

I Le régime sinusoïdal forcé	2
1.) Exemple : Circuit RLC série.....	2
2.) Méthode de résolution	2
3.) Représentation d'une grandeur sinusoïdale	3
II Circuits électriques en régime sinusoïdal forcé.....	4
1.) Position du problème	4
2.) Impédances et admittances	5
III Le circuit RLC série. Etude de l'intensité.....	7
IV Le circuit RLC série. Etude de la tension aux bornes du condensateur	9
V L'oscillateur harmonique amorti	11

Millennium Bridge (Londres) [https://fr.wikipedia.org/wiki/Millennium_Bridge_\(Londres\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Millennium_Bridge_(Londres))

Le pont a été inauguré le 10 juin 2000, avec deux mois de retard et un supplément de 2,2 millions de livres sur un budget initial de 18,2 millions de livres. Cependant il a dû être fermé au public deux jours plus tard, en raison d'un phénomène de résonance, le pont oscillant latéralement de façon imprévue. Ce jour-là, une marche caritative devant traverser le pont attira beaucoup de monde. Les mouvements de balancement furent provoqués par le grand nombre de piétons (90 000 personnes le premier jour avec jusqu'à 2 000 personnes en même temps sur le pont). Les premières vibrations encourageaient et parfois obligeaient les piétons à marcher au rythme du balancement, ce qui accentua les oscillations, même en début de journée lorsque le pont était relativement peu chargé.



Ce mouvement de balancement lui a valu le surnom de *Wobbly Bridge* (pont bancal). Les mesures prises pour limiter le nombre de personnes traversant le pont ont entraîné de longues files d'attente, mais n'ont atténué ni l'enthousiasme du public pour ce *manège qui décoiffe*, ni les vibrations elles-mêmes. La fermeture du pont après seulement trois jours d'ouverture a été sévèrement critiquée par le public, qui associait ce retard à celui dont avait souffert le Dôme de Millenium.

Les phénomènes de résonance des ponts suspendus avaient été bien étudiés depuis la catastrophe du pont du détroit de Tacoma (Washington, États-Unis). Néanmoins peu d'attention avait été prêtée au mouvement latéral produit par des piétons, provoqué par la réaction humaine à des petits mouvements latéraux dans le pont, entraînant un mouvement de pulsion qui n'avait pas été anticipé dans l'analyse statistique avant la construction. On a pensé que le profil exceptionnellement bas des câbles de suspension a contribué au problème, mais une étude menée par des ingénieurs prouve que l'oscillation peut se produire sur n'importe quel pont à suspension ou autre, soumis à un grand mouvement de foule.

Le problème a été résolu par l'installation d'amortisseurs hydrauliques et de masse pour contrôler les oscillations horizontales et latérales. Les travaux ont été menés de mai 2001 à janvier 2002. Après une période d'essai, le pont a été rouvert au public le février 2002 ; depuis, aucune vibration importante n'a été signalée.

Pont du détroit de Tacoma (1940) [https://fr.wikipedia.org/wiki/Pont_du_d%C3%A9troit_de_Tacoma_\(1940\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Pont_du_d%C3%A9troit_de_Tacoma_(1940))

Le **pont du détroit de Tacoma** ou **pont de Tacoma**, est un pont suspendu qui reliait les villes de Tacoma et de Gig Harbor dans l'État de Washington. Inauguré le 1^{er} juillet 1940, il s'effondra le 7 novembre 1940 lors d'un des plus célèbres accidents de génie civil, sans avoir fait toutefois de victimes.

