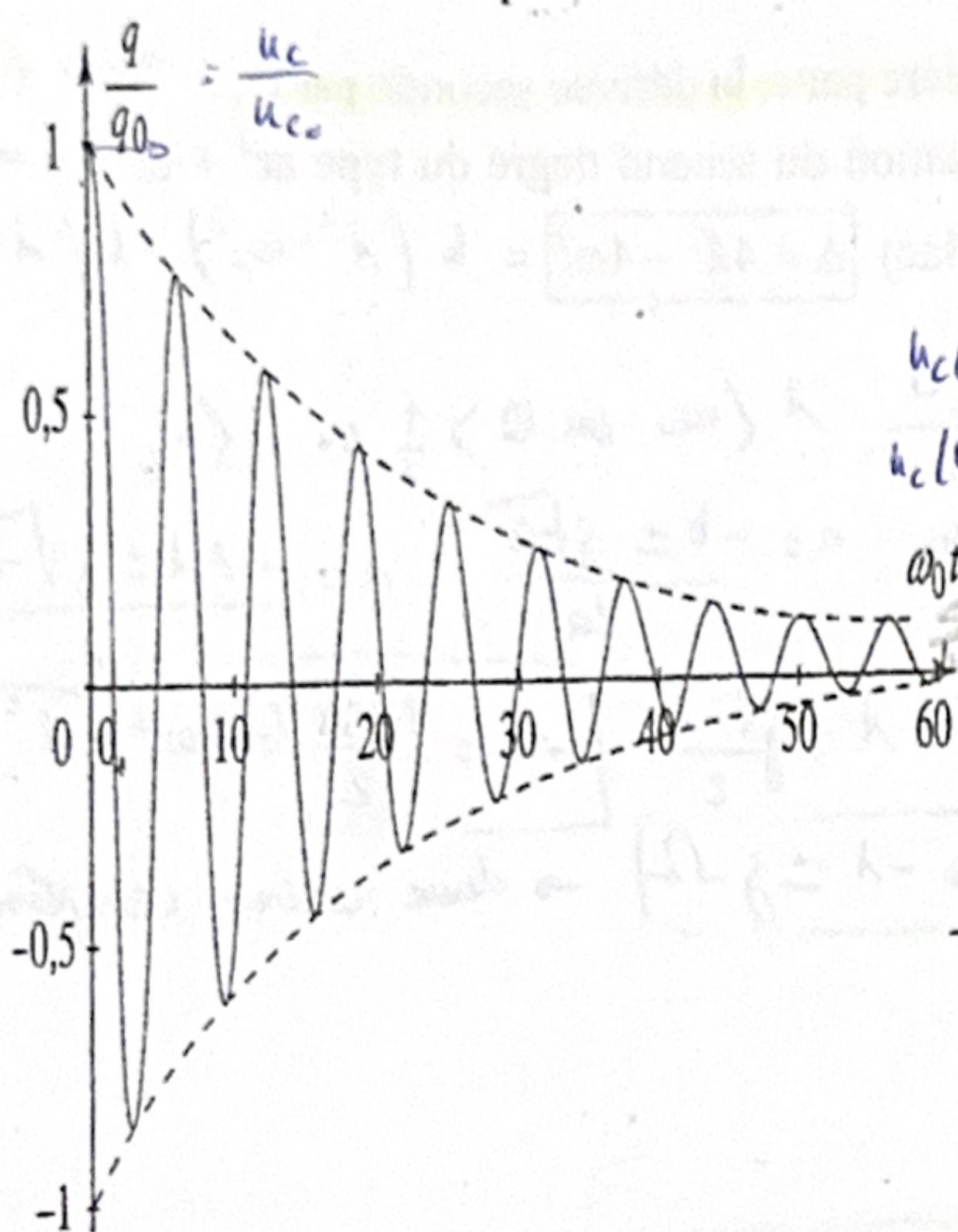


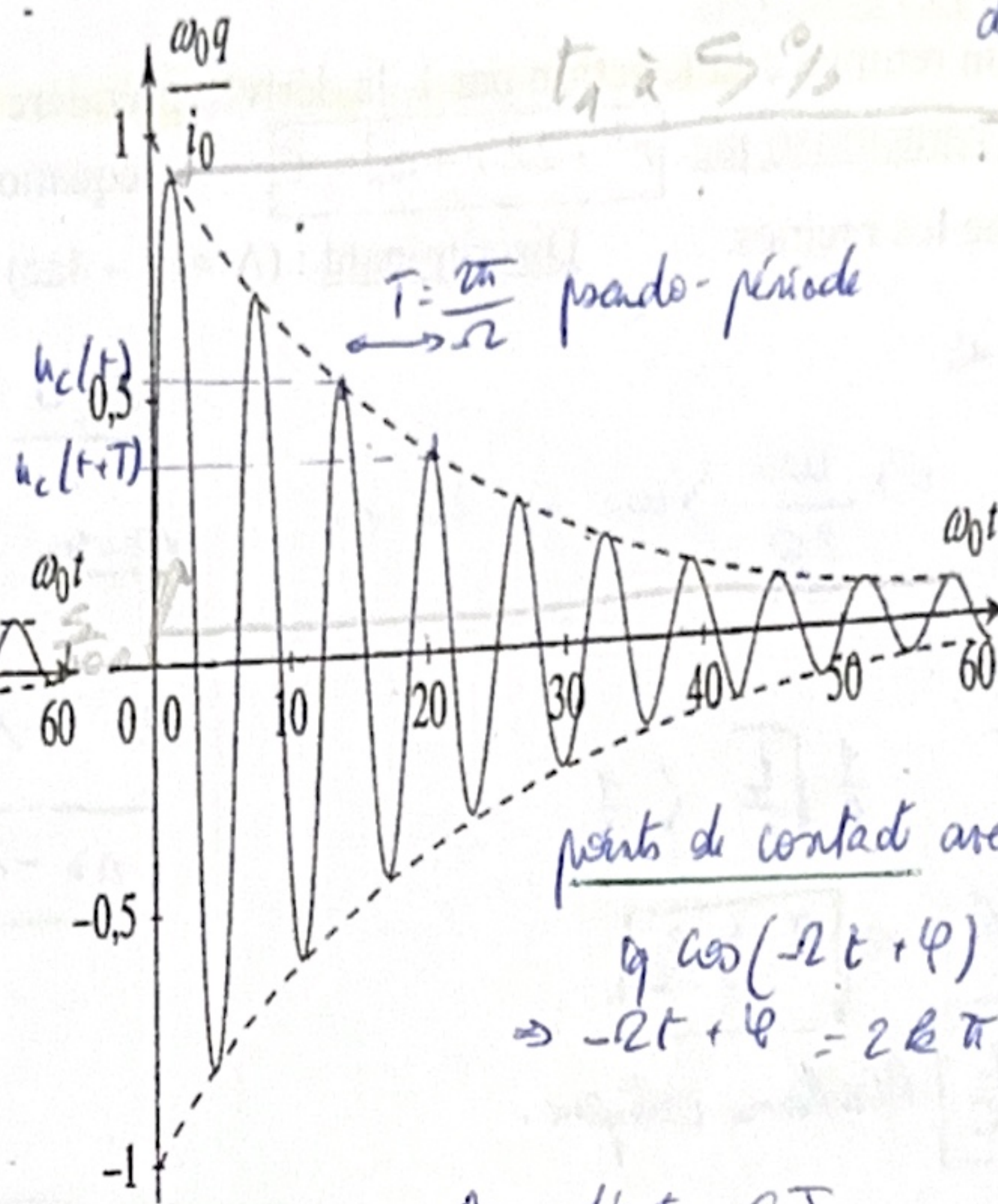
4 m C.I:

$u_c(0^+) = u_{co}$
 $i(0^+) = 0$
 $\frac{du_c}{dt}(0^+) = 0$



Doc. 18. Régime pseudo-périodique. $Q = 10$; $q(0) = q_0$ et $i(0) = 0$.

On compte le nbre d'oscillations visibles, on obtient un ordre de grandeur des facteurs de qualité



Doc. 19. Régime pseudo-périodique. $Q = 10$; $q(0) = 0$ et $i(0) = i_0$. $\Rightarrow \frac{du_c}{dt}(0^+) = \frac{i_0}{C}$ pente de la demi-osc à l'origine.

Remarques: 1) La pseudo-période est plus grande que la période propre. $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} < \omega_0$ donc $T > T_0$.

2) Cas $R=0$: $\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{1}{LC} u_c = 0$

Oscillations harmoniques: $\omega_s^2 = \frac{1}{LC}$ $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
 pulsation propre: $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ période propre.
 $u_c(t) = a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t$
 Oscillations non-amorties, périodiques. (\neq oscillations amorties en régime pseudo-périodique).

3) Décrement logarithmique δ (en TP):

Les points de contact sont espacés de $T = \frac{2\pi}{\Omega}$

$$\frac{u_c(t+T)}{u_c(t)} = \frac{A e^{-\lambda(t+T)}}{A e^{-\lambda t}}$$

$$\Rightarrow \frac{u_c(t+T)}{u_c(t)} = e^{-\lambda T}$$

$$\Rightarrow \ln \left(\frac{u_c(t+T)}{u_c(t)} \right) = -\lambda T$$

$$\Rightarrow \delta = \ln \left(\frac{u_c(t)}{u_c(t+T)} \right) = \lambda T$$

4) Détermination des constantes:

$$u_c(t) = e^{-\lambda t} (a \cos \Omega t + b \sin \Omega t)$$

$$u_c(0^+) = e^0 (a \cos 0 + b \sin 0) = a = u_{co}$$

$$u_c(t) = f(t) \cdot g(t)$$

où $f(t) = e^{-\lambda t}$
 $g(t) = a \cos \Omega t + b \sin \Omega t$

$$\frac{du_c}{dt} = [fg]' = f'g + fg'$$

$$f'(t) = -\lambda e^{-\lambda t}$$

$$g'(t) = -a \Omega \sin \Omega t + b \Omega \cos \Omega t$$

$$\frac{du_c}{dt} = -\lambda e^{-\lambda t} (a \cos \Omega t + b \sin \Omega t) + e^{-\lambda t} (-a \Omega \sin \Omega t + b \Omega \cos \Omega t)$$

$$\frac{du_c}{dt}(0^+) = -\lambda e^0 (a \cos 0 + b \sin 0) + e^0 (-a \Omega \sin 0 + b \Omega \cos 0)$$

$$\frac{du_c}{dt}(0^+) = b \Omega - \lambda a = 0$$

$$\Rightarrow b = \frac{\lambda a}{\Omega} = \frac{\lambda u_{co}}{\Omega}$$

5) Temps de réponse à 5% pour le 1^{er} ordre :

$$u_c = u_{c0} e^{-t/\tau} \quad (\text{cf SER})$$

On veut t_1 tq $u_c(t_1) = \frac{5}{100} u_{c0}$

$$u_c(t_1) = u_{c0} e^{-t_1/\tau} = \frac{5}{100} u_{c0}$$

$$\Rightarrow -t_1/\tau = \ln\left(\frac{5}{100}\right)$$

$$\Rightarrow t_1 \approx 3\tau$$

Pour le second ordre l'enveloppe des oscillations est

$$Ae^{-dt} = Ae^{-t/\tau} \text{ si } \tau = \frac{1}{d}$$

On atteint 5% de la valeur initiale pour l'enveloppe pour $t_1 \approx 3\tau$

$$\Rightarrow t_1 \approx \frac{3}{d} \text{ car } \tau = \frac{1}{d} \text{ constante de temps.}$$

$$\text{Or } d = \frac{\omega_0}{2Q} \Rightarrow d = \frac{\omega_0}{2Q}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{d} = \frac{2Q}{\omega_0} \Rightarrow t_1 \approx 3 \times \frac{2Q}{\omega_0}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \Rightarrow t_1 \approx \frac{6Q T_0}{2\pi}$$

$$\text{Or } Q \approx 6 \Rightarrow \boxed{t_1 \approx Q T_0} \text{ à } 5\%$$

Pour un régime pseudo-périodique peu amorti ; $T \approx T_0 \Rightarrow \boxed{t_1 \approx Q T}$

On compte 10 oscillations \Rightarrow Q de poche à 5%

(Voir doc 18 haut) de 10

6) Intensité :

