3) Réponse en vitesse

a) Notat° complexe

vitesse $v = x_1$, $\underline{v} = \dot{\underline{x}}_1 = j\omega\,\underline{x}_1$ $\qquad \underline{v} = \underline{V}e^{j\omega t}$ où $\underline{V} = V e^{j\varphi_v}$

Donc $\underline{V}e^{j\omega t} = j\omega\,\underline{X}e^{j\omega t}$ $\;\rightarrow\; \boxed{\underline{V} = j\omega\,\underline{X}}$

① $\Rightarrow \underline{V} = \dfrac{j\omega A}{1-u^2+j\frac{u}{Q}}$ $\qquad u = \dfrac{\omega}{\omega_0} \Rightarrow \omega = u\,\omega_0$

$\Rightarrow \boxed{\underline{V} = \dfrac{j\omega_0 A u}{1-u^2+j\frac{u}{Q}}}$ On divise par ju

$$\underline{V} = \frac{\omega_0 A}{\frac{1}{ju} - \frac{u^2}{ju} + \frac{ju}{juQ}} = \frac{\omega_0 A}{\frac{1}{ju} + ju + \frac{1}{Q}}$$

Donc $\underline{V} = \dfrac{\omega_0 A}{-\frac{j}{u} + ju + \frac{1}{Q}} = \dfrac{\omega_0 A}{\frac{1}{Q} + j\left(u - \frac{1}{u}\right)} = \dfrac{Q\omega_0 A}{1 + Qj\left(u + \frac{1}{u}\right)}$

③ $\boxed{\underline{V} = \dfrac{\omega_0 A Q}{1 + jQ\left(u - \frac{1}{u}\right)}}$ étude possible à partir du ②

forme canonique du ③

b) étude de l'amplitude de la vitesse

③ $\left|\dfrac{\underline{V}}{A}\right| = \dfrac{V}{A} = \dfrac{\omega_0 Q}{\sqrt{1+Q^2\left(u-\frac{1}{u}\right)^2}} = \dfrac{\omega_0 Q}{\sqrt{f(u)}}$

$f(u) = 1 + Q^2\left(u - \frac{1}{u}\right)^2$

$u \to 0 \quad f(u) \to +\infty \quad \left|\frac{\underline{V}}{A}\right| \to 0$

$u \to +\infty \quad f(u) \to +\infty \quad \left|\frac{\underline{V}}{A}\right| \to 0$

$f'(u) = 2Q^2\left(u - \frac{1}{u}\right)\left(1 + \frac{1}{u^2}\right)$

$f'(u) = 0$ pour $u - \frac{1}{u} = 0 \Rightarrow u^2 - 1 = 0 \Rightarrow u = \pm 1$

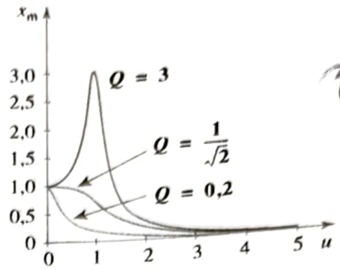
$u \geq 0 \Rightarrow \boxed{u_r = 1}$ avec $u = \dfrac{\omega}{\omega_0}$

$\Rightarrow \boxed{\omega_r = \omega_0}$ pulsation de résonnance

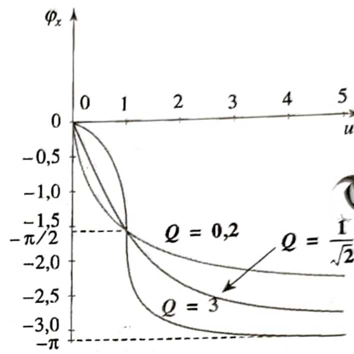
$f(u_r) = 1 + Q^2\left(u_r - \frac{1}{u_r}\right)^2 = 1$

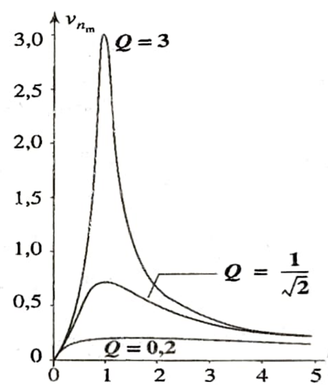
$\left|\frac{\underline{V}}{A}\right|(u_r) = Q\,\omega_0$

max d'amplitude pour $|\underline{V}|$ = résonnance en vitesse

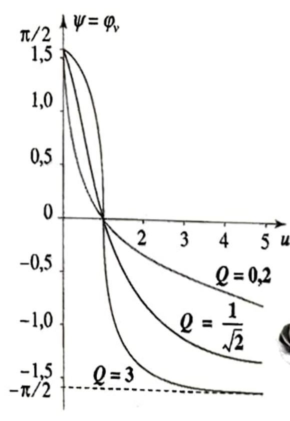


Doc. 8. *Variation de l'amplitude normalisée $x_{n_m} = \frac{x_m}{x_{A_m}}$ de la réponse en élongation en fonction de $u = \frac{\omega}{\omega_0}$ pulsation normalisée de l'excitation pour différents amortissements.*





Doc. 12. *Variation de l'amplitude : $v_{n_m} = \frac{v_m}{\omega_0 x_{A_m}}$ de la réponse en vitesse en fonction de la pulsation normalisée $u = \frac{\omega}{\omega_0}$ de l'excitation*



c) étude de la phase de la vitesse.

