PROGRAMMES 7 et 8.

PROGRAMME 7 : du 18/11 au 22/11

Reprise des complexes et fin

- ★ Racines n-ièmes : Description des racines n-ièmes de l'unité. Notation $\mathbb{U}_n$. Somme des racines n-ièmes de l'unité.
- ★ Exponentielle complexe : Définition de e^z pour z complexe : $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z)}$. Notations $\exp(z)$, e^z. Exponentielle d'une somme. Pour tous z et z' dans $\mathbb{C}$, $\exp(z) = \exp(z')$ si et seulement si $z - z'$ s'écrit $2ik\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.
- ★ Nombres complexes et géométrie plane : On identifie $\mathbb{C}$ au plan usuel muni d'un repère orthonormé direct. Point du plan associé à un nombre complexe, affixe d'un point du plan, affixe d'un vecteur du plan.
  Interprétation géométrique de $|z - z'|$, cercles et disques.
  Traduction de l'alignement et de l'orthogonalité au moyen d'affixes.
  Transformation $z \mapsto z + b$; interprétation en termes de translation.
  Transformation $z \mapsto kz$, $(k \in \mathbb{R}^*)$; homothétie de centre O et de rapport k.
  Transformation $z \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z$; rotation plane de centre O et d'angle θ.
  Transformation $z \mapsto \overline{z}$; interprétation en termes de symétrie axiale.
  Transformation $z \mapsto az$ où $a \in \mathbb{C}^*$ tel que $|a| \neq 1$; interprétation en termes de composée commutative d'une rotation et d'une homothétie. On parle de similitude.
- ★ Dérivée d'une fonction à valeurs complexes. La dérivée est définie via les parties réelle et imaginaire.
  Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient. Brève extension des résultats sur les fonctions à valeurs réelles.

Primitives et calcul d'intégrales

- ★ Définition d'une primitive d'une fonction définie sur un intervalle à valeurs réelles. Description de l'ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle connaissant l'une d'entre elles. Savoir reconnaître les dérivées de fonctions composées.
- ★ Théorème fondamental de l'analyse : toute fonction continue f sur un intervalle I admet des primitives. Plus précisément, si $a \in I$ alors $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a. Calcul d'une intégrale au moyen d'une primitive.
- ★ Définition des fonctions de classe C^1. Intégration par parties pour des fonctions de classe C^1. Changement de variables. Applications aux fonctions paires, impaires, périodiques.
- ★ Primitives usuelles.
- ★ Calcul de primitives / intégrales des fonctions de la forme $x \mapsto P(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$ où P est un polynôme, $x \mapsto \cos^p x \sin^q x$, $x \mapsto \dfrac{1}{ax^2 + bx + c}$.
- ★ Extension aux fonctions complexes. Application au calcul de primitives / intégrales de fonctions de la forme $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)$ et $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)$ où a et b sont des réels.

Un énoncé au choix à demander

- ❒ Définition du module de $z \in \mathbb{C}$ (2 expressions à donner)
- ❒ Donner 2 caractérisations pour $z \in \mathbb{R}$, 2 caractérisations pour $z \in i\mathbb{R}$
- ❒ Traduire $|z| = 1$ de trois manières ($x^2+y^2=1$ si $x=\mathrm{Re}(z), y=\mathrm{Im}(z)$, $\overline{z}=\dfrac{1}{z}$, $\exists\theta\in\mathbb{R}, z=e^{i\theta}$)
- ❒ Inégalité triangulaire
- ❒ Formules d'Euler
- ❒ Propriétés algébrique des $e^{i\theta}$, formule de Moivre
- ❒ Écriture trigonométrique d'un complexe non nul
- ❒ Résultat sur les racines carrées d'un complexe non nul
- ❒ Solutions de l'équation $az^2+bz+c=0$ avec a,b,c complexes, $a\neq 0$
- ❒ Relations racines/coefficients pour une équation de degré 2
- ❒ Racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité : définition et théorème
- ❒ Définition de e^z pour $z \in \mathbb{C}$ et principales propriétés
- ❒ Caractérisation de la colinéarité, de l'orthogonalité de 2 vecteurs
- ❒ Interprétation de $z \mapsto kz$ ($k \in \mathbb{R}^*$), $z \mapsto e^{i\theta}z$ ($\theta\in\mathbb{R}$), $z\mapsto az$ ($a\in\mathbb{C}^*$ de module distinct de 1)
- ❒ Définition d'une primitive
- ❒ Théorème fondamental de l'analyse
- ❒ 3 primitives usuelles issues du tableau des primitives usuelles (il faut savoir <u>retrouver</u> une primitive de tan et de $x\mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$).
- ❒ Résultats d'intégration sur les fonctions paires / impaires, périodiques.
- ❒ Théorème donnant l'ensemble des solutions d'une EDL_1 sans second membre.

Question de savoir-faire

On demandera à chaque étudiant, en plus de la preuve et de l'énoncé, une linéaristation ou une « dé-linéarisation » par passage en complexes.

Démonstrations

- ❒ Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(kt)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sin(kt)$ où $t\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}$.
- ❒ **Exercice fait en cours :** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z+1)^5-(z-1)^5=0$.
- ❒ Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue et a et b deux éléments de I.
  Alors, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b)-F(a)$ où F est une primitive de f sur I.

PROGRAMME 8 : du 25/11 au 29/11

Reprise de la fin des complexes

Racines nèmes de l'unité, exponentielle complexe et géométrie.

Reprise des primitives et calcul d'intégrales

Équations différentielles linéaires du premier ordre (EDL_1)

Soit $(E) : a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x)$ où a, b, c sont des fonctions continues définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs réelles ou complexes. On suppose que la fonction a ne s'annule pas sur l'intervalle I.

- ★ Équation homogène associée.
- ★ Forme des solutions : somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène.
- ★ Cas particulier où la fonction a est constante.
- ★ Résolution de l'équation homogène.
- ★ Méthode de la variation de la constante.
- ★ Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.

Un énoncé au choix à demander

- ❒ Racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité : définition et théorème
- ❒ Définition de e^z pour $z \in \mathbb{C}$ et principales propriétés
- ❒ Caractérisation de la colinéarité, de l'orthogonalité de 2 vecteurs
- ❒ Interprétation de $z \mapsto kz$ ($k \in \mathbb{R}^*$), $z \mapsto e^{i\theta}z$ ($\theta \in \mathbb{R}$), $z \mapsto az$ ($a \in \mathbb{C}^*$ de module distinct de 1)
- ❒ Définition d'une primitive
- ❒ Théorème fondamental de l'analyse
- ❒ Résultats d'intégration sur les fonctions paires / impaires, périodiques.
- ❒ Théorème donnant l'ensemble des solutions d'une EDL_1 sans second membre.

Question supplémentaire

On demandera à chaque étudiant, en plus de la preuve et de l'énoncé, 3 primitives usuelles issues du tableau des primitives usuelles (il faut savoir retrouver une primitive de tan et de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$).

Démonstrations

- ❒ Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue et a et b deux éléments de I.

  Alors, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f sur I.
- ❒ Calcul de $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.
- ❒ Recherche des primitives de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+x+1}$.