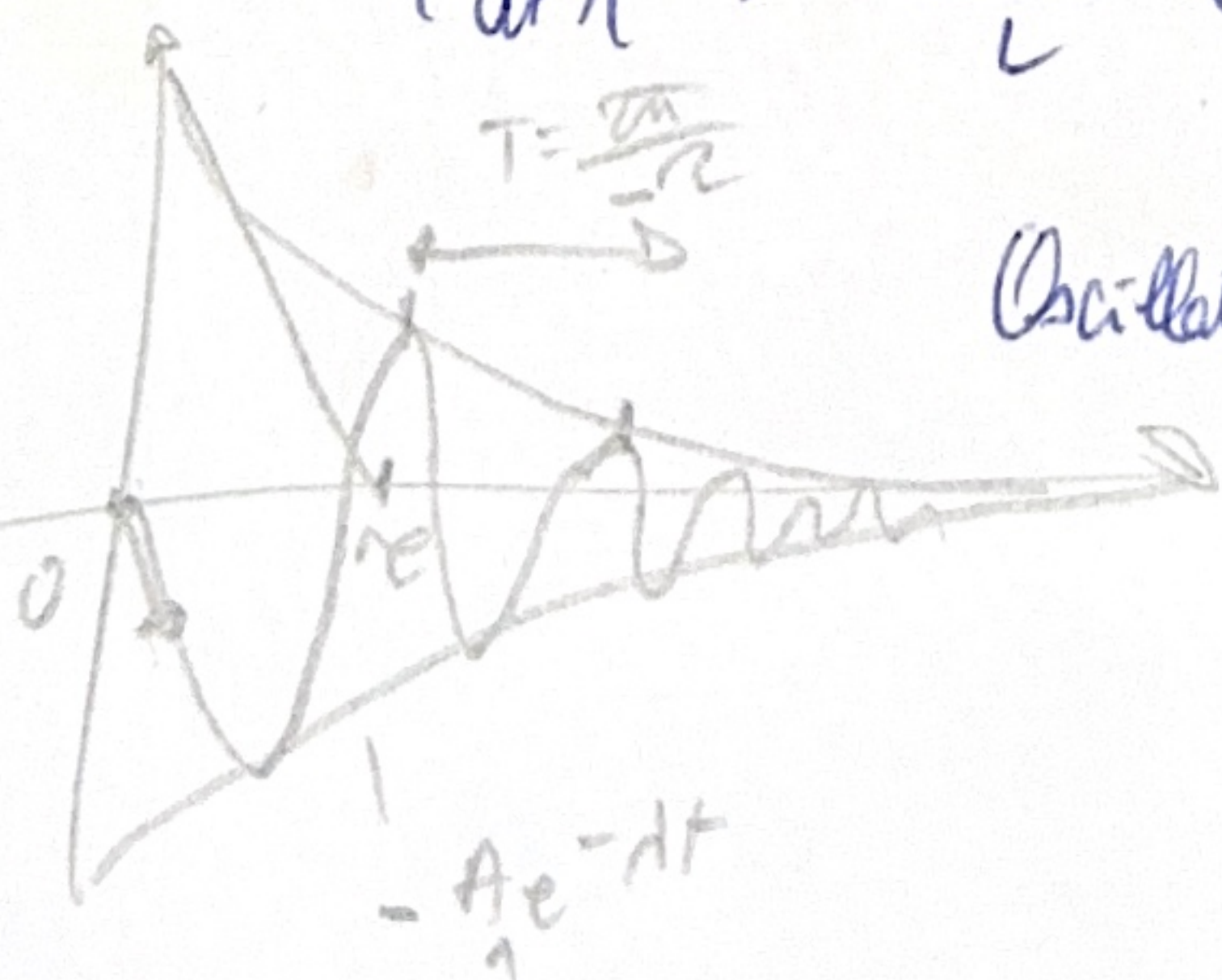
$$\text{m'eqn. diff pour } u_c = \left| \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0 \right.$$

Une solution avec m formes canoniques

$$i(t) = e^{-\alpha t} (a_1 \cos \Omega t + b_1 \sin \Omega t)$$

$$i(t) = A_1 e^{-\alpha t} \cos(\Omega t + \varphi_1)$$

$$i(0^+) = 0 \text{ et } \left. \frac{di}{dt} \right|_{0^+} = -\frac{u_{c0}}{L} < 0$$



Oscillations amorties.

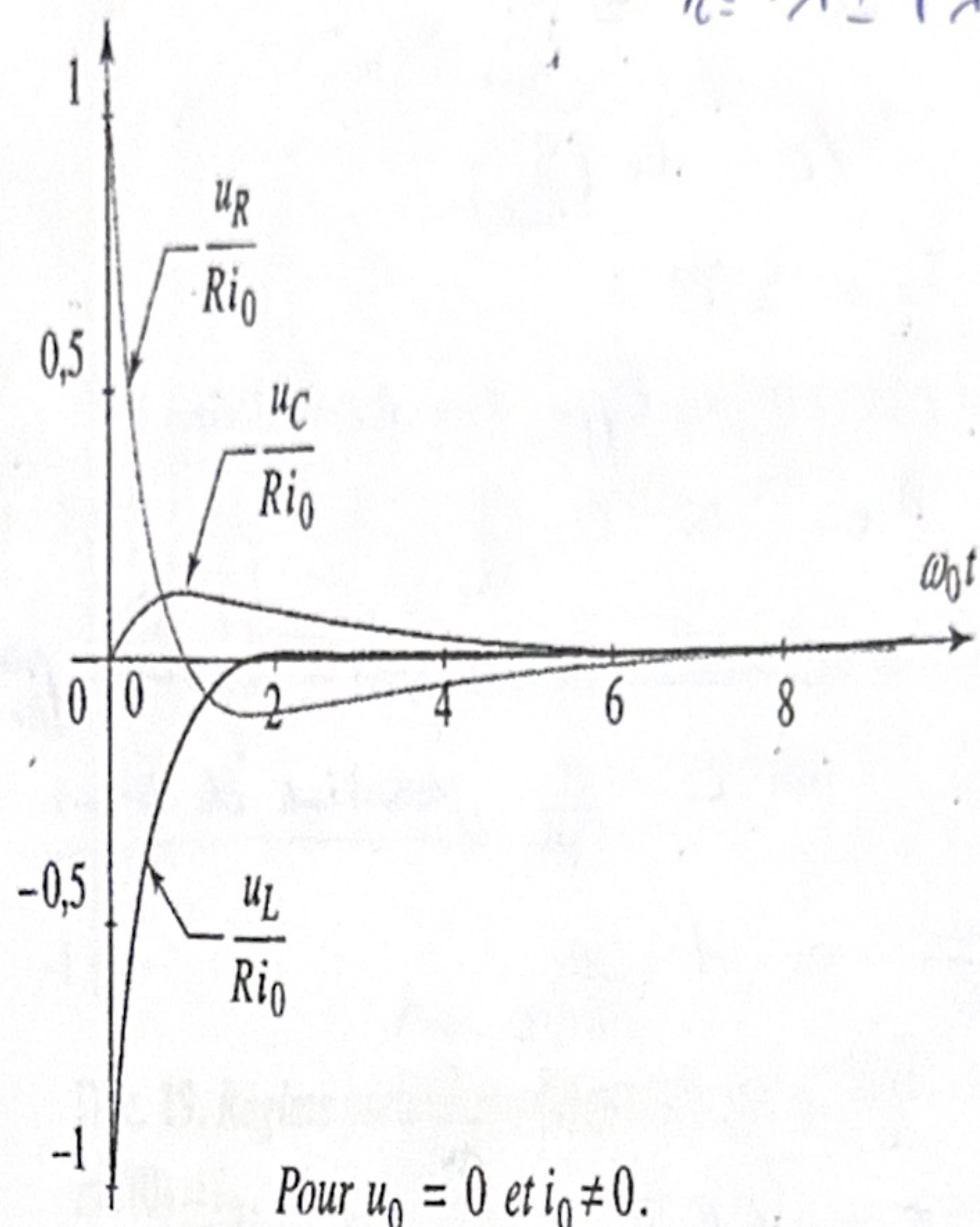
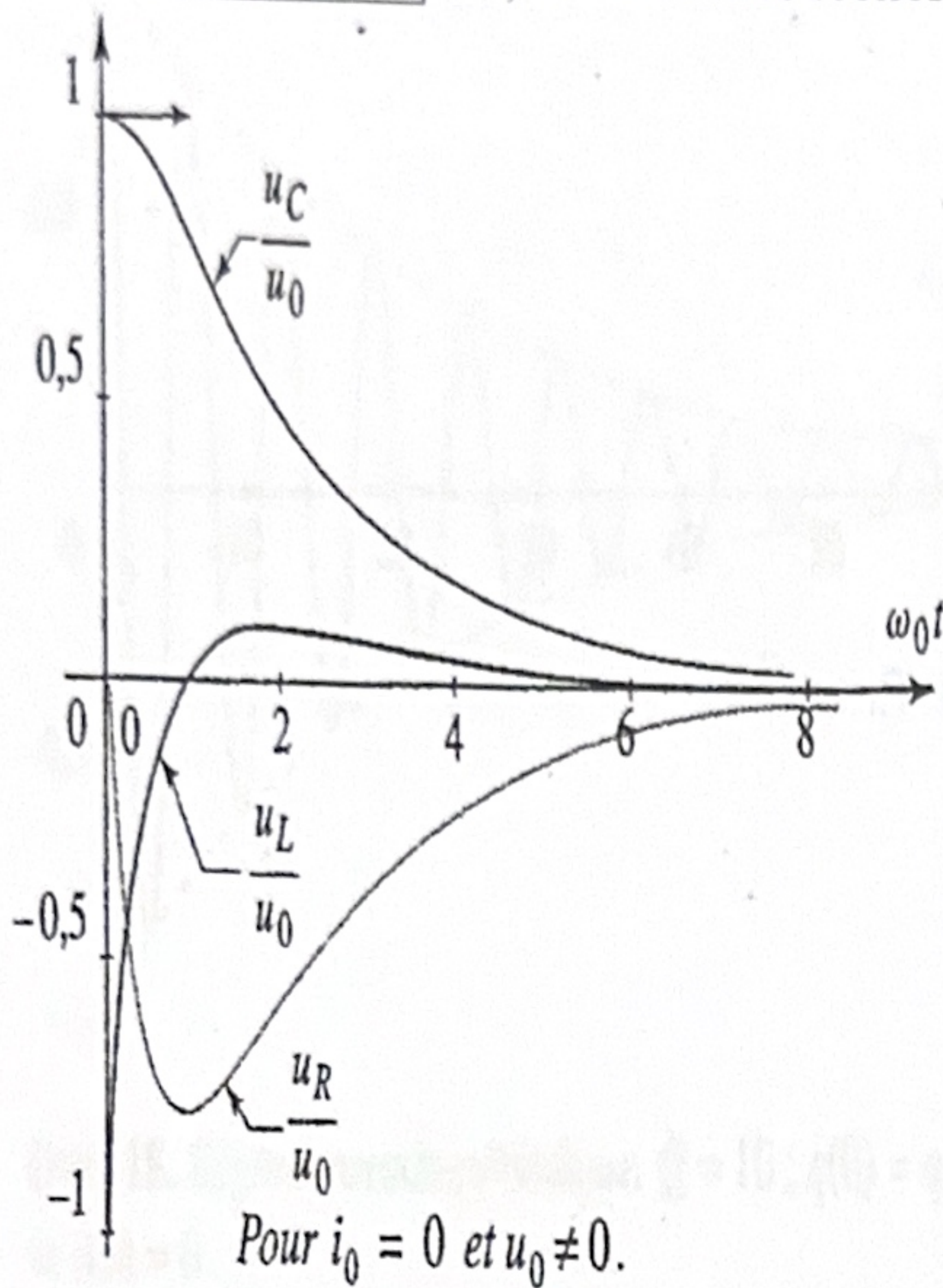
b) $\Delta > 0$ Régime apériodique