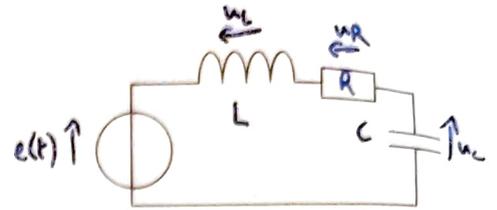
Lors de la rupture de l'ouvrage, la vitesse du vent était d'environ 65 km/h. Des oscillations de grande amplitude en torsion sont apparues à 10 h, menant à l'effondrement du pont à 11 h 10. Le pont avait été dimensionné pour résister au vent, mais en ne tenant compte que des effets statiques¹. En raison du couplage aéroélastique, un échange d'énergie mécanique se produit entre le vent et le pont qui oscille. On dit que le pont est stable lorsque l'énergie mécanique est transférée du pont vers le vent qui la dissipe. Lorsqu'un événement extérieur engendre une petite oscillation initiale, par exemple le passage d'un camion ou une rafale de vent, alors cette oscillation va s'amortir. De plus, le vent n'est jamais parfaitement constant : les petites variations de vitesse autour de la vitesse moyenne suffisent à produire de petites oscillations. Mais si la vitesse moyenne du vent est suffisamment élevée, au-dessus de ce que l'on appelle la « vitesse critique », le pont est instable, et l'oscillation initiale s'amplifie. L'énergie se transfère alors du vent vers le pont, et les oscillations s'amplifient en raison du couplage aéroélastique, jusqu'à la ruine. Ce mécanisme n'était connu en 1940 que pour les structures d'avions (ailes, fuselage, empennage...), personne n'avait alors envisagé ce scénario pour des ponts suspendus³.

Pont de la Maine Angers : https://fr.wikipedia.org/wiki/Pont_de_la_Basse-Chaîne#La_catastrophe_de_1850

1 Le régime sinusoïdal forcé

1.) Exemple : Circuit RLC série

<https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Elec/Filtres/filtre.php>



$$e(t) = E_m \cos(\omega t + \varphi_e)$$

On prend $e(t)$ comme référence de phase, $\varphi_e = 0$

$$\Rightarrow e(t) = E_m \cos(\omega t)$$

Eq de maille, équa diff sur u_C , puis sur i

$$e(t) = u_L + u_R + u_C$$

$$e(t) = LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{d u_C}{dt} + u_C$$

$$\boxed{\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{d u_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C = \frac{1}{LC} e(t)} \quad (1)$$

$$\frac{\dot{i}}{C} = \frac{d u_C}{dt}$$

$$\frac{d e(t)}{dt} = \frac{d u_C}{dt} + \frac{d u_R}{dt} + \frac{d u_C}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d e(t)}{dt} = L \frac{d^2 \dot{i}}{dt^2} + R \frac{d \dot{i}}{dt} + \frac{\dot{i}}{C}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2 \dot{i}}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{d \dot{i}}{dt} + \frac{1}{LC} \dot{i} = \frac{1}{L} \frac{d e(t)}{dt}} \quad (1')$$

Le second membre pas constant

2.) Méthode de résolution

On considère un système linéaire, soumis à une excitation sinusoïdale $e(t) = E_m \cos(\omega t)$

La réponse $s(t)$ est donnée par une équation différentielle linéaire à coefficients constants :

$$a_0 s + a_1 \frac{ds}{dt} + a_2 \frac{d^2 s}{dt^2} = f(t)$$

où $f(t)$ est une fonction connue de l'excitation $e(t)$ et de ses dérivées temporelles : $f(t) = F_m \cos(\omega t + \varphi_f)$

La solution de l'équation est $s(t) = s_l(t) + s_f(t)$

- $s_l(t)$ est la solution libre ou solution générale de l'équation sans second membre (ou équation homogène)

$$a_0 s + a_1 \frac{ds}{dt} + a_2 \frac{d^2 s}{dt^2} = 0$$

Elle correspond au régime libre du circuit (c'est-à-dire sources éteintes). Elle s'amortit au bout de quelques) φ SEC temps. **On ne s'y intéressera pas dans la suite de ce chapitre.**

- $s_f(t)$ est la solution forcée ou solution particulière de l'équation avec second membre (ou équation complète) Elle correspond au régime permanent.

Elle est du même type que le second membre : **c'est donc une fonction sinusoïdale, de même pulsation que $e(t)$, indépendante des conditions initiales.** $s_f(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi_s)$

s_f correspond au régime sinusoïdal forcé. φ_s est l'avance de phase de s par rapport à e .



En régime sinusoïdal, toutes les grandeurs étudiées sont sinusoïdales de même pulsation que l'excitation.

