(j\varphi_u)$

Impédance complexe du dipôle $\boxed{\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}}}$ $\quad$ Admittance complexe du dipôle $\boxed{\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{\underline{i}}{\underline{u}}}$

Résistor : $\underline{Z}_R = R$ $\quad$ Bobine idéale : $\underline{Z}_L = jL\omega$ $\quad$ Condensateur parfait : $\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$

I Le cricuit RLC série

1) Etude de l'intensité

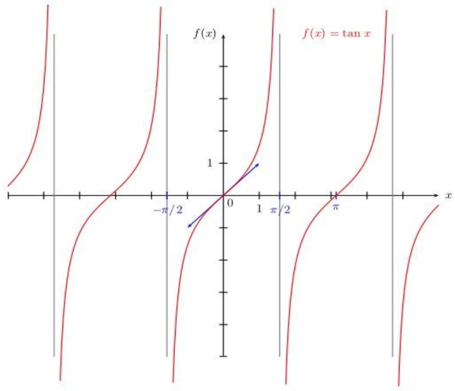


$e(t) = Em\cos(\omega t)$ $\quad \underline{e} = Em\, e^{j\omega t}$

$i(t) = Im\cos(\omega t+\varphi_i)$ $\quad \underline{i} = \underline{Im}\, e^{j\omega t}$

Equation de maille en complexe : $\frac{\underline{i}}{\underline{e}} = \frac{\underline{Im}}{Em} = \frac{1}{R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})}$

puis on étudie le module et l'argument en fonction de ω.



Equation différentielle : $\boxed{\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{di}{dt} + \omega_0^2 i(t) = \frac{1}{L}\frac{de}{dt}}$ à retrouver

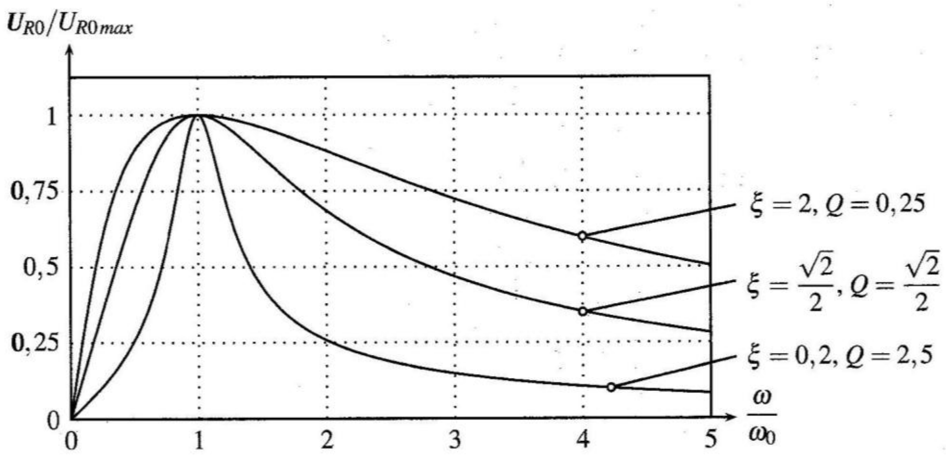
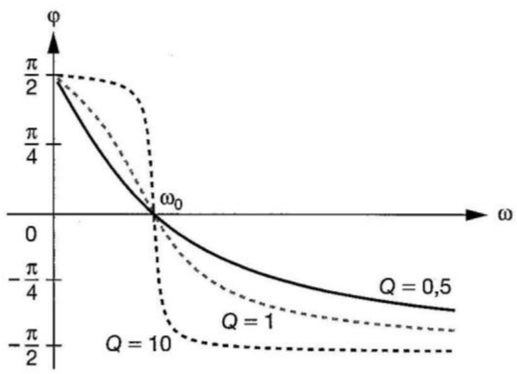


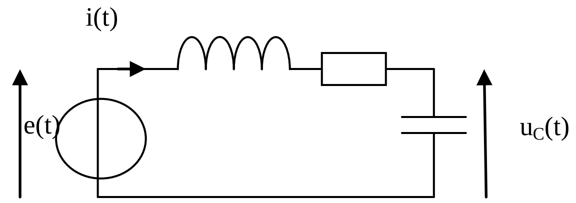
Figure 10.17 – Rapports de l'amplitude de u_R à sa valeur maximale (R variable).



Bande passante à -3dB : Intervalle de pulsation pour lequel $I_m \geq \frac{I_{mr}}{\sqrt{2}}$

$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q}$ $\quad \varphi = \mp\frac{\pi}{4}$ $\quad Im_r$: amplitude de l'intensité à la résonance.