2 solutions réelles r_1 et r_2

$\lambda > \omega_0$ ou $Q < \frac{1}{2}$ ou $R > R_c$

$\alpha = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$

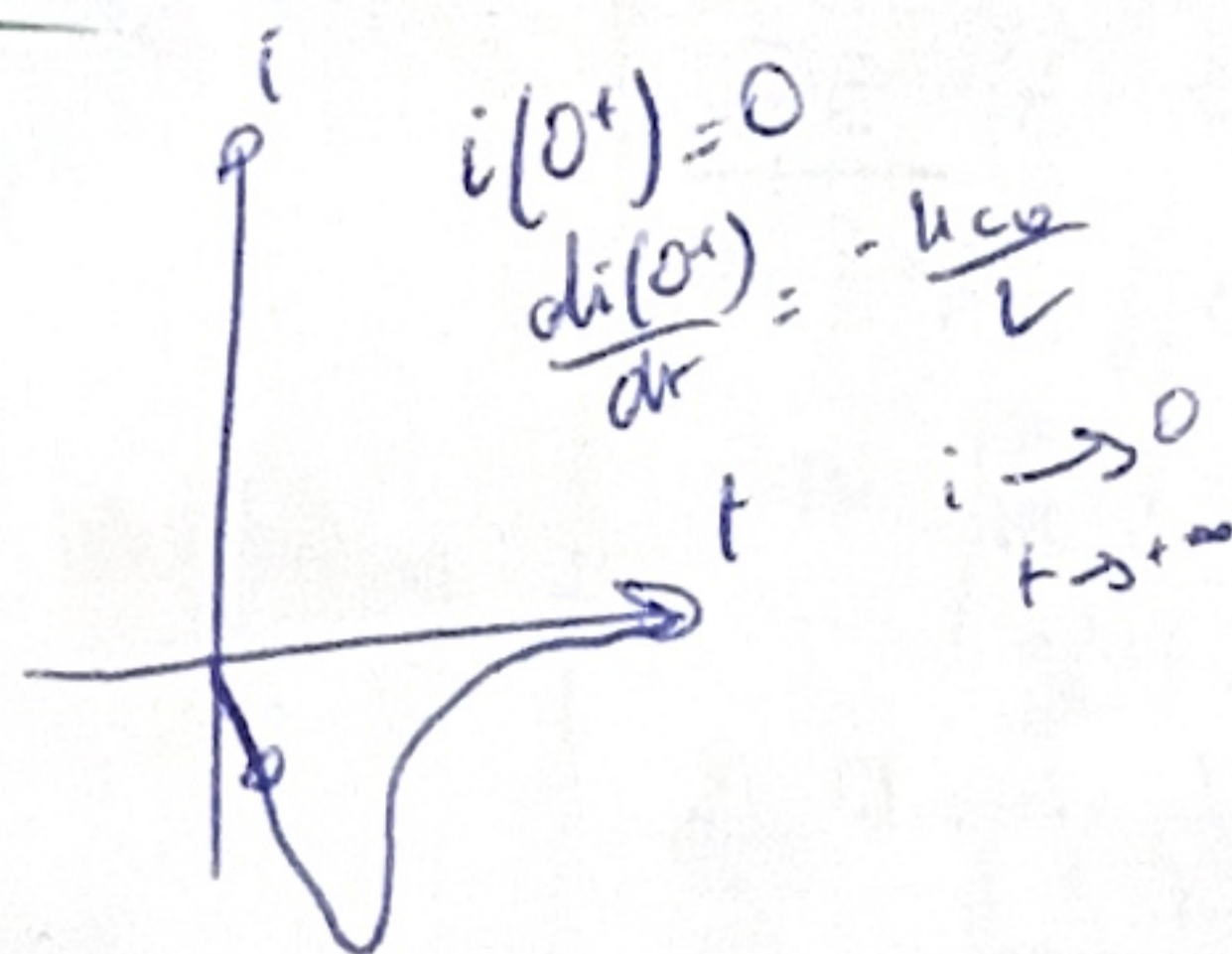
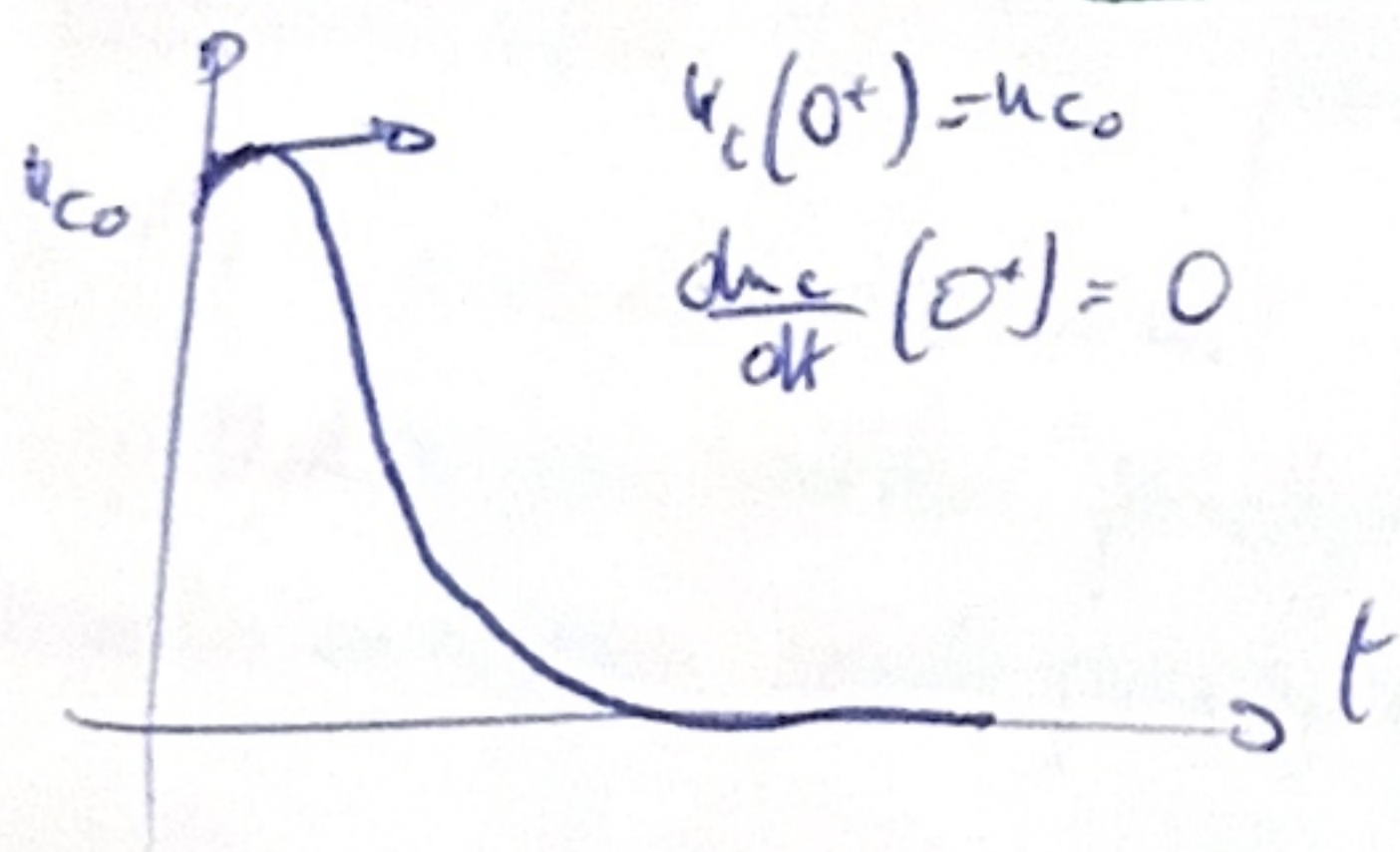
$u_C(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$ A, B constantes réelles.



Doc. 15. d.d.p. aux bornes des trois dipôles : régimes apériodiques $Q = 0,4$.

$\Delta > 0, \alpha = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$
 $r_1 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$
 $r_2 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$

r_1, r_2 sont négatives, $t \rightarrow \infty, u_C \rightarrow 0$



Rq: Déterminer les constantes:

$u_C(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$

$\frac{du_C}{dt}(t) = r_1 A e^{r_1 t} + r_2 B e^{r_2 t}$

$u_C(0^+) = A + B = u_{C0}$

$\Rightarrow A = u_{C0} - B$ (1)

$\frac{du_C}{dt}(0^+) = A r_1 + B r_2 = 0$

$\Rightarrow (u_{C0} - B) r_1 + B r_2 = 0$

$\Rightarrow u_{C0} r_1 + B(r_2 - r_1) = 0$

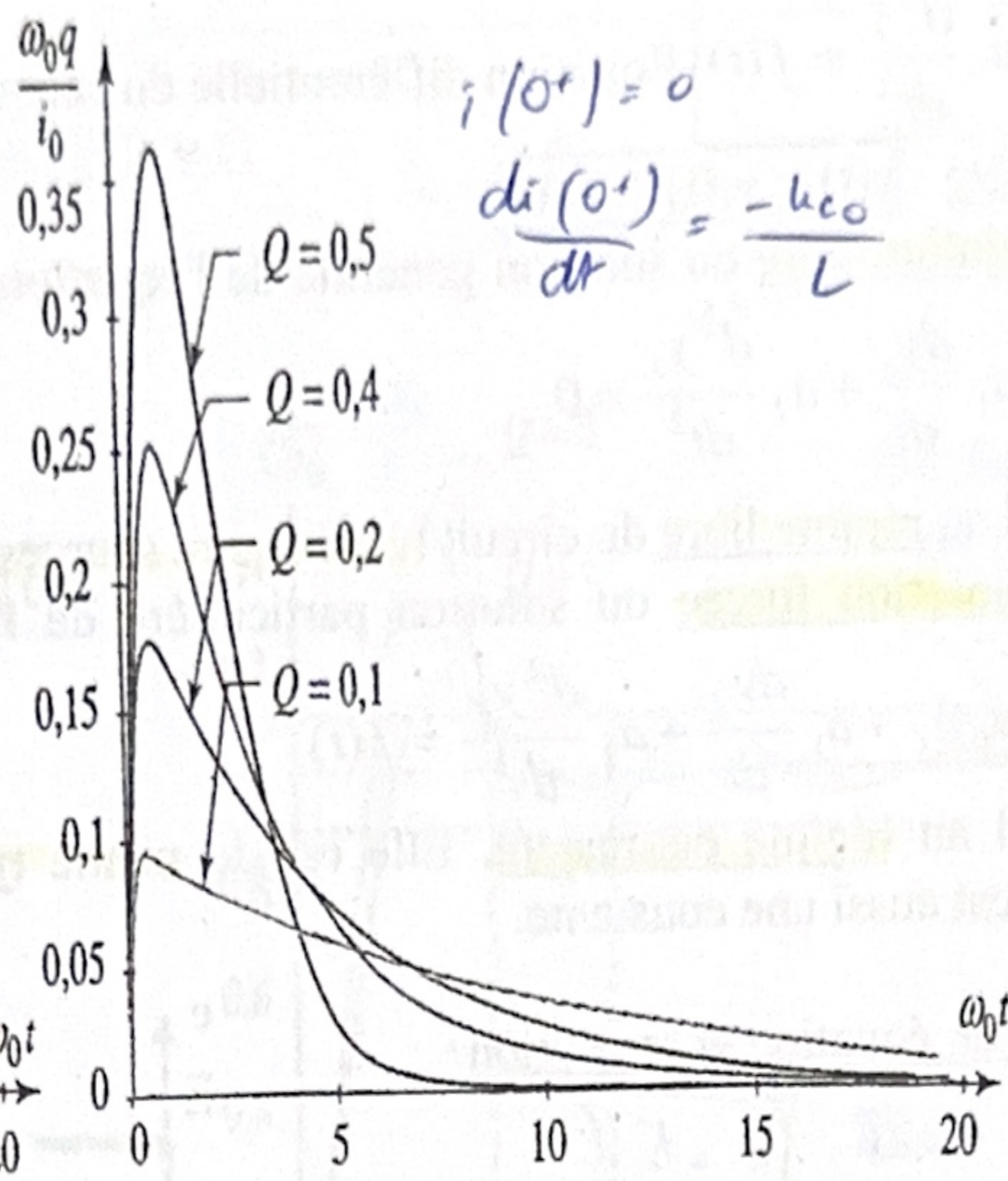
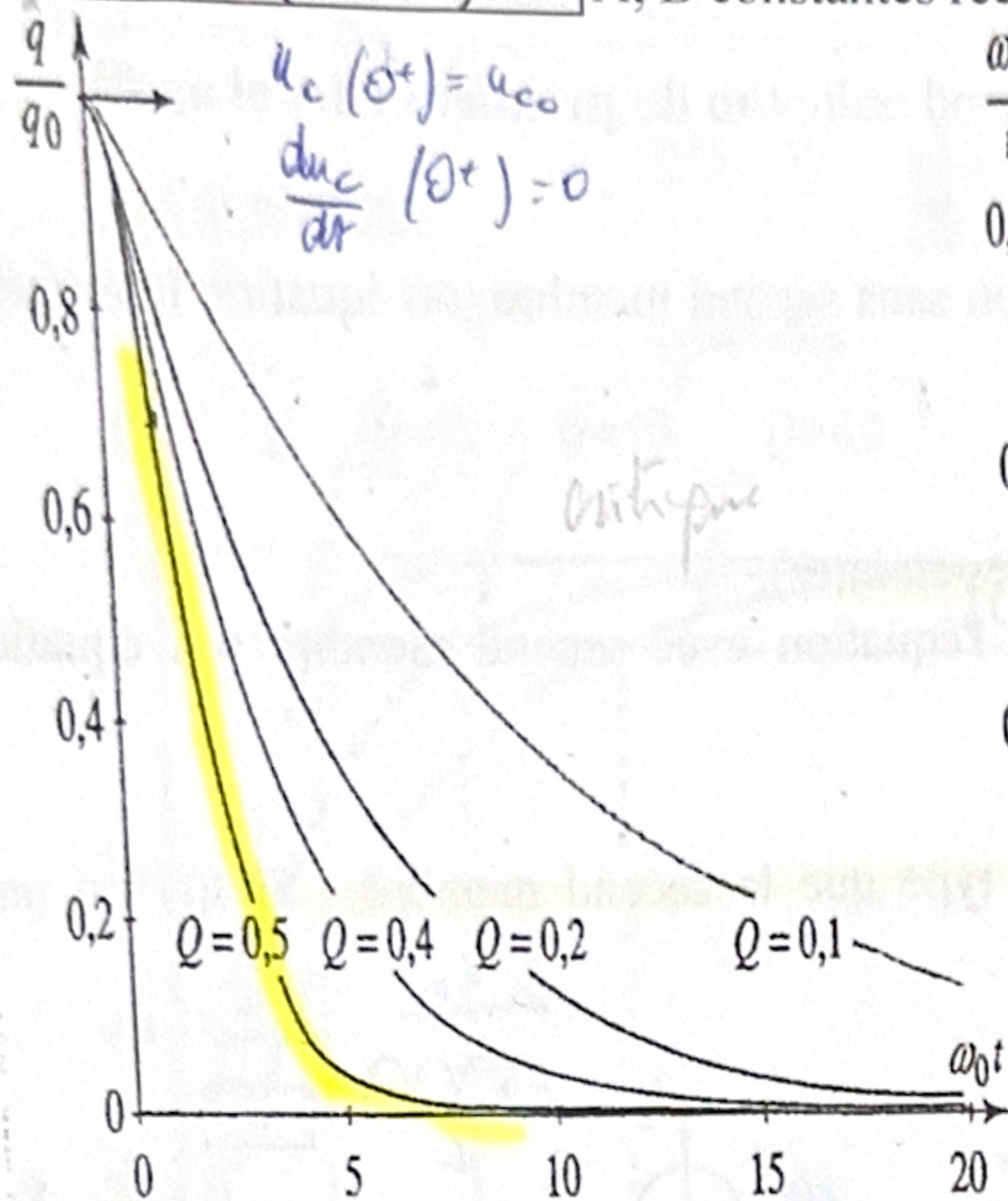
$B = \frac{u_{C0} r_1}{r_1 - r_2}$