3.) Représentation d'une grandeur sinusoïdale

a) Représentation temporelle

Grandeur sinusoïdale : $g(t) = G_m \cos(\omega t + \varphi)$

Amplitude $G_m > 0$

Valeur crête à crête (ou pic à pic) $G_{cc} = 2 G_m$

Valeur efficace (en régime sinusoïdal) $G_{eff} = \frac{G_m}{\sqrt{2}}$

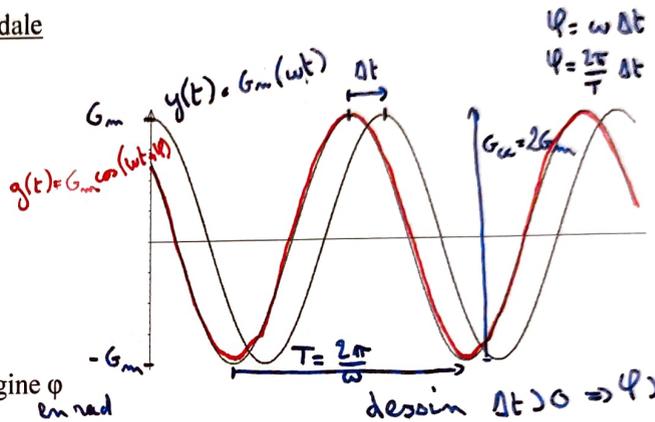
Pulsation (en rad.s^{-1}) ω imposé par le géné

Période $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Fréquence $f = \frac{1}{T}$

Phase instantanée $\omega t + \varphi$
en rad

Avance de phase à l'origine φ
en rad



$g(t)$ est en avance de phase sur $y(t)$
il passe avant par son maximum.

b) Représentation complexe

$$j^2 = -1 \text{ et } j = \exp(j\pi/2)$$

La représentation complexe de $g(t) = G_m \cos(\omega t + \varphi)$ est la fonction complexe

$$\underline{g}(t) = G_m e^{j(\omega t + \varphi)} = G_m e^{j\varphi} e^{j\omega t} = \underline{G}_m e^{j\omega t}$$

complexe

où $\underline{G}_m = G_m e^{j\varphi}$ est l'amplitude complexe de $\underline{g}(t)$. Elle est indépendante du temps.

$$\underline{g}(t) = G_m [\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)]$$

$$g(t) = \text{Re}(\underline{g}(t))$$

Module de \underline{G}_m : $|\underline{G}_m| = G_m$ est l'amplitude de $g(t)$

$$|\underline{G}_m| = |G_m e^{j\varphi}| = |G_m| |e^{j\varphi}|$$

Argument de \underline{G}_m : $\arg(\underline{G}_m) = \varphi$ est l'avance de phase à l'origine de $g(t)$.



Dériver une fonction complexe sinusoïdale revient à la multiplier par $j\omega$

Intégrer une fonction complexe sinusoïdale revient à la diviser par $j\omega$

$$g(t) = G_m \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{dg}{dt} = -G_m \omega \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\underline{g}(t) = G_m e^{j(\omega t + \varphi)}$$

$$\frac{d\underline{g}}{dt} = G_m \times (j\omega) e^{j(\omega t + \varphi)} = j\omega \underline{g}$$

$$j = e^{j\pi/2}$$

$$\frac{d\underline{g}}{dt} = G_m \omega e^{j(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})}$$

$$\text{Re}\left(\frac{d\underline{g}}{dt}\right) = G_m \omega \cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{dg}{dt}\right) = -G_m \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{dg}{dt}\right) = \frac{dg}{dt}$$