2) Etude de la tension aux bornes du condensateur



e(t)=Em cos (ωt) $\underline{e} = Em\, e^{j\omega t}$

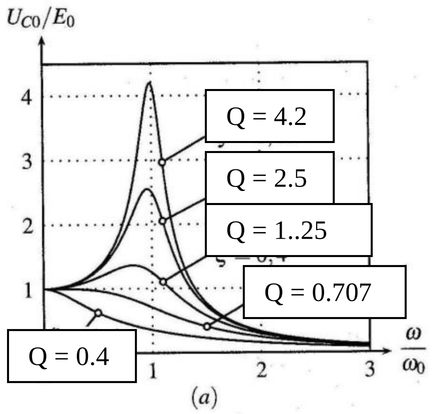
$u_C(t)$ = Ucm cos (ωt+φ_u) $\underline{u_C} = \underline{Ucm}\, e^{j\omega t}$

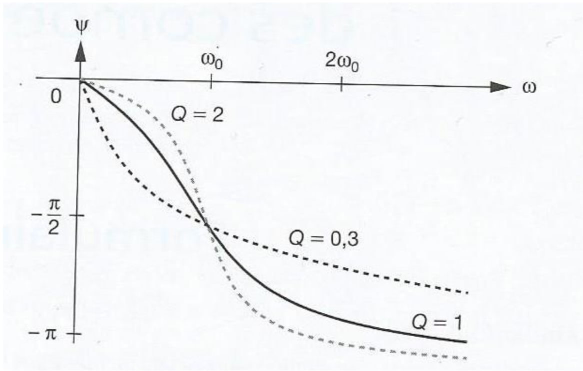
Pont diviseur de tension : $\frac{\underline{u_C}}{\underline{e}} = \frac{\underline{Ucm}}{Em} = \frac{1}{1-LC\omega^2+jRC\omega}$

Retrouver $\boxed{\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C(t) = \omega_0^2 e(t)}$

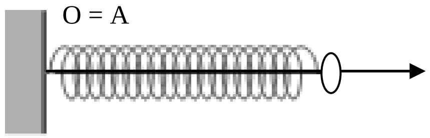
$\frac{\underline{Ucm}}{Em} = \frac{1}{1-x^2+j\frac{x}{Q}}$ où $x = \frac{\omega}{\omega_0}$

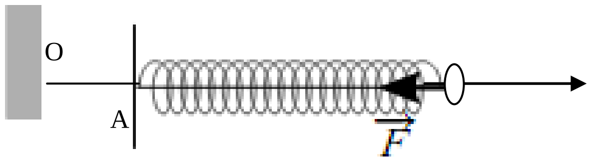
Figure 10.19 – Étude de la résonance aux bornes du condensateur





II L'oscillateur harmonique amorti





$\boxed{\ell = x_M - x_A \text{ et } x_1 = x_M - \ell_0}$

Force de frottement fluide : $\vec{F_f} = -\alpha\vec{v}$

Force de rappel du ressort : $\vec{F_r} = -k(\ell-\ell_0)\vec{e}_x$

$\boxed{\frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{\alpha}{m}\frac{dx_1}{dt} + \frac{k}{m}x_1 = \frac{k}{m}x_A}$ $\boxed{\frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{dx_1}{dt} + \omega_0^2 x_1 = \omega_0^2 x_A}$

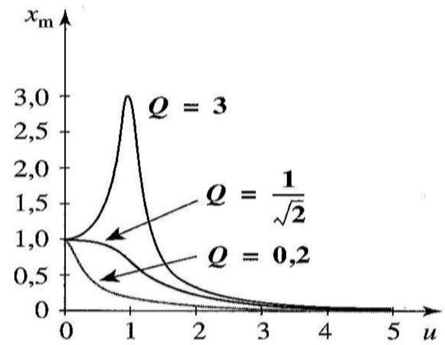
x_A (t) = A cos (ωt) donc $\underline{x_A} = Ae^{j\omega t}$

x_1 (t) = Xm cos (ωt+φ) donc $\underline{x_1} = \underline{X}e^{j\omega t}$: mêmes courbes que u_C

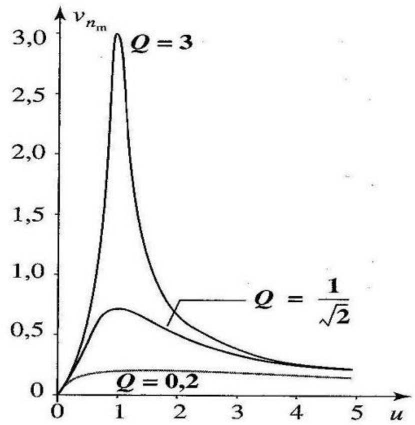
$\frac{\underline{X}}{A} = \frac{1}{1-u^2+j\frac{u}{Q}}$ où $u = \frac{\omega}{\omega_0}$

$v = \frac{dx_1}{dt}$ donc $\underline{V} = j\omega\underline{X}$ même courbe de phase que i

$$\frac{\underline{V}}{A} = \frac{\omega_0 Q}{1+jQ(u-\frac{1}{u})}$$



Doc. 8. *Variation de l'amplitude normalisée $x_{n_m} = \frac{x_m}{x_{A_m}}$ de la réponse en élongation en fonction de $u = \frac{\omega}{\omega_0}$ pulsation normalisée de l'excitation pour différents amortissements.*



Doc. 12. *Variation de l'amplitude : $v_{n_m} = \frac{v_m}{\omega_0 x_{A_m}}$ de la réponse en vitesse en fonction de la pulsation normalisée $u = \frac{\omega}{\omega_0}$ de l'excitation, pour différents*