$A = u_{C0} - \frac{u_{C0} r_1}{r_1 - r_2}$
 $= \frac{u_{C0} (r_1 - r_2) - u_{C0} r_1}{r_1 - r_2}$

$A = \frac{-u_{C0} r_2}{r_1 - r_2}$

c) $\Delta = 0$: Régime critique 1 solution double réelle $r_0 = \lambda$ $Q = \frac{1}{2}$ ou $\lambda = \omega_0$ ou $R = R_C$

$u_C(t) = (At + B)e^{-\lambda t}$ A, B constantes réelles.

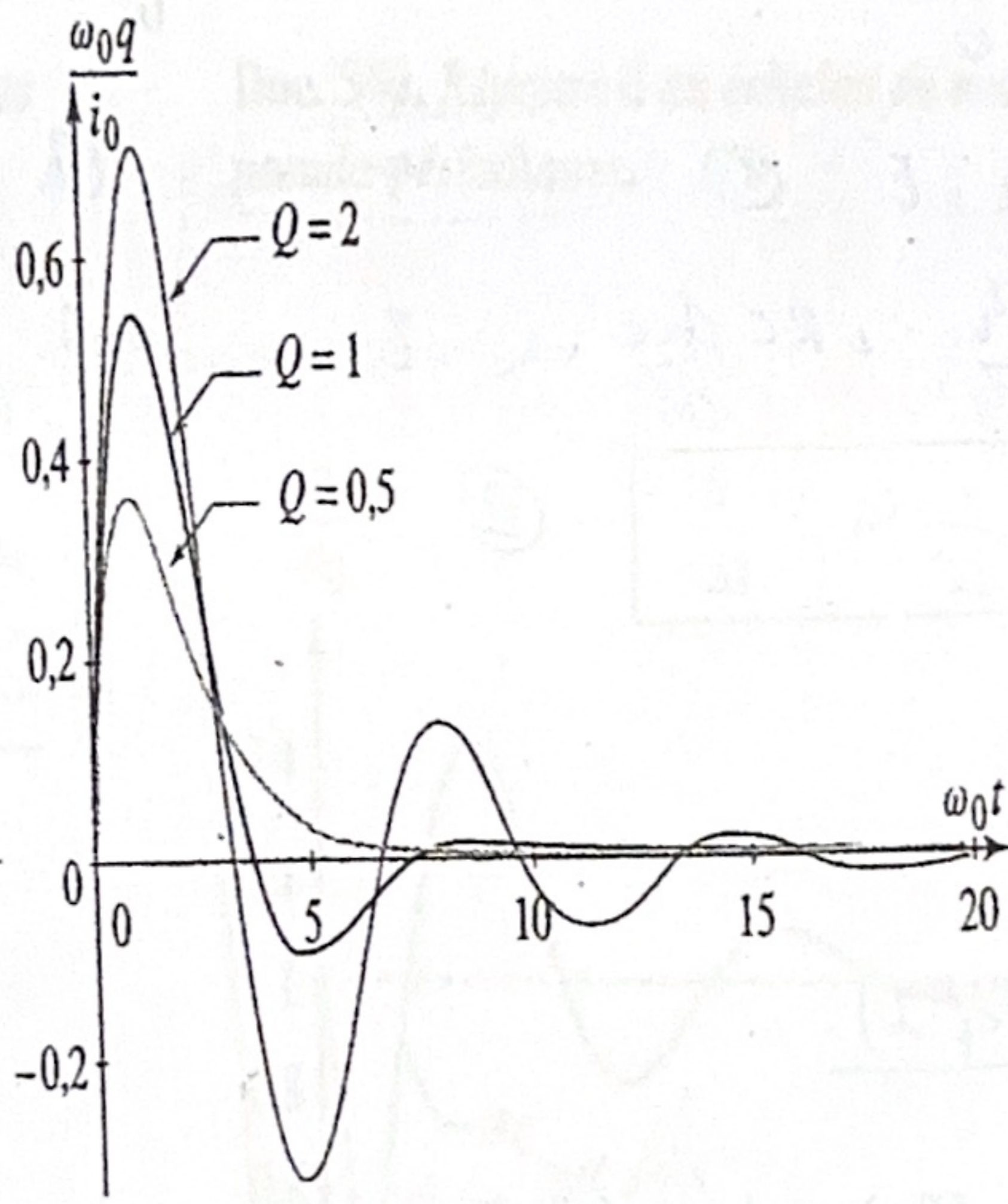
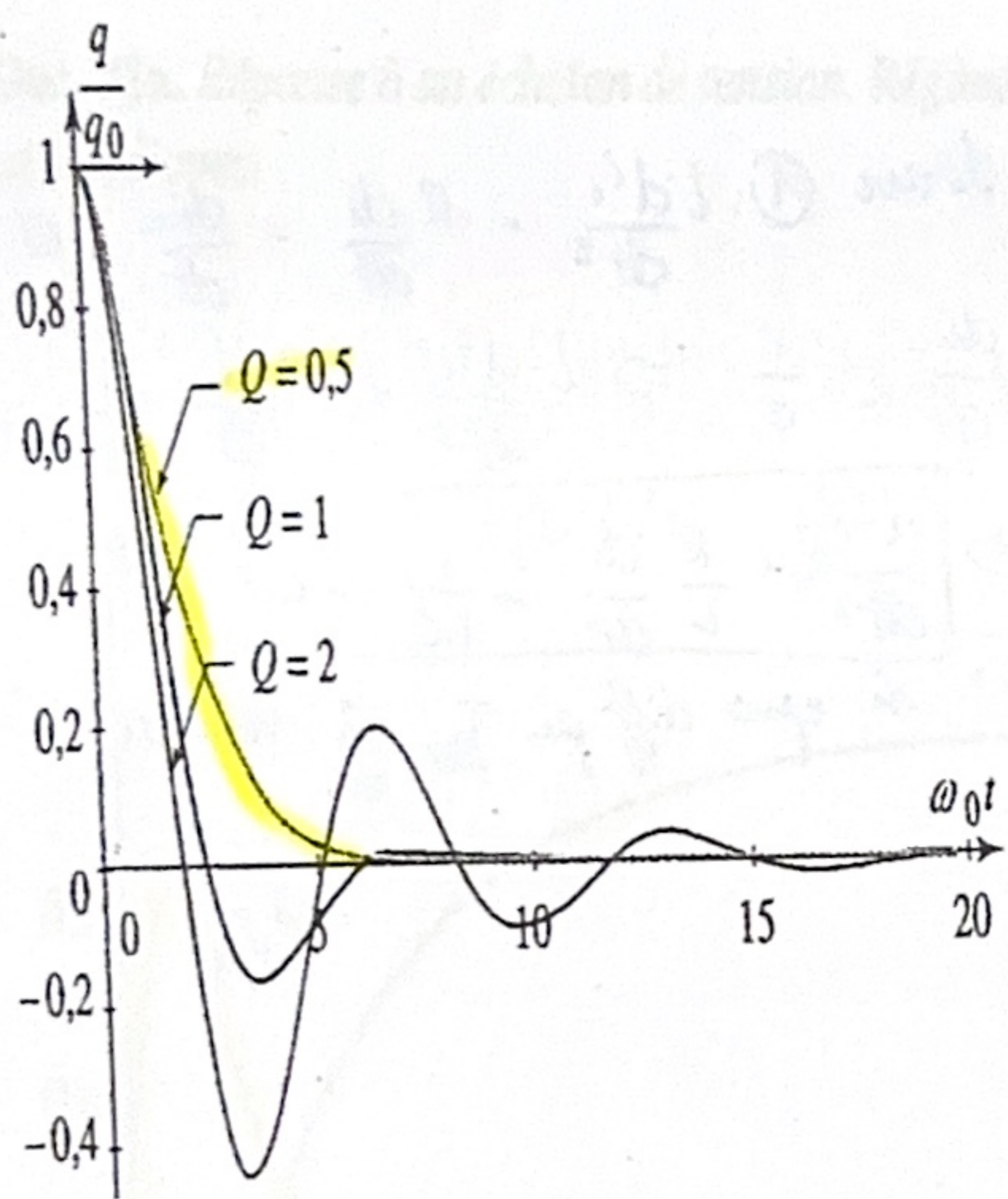


Conditions initiales ($q_0 \neq 0, i_0 = 0$).

Conditions initiales ($q_0 = 0, i_0 \neq 0$).

Doc. 14. Régimes apériodique ($Q < 0,5$) et critique ($Q = 0,5$).

$C \neq$



Doc. 20. Régimes pseudo-périodique et critique.
 Condensateur initialement chargé $i(0) = 0$.

Doc. 21. Régimes pseudo-périodique et critique.
 Intensité initiale i_0 dans le circuit.