Primitive ($\omega t = 0$)

$$g(t) = G_m \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\int g(t) dt = \frac{G_m}{\omega} \sin(\omega t + \varphi)$$

$$g(t) = G_m e^{j(\omega t + \varphi)}$$

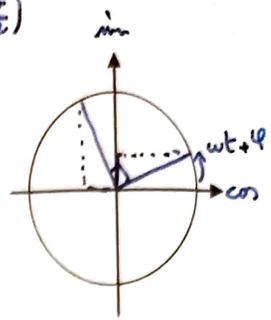
$$\int g(t) dt = \frac{1}{j\omega} G_m e^{j(\omega t + \varphi)} = \frac{g(t)}{j\omega}$$

$$\frac{1}{j} = \frac{1}{e^{j\frac{\pi}{2}}} = e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$\int g(t) dt = \frac{1}{\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}} G_m e^{j(\omega t + \varphi)} = \frac{G_m}{\omega} e^{j(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2})}$$

$$\operatorname{Re}\left(\int g(t) dt\right) = \frac{G_m}{\omega} \cos\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{G_m}{\omega} \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\operatorname{Re}\left(\int g(t) dt\right) = \int g(t) dt$$



Somme de deux fonctions de même pulsation

$$g(t) = g_1(t) + g_2(t) \sim g(t) = g_1(t) + g_2(t)$$

$$\operatorname{Re}(g(t)) = \operatorname{Re}(g_1(t) + g_2(t)) = \operatorname{Re}(g_1) + \operatorname{Re}(g_2) = g_1(t) + g_2(t)$$

⚠ Ne fonctionne pas pour 1 produit

$$\operatorname{Re}(g_1 g_2) \neq \operatorname{Re}(g_1) \operatorname{Re}(g_2)$$

Remarques :

1) La notation complexe d'un signal peut-être utilisée lorsqu'on effectue des opérations linéaires. Elle n'est pas valable pour un produit.

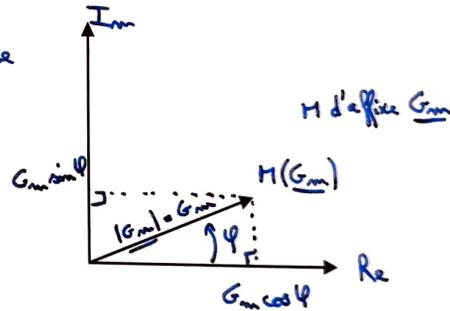
2) Représentation de Fresnel : = Représentat de l'amplitude complexe

dans le plan complexe.

$$\underline{G_m} = G_m e^{j\varphi} = G_m (\cos \varphi + j \sin \varphi)$$

$$\operatorname{Re}(\underline{G_m}) = G_m \cos \varphi$$

$$\operatorname{Im}(\underline{G_m}) = G_m \sin \varphi$$



II Circuits électriques en régime sinusoïdal forcé

1.) Position du problème

- on considère un dipôle linéaire, constitué de dipôles R, L et C en série ou en parallèle.
- on l'alimente par un générateur délivrant une excitation sinusoïdale (tension ou courant).

$$e(t) = E_m \cos(\omega t)$$

Hypothèses : Régime quasi-stationnaire

On néglige les tps de propagat° des signaux dans les fils si les dimensions du circuit sont très petites par rapport à la distance parcourue par le signal pendant 1 période.

$$(\text{= longueur d'onde } \lambda = cT = \frac{c}{f})$$

Lois de Kirchhoff Ce sont des expressions linéaires faisant intervenir i et u.

On admet que les lois de Kirchhoff s'écrivent de la même façon en utilisant la notation complexe.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Loi des nœuds : } \sum_k \varepsilon_k i_k(t) = 0 \text{ ou } \sum_k \varepsilon_k I_{km} = 0 \\ \text{Loi des mailles : } \sum_k \varepsilon_k u_k(t) = 0 \text{ ou } \sum_k \varepsilon_k U_{km} = 0 \end{array} \right.$$

en simplifiant par $e^{j\omega t}$ $\varepsilon_k = +1$ si i_k se dirige vers le nœud
 $\varepsilon_k = -1$ sinon
 $\varepsilon_k = +1$ si u_k est dans le sens choisi
 $\varepsilon_k = -1$ sinon

$\Delta p = j\omega$
Notation de Laplace

2.) Impédances et admittances

a) Définitions

Hypothèses : Dipôle linéaire passif en convention récepteur

parcouru par le courant $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i) \rightsquigarrow \underline{i}(t) = I_m e^{j(\omega t + \varphi_i)} = I_m e^{j\varphi_i} e^{j\omega t} = \underline{I}_m e^{j\omega t}$

où $\underline{I}_m = I_m e^{j\varphi_i}$ est l'amplitude complexe

ayant à ses bornes la tension $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u) \rightsquigarrow \underline{u}(t) = U_m e^{j(\omega t + \varphi_u)} = U_m e^{j\varphi_u} e^{j\omega t} = \underline{U}_m e^{j\omega t}$

où $\underline{U}_m = U_m e^{j\varphi_u}$ est l'amplitude complexe

Impédance complexe du dipôle $\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U_m e^{j\varphi_u}}{I_m e^{j\varphi_i}} = \frac{U_m}{I_m} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)}$

Impédance du dipôle : $Z(\omega) = |\underline{Z}| = \frac{U_m}{I_m}$ (en Ω)

Avance de phase de u par rapport à i : $\varphi(\omega) = \arg(\underline{Z}) = \varphi_u - \varphi_i$ (en rad)

$\underline{Z} = R(\omega) + jX(\omega)$ $|\underline{Z}| = \sqrt{R^2(\omega) + X^2(\omega)}$

Résistance du dipôle : $R(\omega) = \Re(\underline{Z})$

Réactance du dipôle : $X(\omega) = \Im(\underline{Z})$

Admittance complexe du dipôle $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{i}{u} = \frac{I_m}{U_m} = \frac{I_m}{U_m} e^{j(\varphi_i - \varphi_u)}$

Admittance du dipôle : $Y(\omega) = |\underline{Y}| = \frac{I_m}{U_m} = \frac{1}{Z(\omega)}$ (en Siemens $S = \Omega^{-1}$)

Avance de phase de i par rapport à u : $\varphi_Y = \arg(\underline{Y}) = \varphi_i - \varphi_u$ (en rad)

$\underline{Y} = G(\omega) + jB(\omega)$ $|\underline{Y}| = \sqrt{G^2(\omega) + B^2(\omega)}$

Conductance du dipôle : $G(\omega) = \Re(\underline{Y})$

Susceptance du dipôle : $B(\omega) = \Im(\underline{Y})$

$\Delta \underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$ mais $G(\omega) \neq \frac{1}{R(\omega)}$
 $B(\omega) \neq \frac{1}{X(\omega)}$

b) Impédance de quelques dipôles :

Conducteur ohmique :

Loi d'Ohm $u(t) = R \cdot i(t)$
 $\underline{u}(t) = R \underline{i}(t)$

$\underline{Z}_R = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{U_m}{I_m} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = R$

$|\underline{Z}_R| = \frac{U_m}{I_m} = R \Rightarrow U_m = I I_m$

Bobine idéale d'inductance L

$u = L \frac{di}{dt} \rightsquigarrow \underline{u} = L \frac{d\underline{i}}{dt} = j\omega L \underline{i}$

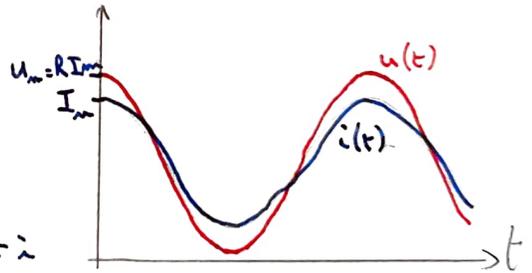
$\underline{Z}_L = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = j\omega L$

$\underline{Z}_L = \frac{U_m}{I_m} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = L\omega e^{j\frac{\pi}{2}}$

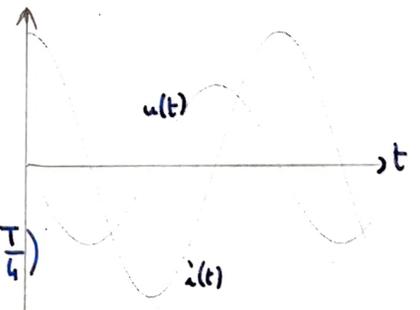
$|\underline{Z}_L| = \frac{U_m}{I_m} = L\omega$