II Réponse à un échelon de tension

1.) Les équations différentielles

Généralisation : Commande $f(t)$

Réponse $y(t)$

$$a_0 y + a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} = f(t) \quad \text{Equation différentielle du second ordre (ou du premier ordre si } a_2=0)$$

Solution complète : $y(t) = y_c(t) + y_f(t)$

- $y_c(t)$ est la **solution libre** ou solution générale de l'équation sans second membre (ou équation homogène)

$$a_0 y_c + a_1 \frac{dy_c}{dt} + a_2 \frac{d^2 y_c}{dt^2} = 0$$

Elle correspond au **régime libre** du circuit (c'est-à-dire sources éteintes).

- $y_f(t)$ est la **solution forcée** ou solution particulière de l'équation avec second membre (ou équation

complète) $a_0 y_f + a_1 \frac{dy_f}{dt} + a_2 \frac{d^2 y_f}{dt^2} = f(t)$

Elle correspond au **régime permanent**. Elle est du même type que le second membre : Si $f(t)$ est une constante, $y_f(t)$ est aussi une constante.

2.) Mise en équation et résolution

Pour $t > 0$ eqn. de maille. $e = E$

eqn. diff sur u_c et sur i

$$e - L \frac{di}{dt} - Ri - u_c = 0$$

$$\Rightarrow L \frac{di}{dt} + Ri + u_c = e = E \quad (1)$$

$$\text{Or } i = C \frac{du_c}{dt} \Rightarrow LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + RC \frac{du_c}{dt} + u_c = E$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_c}{dt} + \frac{1}{LC} u_c = \frac{E}{LC}} \quad (2)$$

$$u_c = u_{cp} + u_{cg}$$

$$u_{cg} = cte \Rightarrow u_{cg} = E$$

i et u sont continues (cf I):

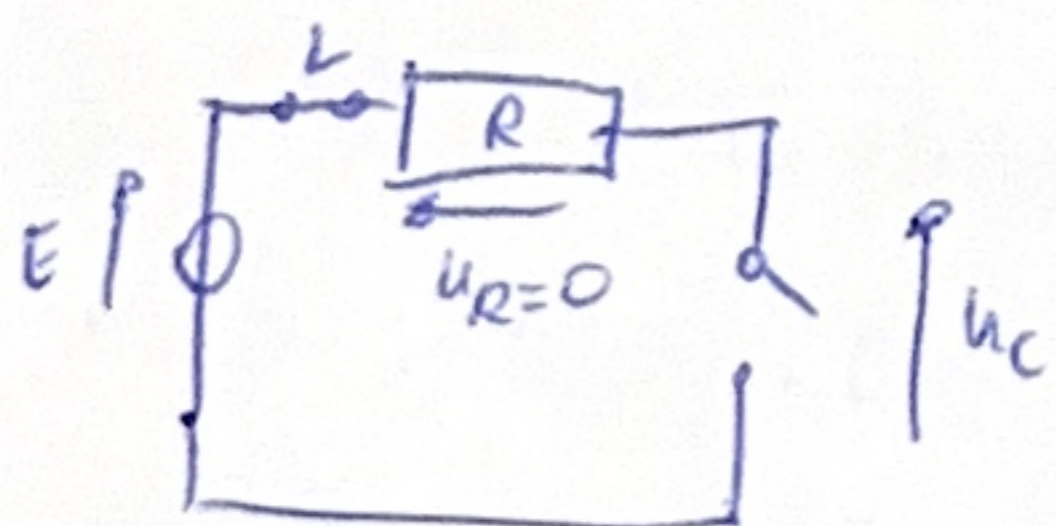
$$u_c(0^+) = 0$$

$$i(0^+) = 0 \Rightarrow \frac{du_c}{dt}(0^+) = i(0^+) \frac{1}{C} = 0$$

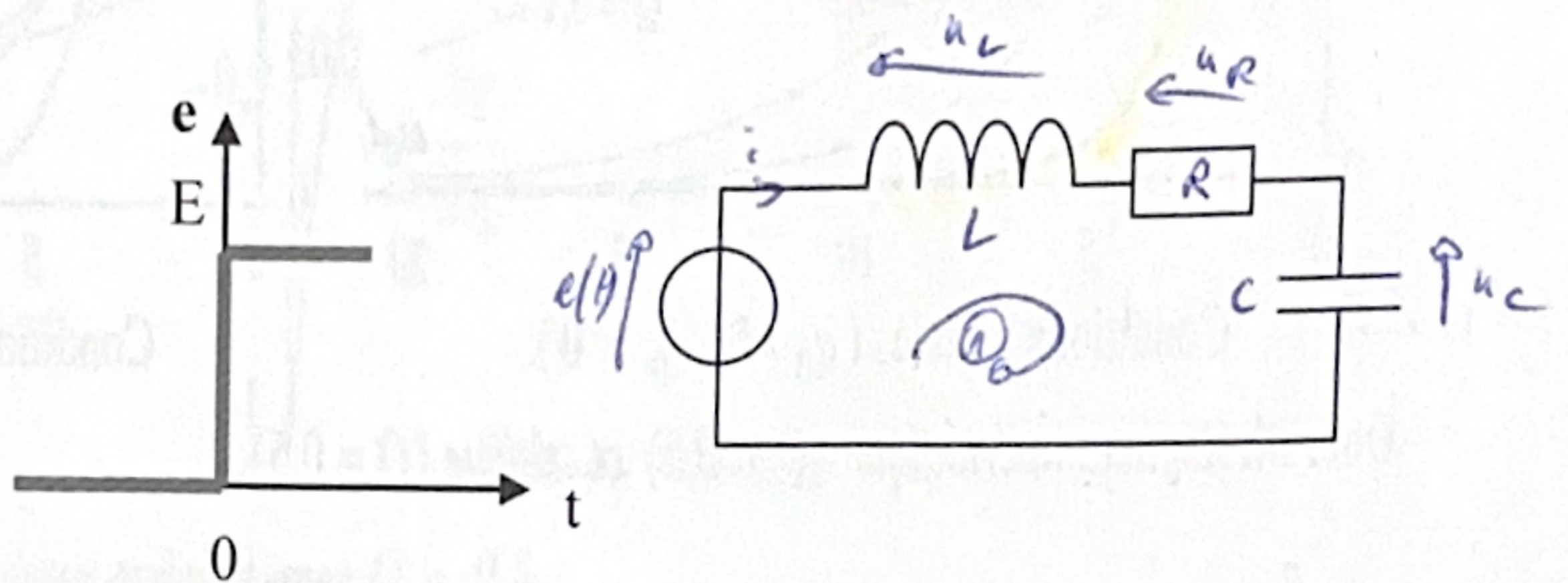
$$(1) L \frac{di}{dt}(0^+) + Ri(0^+) + u_c(0^+) = E$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{di}{dt}(0^+) = \frac{E}{L}}$$

à t_{∞} : Régime permanent continu



$$i(t_{\infty}) = 0 \quad \text{et} \quad u_c(t_{\infty}) = E \quad (\text{eqn de maille})$$



$$\text{On dérive (1): } L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{du_c}{dt} = 0$$

$$\text{Or } \frac{du_c}{dt} = \frac{i}{C} \Rightarrow L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0$$

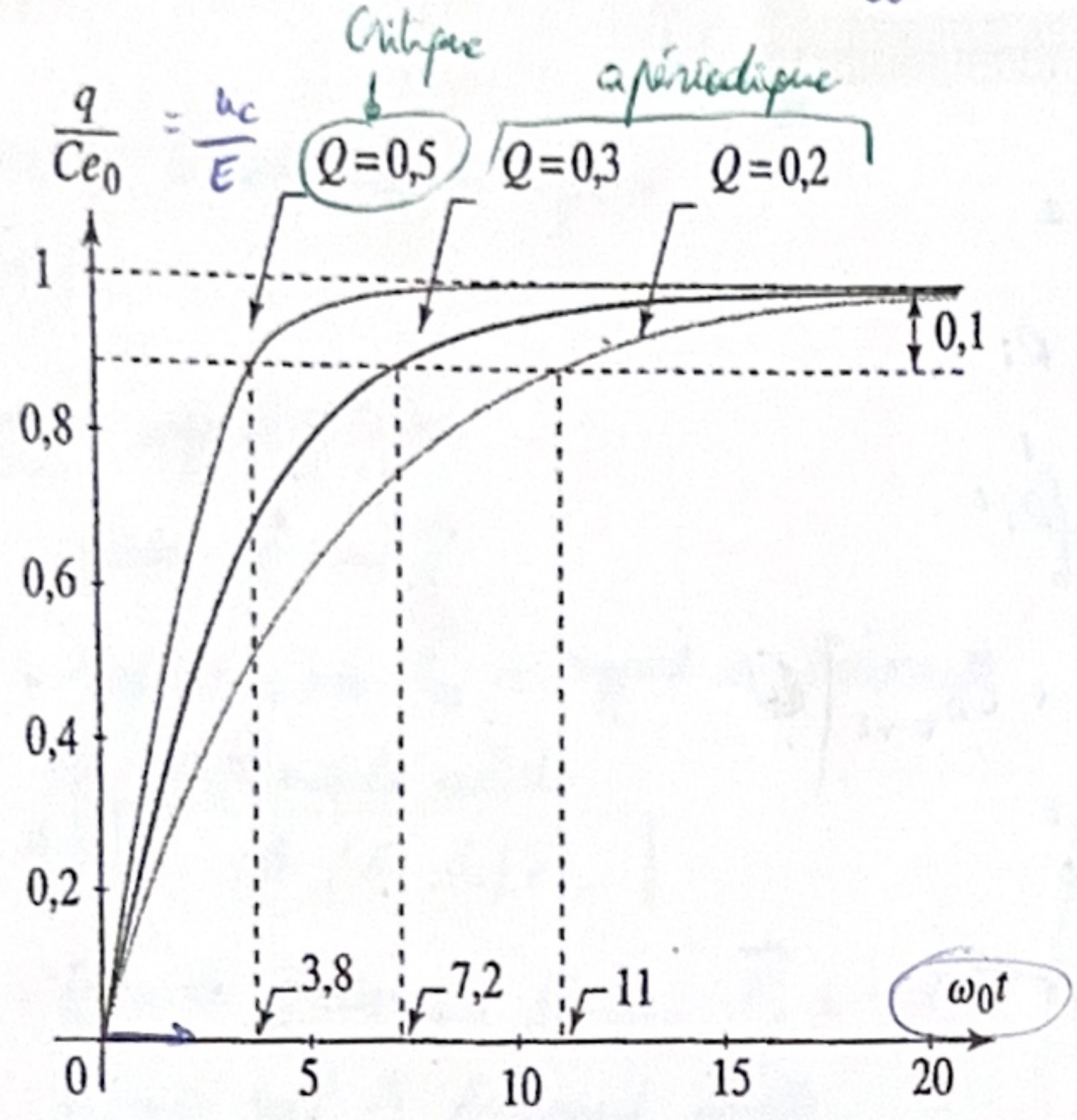
$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0} \quad (3)$$

m eqn diff pnc I, m solutions.