$\varphi = \arg(\underline{Z}_L) = \varphi_u - \varphi_i = \frac{\pi}{2}$

$\varphi = \arg(\underline{Z}_R) = \varphi_u - \varphi_i = 0$
 $\Rightarrow \varphi_u = \varphi_i$
Pas de déphasage entre u et i



$\varphi_u - \varphi_i > 0$ u est en avance / i (quadrature avance)
(Or $\varphi_u - \varphi_i = \omega \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{\varphi_u - \varphi_i}{\omega} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\omega} = \frac{T}{4}$)



Condensateur idéal de capacité C :

$$i = C \frac{du}{dt} \rightarrow i = C \frac{du}{dt} = C j\omega u$$

$$\Rightarrow \underline{Z}_c = \frac{u}{i} = \frac{1}{j\omega C}$$

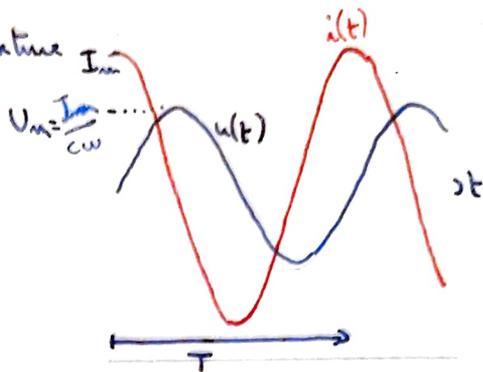
$$\underline{Z}_c = \frac{1}{\omega C} e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$\underline{Z}_c = \frac{U_m}{I_m} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = \frac{1}{\omega C} e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$|\underline{Z}_c| = \frac{U_m}{I_m} = \frac{1}{\omega C}$$

$$\varphi = \arg(\underline{Z}_c) = \varphi_u - \varphi_i = -\frac{\pi}{2}$$

u est en retard / i (quadrature retard) $\Delta t = -\frac{T}{4}$

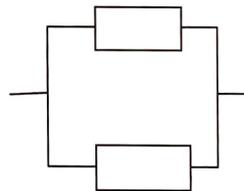


c) Association de dipôles :

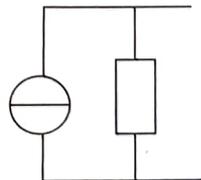
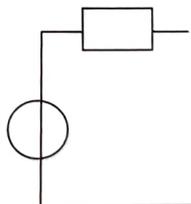
- en série :



- en parallèle :



d) Générateur :



Remarque importante : Schéma équivalents à basse et haute fréquence.

⇒ À basse fréquences : $f \rightarrow 0$ $\omega = 2\pi f$ $\omega \rightarrow 0$

Bobine idéale : $|Z_c| = \frac{U_m}{I_m} = L\omega \Rightarrow U_m = L\omega I_m$

$\forall I_m$, quand $\omega \rightarrow 0$ $U_m \rightarrow 0$ bobine équivalent à 1 fil

On retrouve le modèle équivalent du régime permanent continu.

Condensateur parfait : $|Z_c| = \frac{U_m}{I_m} = \frac{1}{C\omega}$

$$\Rightarrow \frac{I_m}{U_m} = C\omega \Rightarrow I_m = C\omega U_m$$

$\forall U_m$, quand $\omega \rightarrow 0$, $I_m \rightarrow 0$

Condensateur équivalent à 1 interrupteur ouvert.

À haute fréquences : $\omega \rightarrow +\infty$ $f \rightarrow +\infty$

Bobine idéale $|Z_c| = \frac{U_m}{I_m} = L\omega \Rightarrow \frac{I_m}{U_m} = \frac{1}{L\omega} \Rightarrow I_m = \frac{U_m}{L\omega}$

$\forall U_m$ $\omega \rightarrow +\infty$ $I_m \rightarrow 0$ bobine équivalent à 1 interrupteur ouvert.

Condensateur parfait $|Z_c| = \frac{U_m}{I_m} = \frac{1}{C\omega} \Rightarrow U_m = \frac{I_m}{C\omega}$

$\forall I_m$ $\omega \rightarrow +\infty$ $U_m \rightarrow 0$ Condensateur équivalent à un fil.