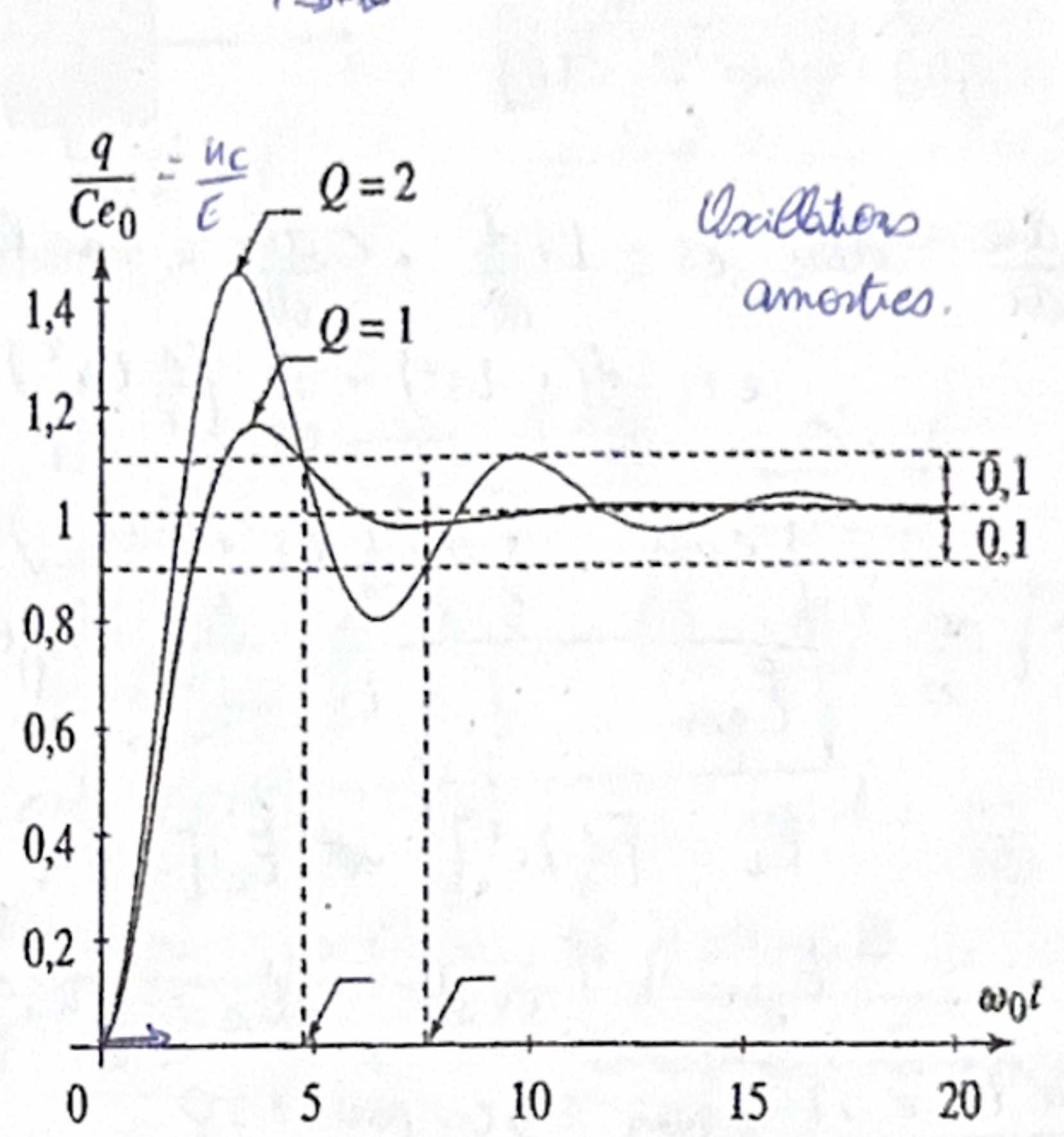
$\Delta < 0 \quad u_c(t) = \exp(-\lambda t) \cdot [A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)] + E = K \exp(-\lambda t) \cos(\Omega t + \varphi) + E$
 $\Delta > 0 \quad u_c(t) = A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t} + E$
 $\Delta = 0 \quad u_c(t) = (At + B) e^{-\lambda t} + E$

3.) Les résultats

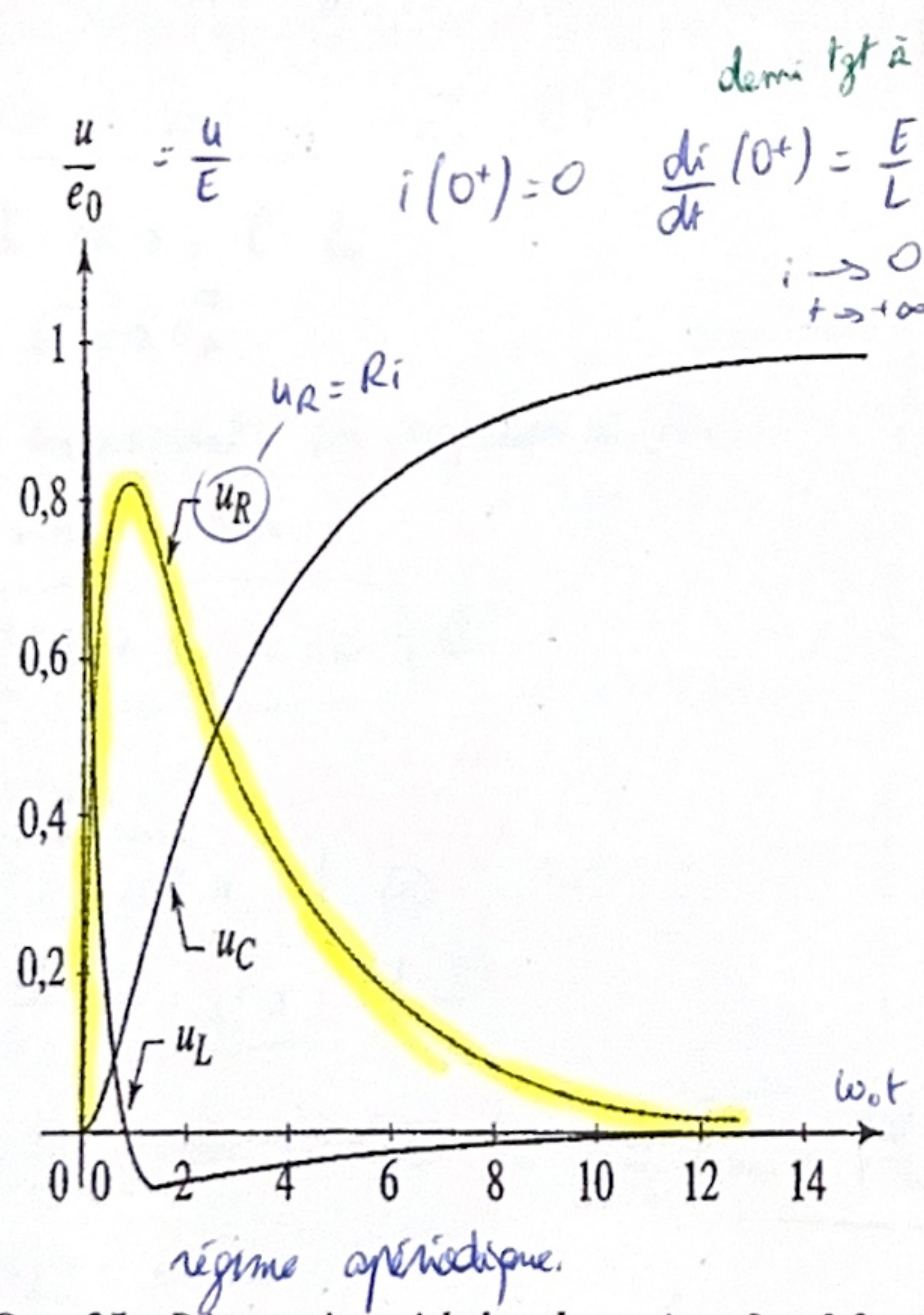
$u_c(0^+) = 0 \quad \frac{du_c}{dt}(0^+) = 0 \quad u_c \rightarrow E \quad t \rightarrow +\infty$



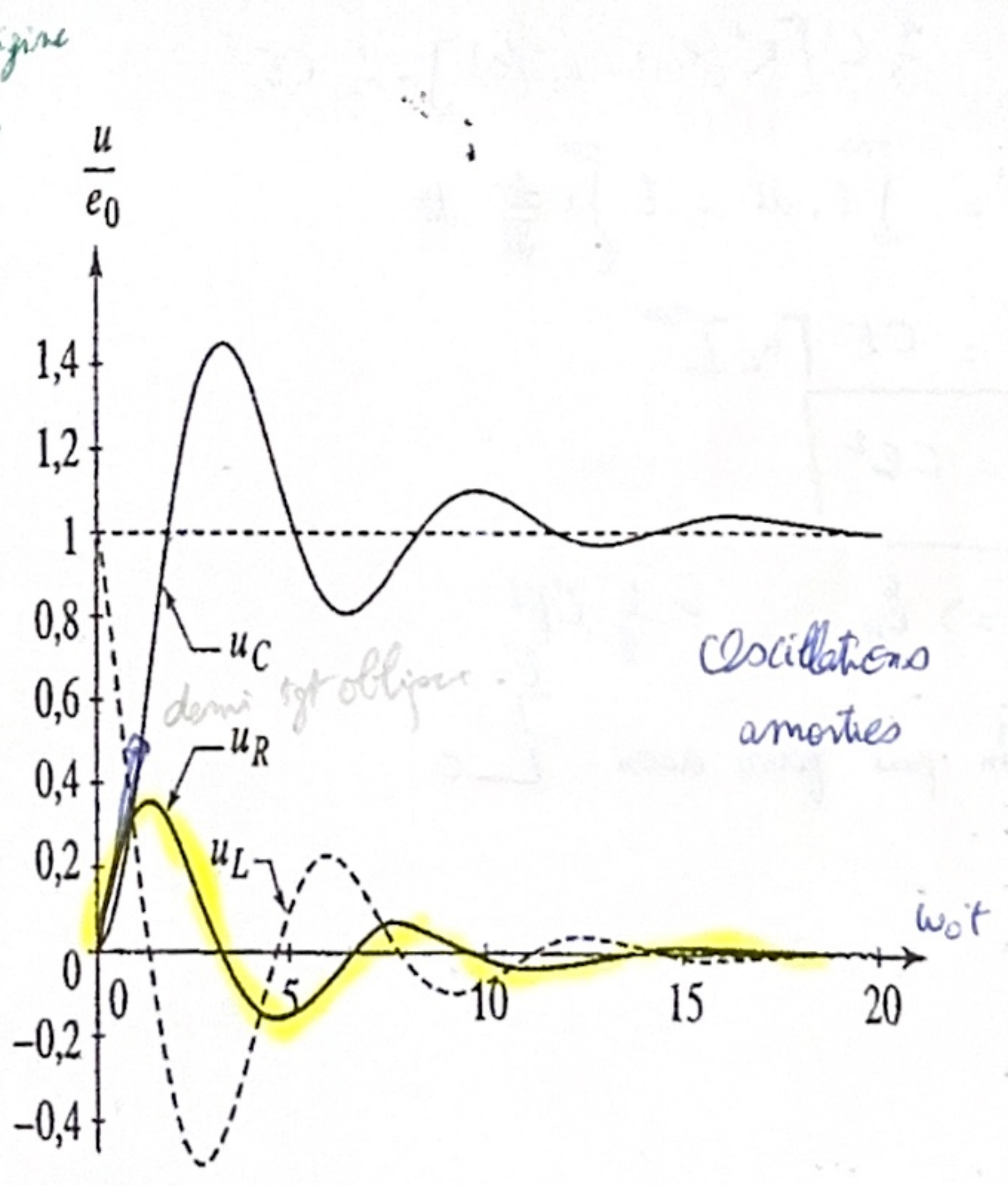
Doc. 35a. Réponse à un échelon de tension. Régimes aperiodiques.



Doc. 36a. Réponse à un échelon de tension. Régimes pseudo-periodiques.



Doc. 35c. Réponse à un échelon de tension. Q = 0,3.



Doc. 36c. Réponse à un échelon de tension. Q = 2.

4.) Bilan énergétique

$$\textcircled{1} \quad l \frac{di}{dt} + Ri + u_c = e(t)$$

$$x_i : e_i = l i \frac{di}{dt} + u_c i + Ri^2$$

$$P_{\text{généré}} = P_L + P_C + P_R$$

(en CVG) (résines en CIR)

$$u_i = C \frac{du_c}{dt} \quad \text{donc } e_i = l i \frac{di}{dt} + C \frac{du_c}{dt} u_c + Ri^2$$

$$e_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} l i^2 \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C u_c^2 \right) + Ri^2$$

$$\int_0^t e_i dt = \int_0^t d \left(\frac{1}{2} l i^2 + \frac{1}{2} C u_c^2 \right) + \int_0^t Ri^2 dt$$

$$\boxed{\dot{E}_{\text{généré}} = \left[\frac{1}{2} l i^2 + \frac{1}{2} C u_c^2 \right]_0^t + \dot{E}_{R \rightarrow t}} \quad \textcircled{2}$$

$$\dot{E}_L = \left[\frac{1}{2} l i^2 \right]_0^t \quad \text{et} \quad \dot{E}_C = \left[\frac{1}{2} C u_c^2 \right]_0^t$$

$$\dot{E}_{\text{généré}} = \int_0^t e_i dt \quad \dot{E}_R = \int_0^t Ri^2 dt$$

Dans le cas où $e = E$: pour $t > 0$ pour $t = 0$

$$\dot{E}_L = \frac{1}{2} l [i^2(t_{\infty}) - i^2(0)] = 0 \quad \text{à } t = +\infty$$

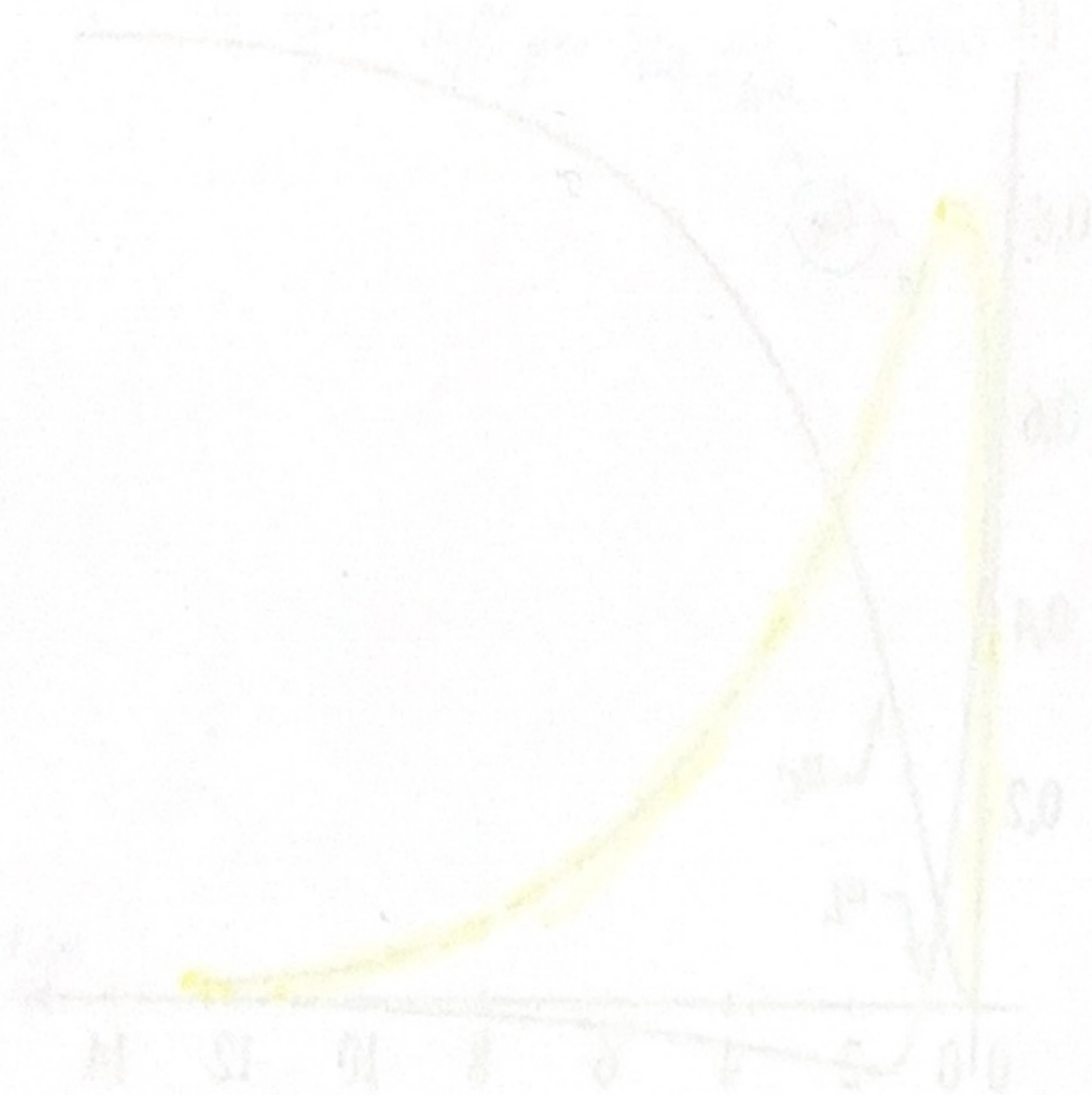
$$\dot{E}_C = \frac{1}{2} C [u_c^2(t_{\infty}) - u_c^2(0)] = \frac{1}{2} C E^2$$

$$\begin{aligned} \dot{E}_{0 \rightarrow +\infty} &= \int_0^{+\infty} E i dt = E \int_0^{+\infty} C \frac{du_c}{dt} dt \\ &= C E [u_c]_0^{+\infty} \end{aligned}$$

$$\boxed{\dot{E}_{\text{généré}} = C E^2}$$

$$\textcircled{3} \Rightarrow \dot{E}_{R \rightarrow +\infty} = \frac{1}{2} C E^2$$

Ré: On peut faire aussi \int_0^E



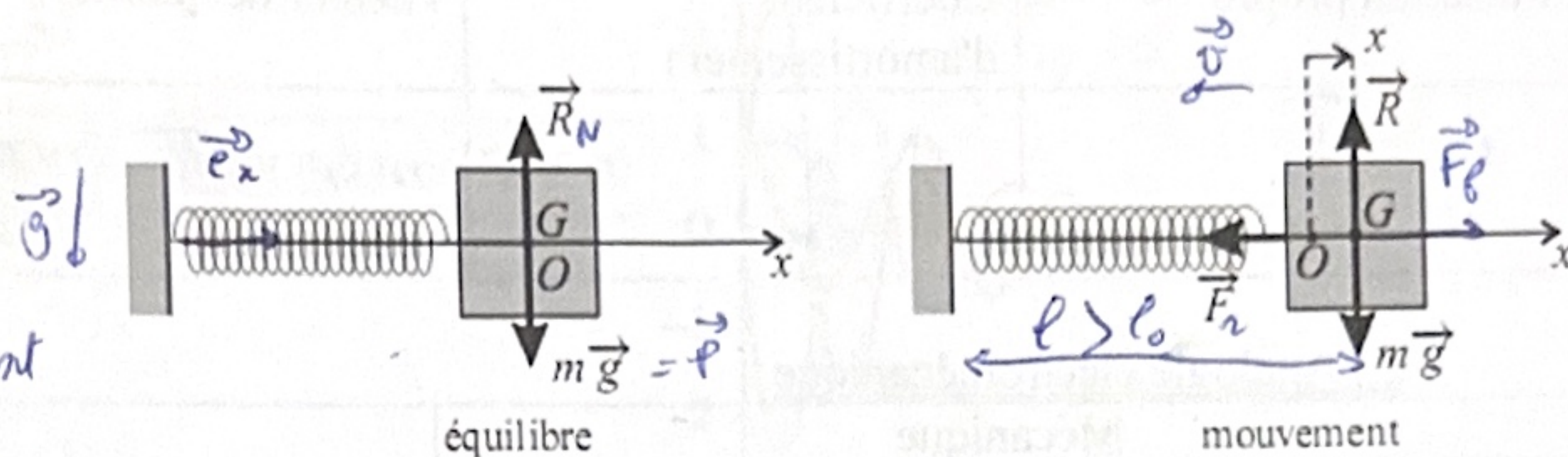
III Oscillateur amorti avec frottement visqueux

1.) Mise en équation

https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Meca/Oscillateurs/oscillateur_horizontal.php

Système: { petit cube de masse m }

de centre d'inertie G , assimilé à 1 point matériel η/m .



Référentiel terrestre supposé galiléen

- poids: $\vec{P} = m \vec{g}$
- réaction d'axe R_N + support en l'absence de frottements solides.

$$\vec{F}_2 = -k(l - l_0) \vec{e}_x$$

- force de frottement fluide: $\vec{F}_f = -\alpha \vec{v}$
 $\alpha > 0$ coef de frottement fluide.

Position d'équilibre: $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$

proj sur (Ox) : $-k(l_{eq} - l_0) = 0$
 $\Rightarrow l_{eq} = l_0$

• Deuxième loi de Newton: $m \vec{a}_n = \Sigma \vec{F}$

$$\vec{ON} = x \vec{e}_x \text{ où } x = l - l_0$$

$$v = \dot{x} \vec{e}_x \quad \vec{a} = \ddot{x} \vec{e}_x$$

Equation de mouvement: En projection sur (Ox) :

$$m \ddot{x} = -kx - \alpha \dot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{\alpha}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0 \quad (1)$$

formes canoniques:

$$\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = d \quad (a)$$

$$\text{ou } \ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (b)$$

Par identification: entre (a) et (b) $\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

pulsation propre: en rad. s^{-1}

$$2\lambda = \frac{\alpha}{m} \Rightarrow \lambda = \frac{\alpha}{2m} \quad \text{coef. d'amortissement (en } s^{-1}\text{)}$$

entre (a) et (b) $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{\alpha}{m} \Rightarrow Q = \frac{m\omega_0}{\alpha}$

facteur de qualité Q dimm.

$$Q = \frac{m \omega_0}{\alpha} \times \frac{\omega_0}{\omega_0} = \frac{m \omega_0^2}{\alpha \omega_0} = \frac{m}{\alpha} \frac{k}{m} = \frac{k}{\alpha}$$

$$Q = \frac{k}{\alpha \omega_0} \quad \text{et } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad Q = \frac{m}{\alpha} \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{mk}{\alpha}}$$

entre (a) et (b): $2\lambda = \frac{\omega_0}{Q} \Rightarrow \lambda = \frac{\omega_0}{2Q}$

Remarque: en l'absence de frottement $\alpha = 0$

(1) $\Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$ Oscillateur harmonique.

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{où } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$x(t) = a \cos(\omega_0 t) + b \sin(\omega_0 t)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\alpha}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0 \quad \text{Formes canoniques : } \frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

Pulsation propre	Coefficient d'amortissement	Facteur de qualité
$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$	$\lambda = \frac{\alpha}{2m}$	$Q = \frac{\sqrt{k}m}{\alpha} = \frac{m\omega_0}{\alpha} = \frac{k}{\alpha m}$

2.) Analogie électromécanique

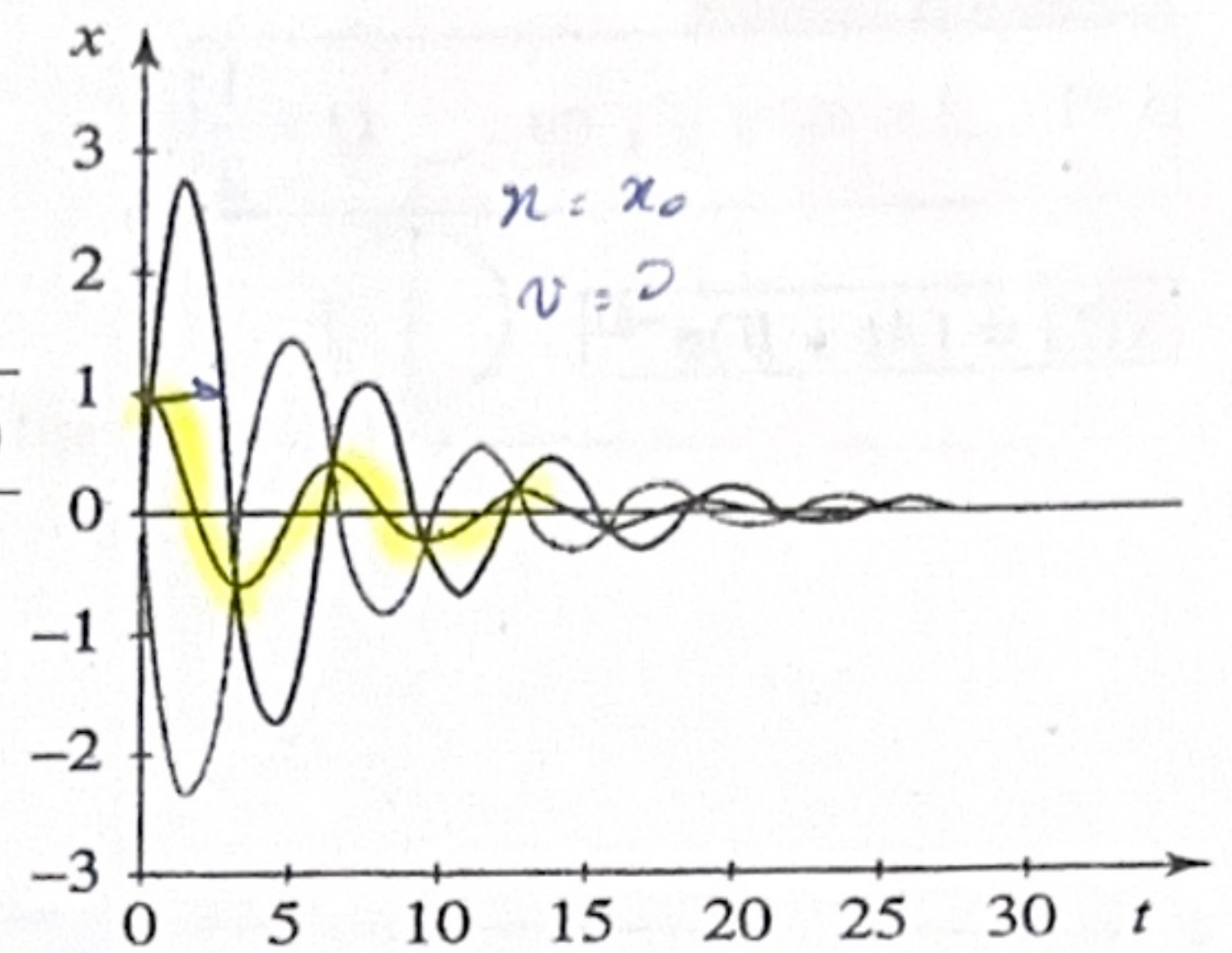
Mécanique	Electricité
Equation différentielle : $\ddot{x} + \frac{\alpha}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0$	$\ddot{q} + \frac{R}{L} \dot{q} + \frac{1}{LC} q = 0$
① $\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$	ou ② $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$
Pulsation propre : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
Facteur de qualité $Q = \frac{m\omega_0}{\alpha}$	$Q = \frac{L\omega_0}{R}$
Elongation : $x = l - l_0$	charge : $q = C\psi$
Vitesse : $v = \dot{x}$	intensité : $i = \frac{dq}{dt}$
Masse : m	inductance L
Coefficient de frottement fluide : α	résistance R
Raideur du ressort : k	inverse de la capacité : $\frac{1}{C}$
Energie mécanique : $E_m = E_c + E_p$ $E_m = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2 (+cte)$	$E = E_L + E_C$ $= \frac{1}{2} L i^2 + \frac{1}{2} C \psi^2$ $\psi = \frac{q}{C} \Rightarrow E = \frac{1}{2} L i^2 + \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$

3.) Solutions

a) Régime pseudo-périodique

$$\Delta < 0 \quad \lambda < \omega_0 \quad \text{ou} \quad Q > \frac{1}{2}$$

$$x(t) = \exp(-\lambda t) \cdot [A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)] = K \exp(-\lambda t) \cos(\Omega t + \varphi)$$



Doc. 12. Oscillateur harmonique amorti par frottement fluide : régime pseudo-périodique ($Q > \frac{1}{2}$).

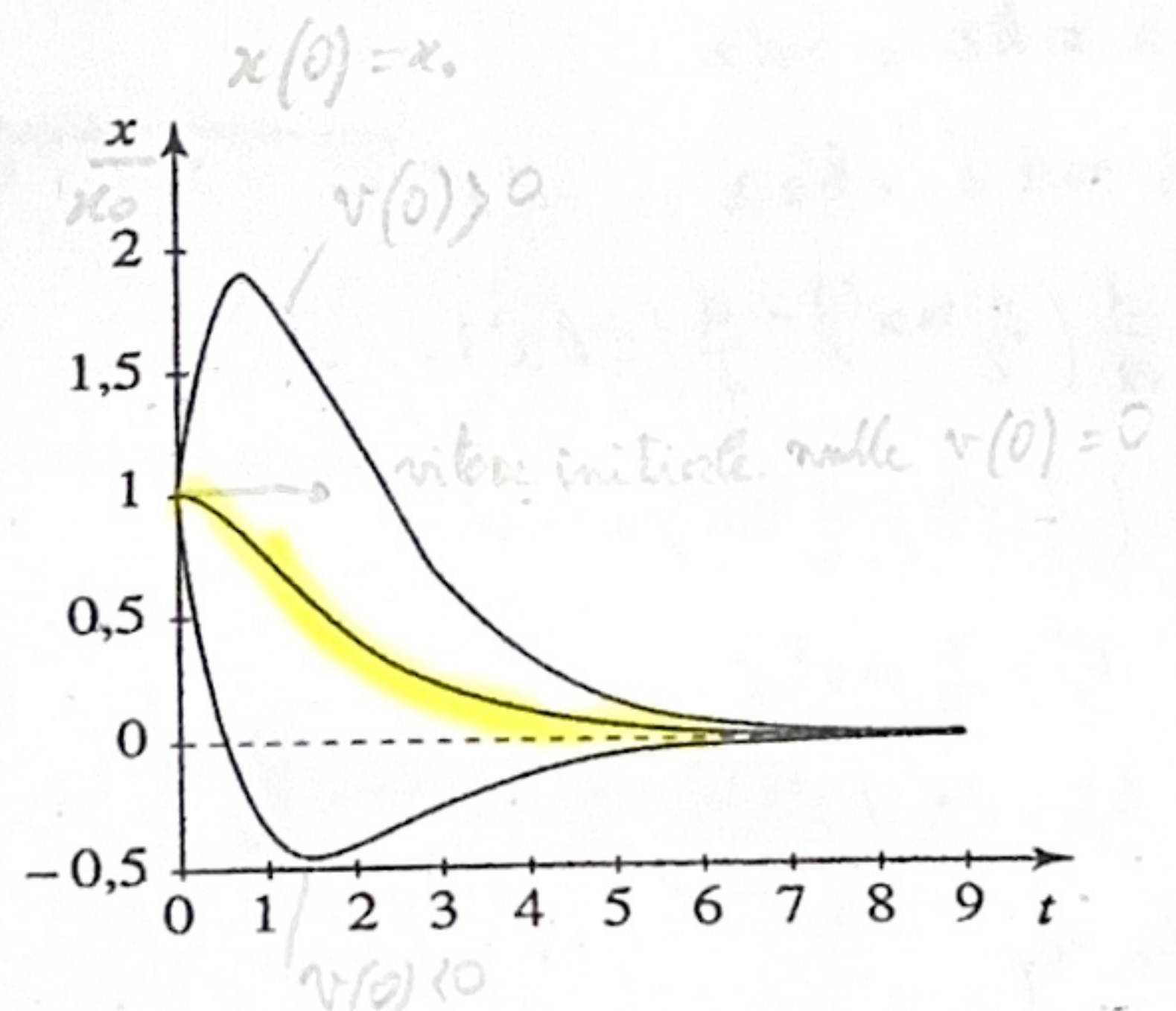
Le mobile est lâché en $x = x_0$ avec une vitesse v_0 positive, nulle ou négative pour les trois cas apparaissant sur la figure.

b) Régime aperiodique

$$\Delta > 0 \quad \lambda > \omega_0 \quad \text{ou} \quad Q < \frac{1}{2}$$

$$x(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$$

$$r_1 < 0 \quad r_2 < 0$$

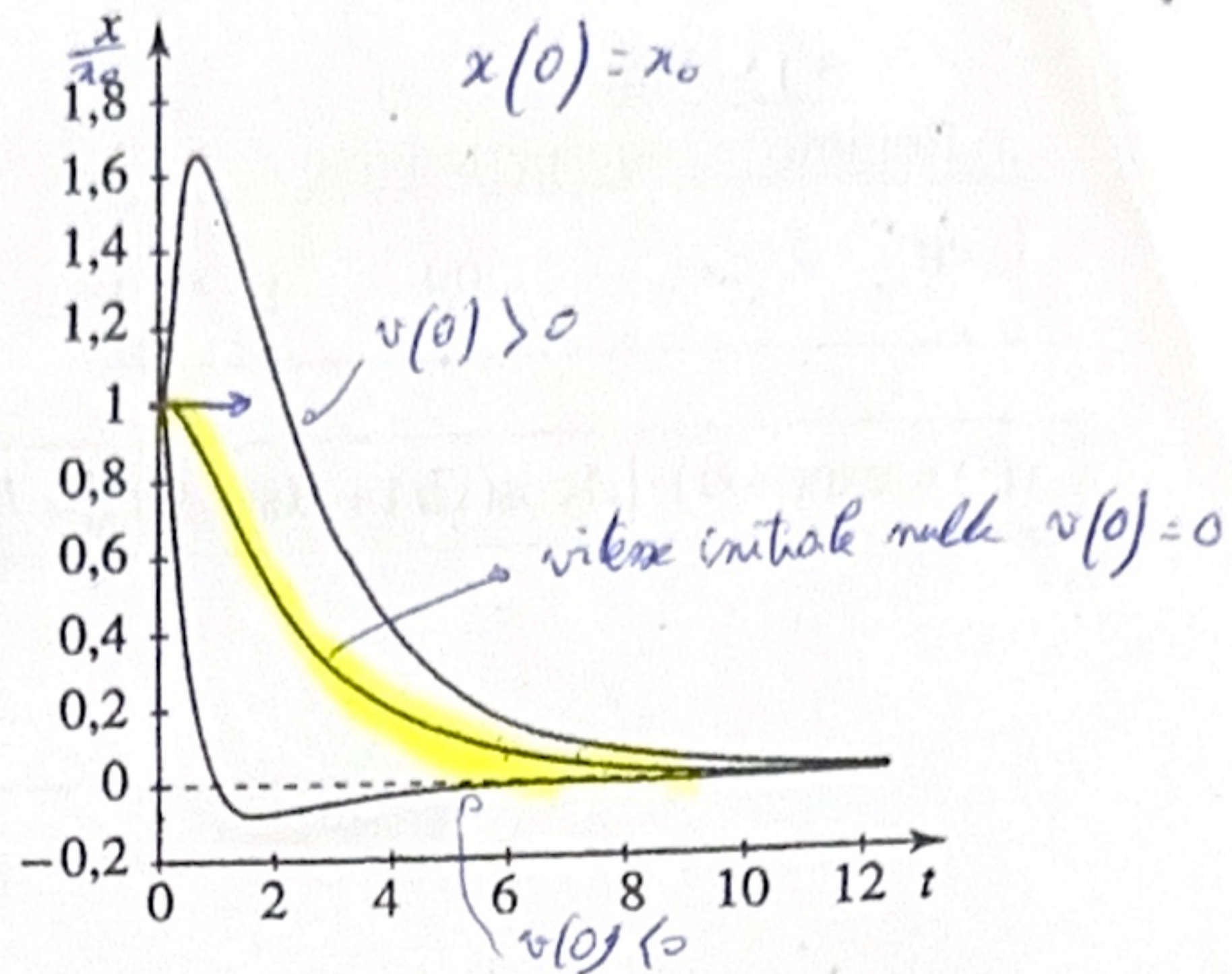


Doc. 17. Oscillateur harmonique amorti par frottement fluide : régime aperiodique ($Q < \frac{1}{2}$) suivant les conditions initiales, l'élongation passe par un extremum ou tend uniformément vers zéro.

c) Régime critique

$$\Delta=0 \quad \lambda = \omega_0 \quad \text{ou} \quad Q = \frac{1}{2}$$

$$x(t) = (At + B)e^{-\lambda t}$$



Doc. 15. Oscillateur harmonique amorti par frottement fluide : régime critique ($Q = \frac{1}{2}$). Les conditions initiales sont les mêmes que celles du mouvement pseudo-périodique (doc. 12). Dans tous les cas, le retour à l'équilibre s'effectue plus rapidement.

4.) Bilan énergétique

Deuxième loi de Newton en LFD projetée sur (Ox) p. 11:

$$m\ddot{x} = -\alpha\dot{x} - kx$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} + kx = -\alpha\dot{x}$$

$$(\times \dot{x}) \Rightarrow m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = -\alpha\dot{x}^2$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m\dot{x}^2 \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} kx^2 \right) = -\alpha\dot{x}^2$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2 \right) = -\alpha\dot{x}^2$$

cf SE3: $E_c = \frac{1}{2} m\dot{x}^2$

$$E_p = \frac{1}{2} kx^2$$

$$E_m = E_c + E_p$$

$$E_m = E_c + E_p + d\epsilon$$

$$\frac{dE_m}{dt} = -\alpha\dot{x}^2 < 0$$

E_m décroît au cours du temps ($\alpha > 0$)

La perte d' E_m est dissipée en forme de chaleur (frottements).