(3) $\underline{V} = \dfrac{Q\omega_0 A}{1+Qj(u-\frac{1}{u})} = \dfrac{Q\omega_0 A}{\underline{Den}}$ où $\underline{Den} = 1 + jQ(u - \frac{1}{u})$

$\varphi_v = \arg(Q\omega_0 A) - \arg(\underline{Den}) = 0 - \varphi_D$

$$\boxed{\varphi_v = -\varphi_D \quad \text{où } \varphi_D = \arg(\underline{Den})}$$

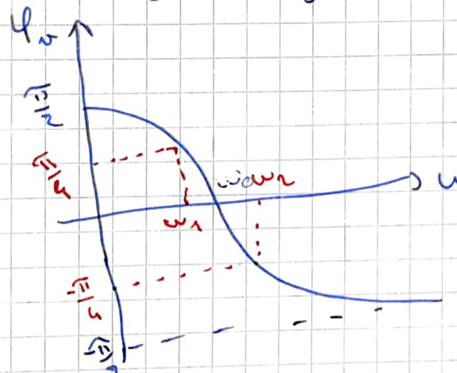
$\cos\varphi_D = \dfrac{1}{\sqrt{1+Q^2(u-\frac{1}{u})^2}} > 0 \Rightarrow \varphi_D \in \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$

$$\boxed{\tan\varphi_D = Q\left(u - \frac{1}{u}\right)}$$

$u \to 0$ $\quad \tan\varphi_D \to -\infty$ $\quad \varphi_D \to -\frac{\pi}{2}$ $\quad \varphi_v \to \frac{\pi}{2}$

$u \to +\infty$ $\quad \tan\varphi_D \to +\infty$ $\quad \varphi_D \to \frac{\pi}{2}$ $\quad \varphi_v \to -\frac{\pi}{2}$

$\omega_1 = \omega_0$ $\quad \tan\varphi_D = 0$ $\quad \varphi_D = 0$ $\quad \varphi_v = 0$



d) étude de la bande passante :

Pulsation de coupure tq : $|\underline{V}|(\omega) = \dfrac{V_{max}}{\sqrt{2}} = \dfrac{|\underline{V}|(\omega_1)}{\sqrt{2}}$

$|\underline{V}|(\omega_1 = \omega_0) = Q\omega_0 A$

$\Rightarrow \dfrac{\cancel{Q\omega_0} A}{\sqrt{1+Q^2(u-\frac{1}{u})^2}} = \dfrac{\cancel{Q\omega_0} A}{\sqrt{2}} \Rightarrow 1 + Q^2\left(u - \frac{1}{u}\right)^2 = 2$

$\Rightarrow Q^2\left(u-\frac{1}{u}\right)^2 = 1 \Rightarrow Q\left(u - \frac{1}{u}\right) = \pm 1$ $\quad$ ⚠ ±

$\Rightarrow u - \dfrac{1}{u} = \pm\dfrac{1}{q} \Rightarrow \boxed{u \pm \dfrac{u}{q} - 1 = 0}$

Le discriminant est $\Delta = \dfrac{1}{Q^2} + 4 > 0$ 4 racines réelles.

$u = \pm\dfrac{1}{2Q} \pm \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2}$

$$u = \pm\frac{1}{2Q} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{Q^2}+4}$$

$u = \frac{\omega}{\omega_0} > 0$ $\quad u_1 = \frac{-1}{2Q} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$ $\quad u_2 = \frac{+1}{2Q} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$

$$\boxed{\frac{\omega_1}{\omega_0} = \frac{-1}{2Q} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \qquad \frac{\omega_2}{\omega_0} = \frac{1}{2Q} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}}$$

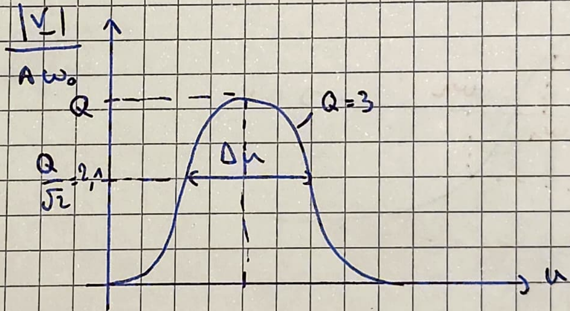
$$\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0} = \frac{1}{Q} \Rightarrow \boxed{\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}} \Rightarrow \boxed{Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}}$$

Q ↗ largeur du pic de raisonance ↘
"pic étroit" ⟺ "raisonance aigüe" } cf doc 12
"Rotat de phase + rapide"
(= passage de $\frac{\pi}{4}$ à $\frac{-\pi}{4}$ sur $\Delta\omega$ + petit)

Rq : $\sqrt{\frac{1}{Q^2}+4} > \sqrt{\frac{1}{Q^2}}$ donc $\sqrt{\frac{1}{Q^2}+4} > \frac{1}{Q}$

bande passante $[\omega_1, \omega_2]$
tq $|\underline{V}| \geq \frac{V_{max}}{\sqrt{2}}$

cf graphes $\boxed{\Delta u = \frac{1}{Q}}$



Rq pour la phase : $\tan \varphi_D = Q\left(u - \frac{1}{u}\right)$

Calcul des pulsat de coupures $\quad Q\left(u - \frac{1}{u}\right) = \pm 1$

$\Rightarrow \tan \varphi_D = \pm 1 \qquad \varphi_D = \pm\frac{\pi}{4}$

$\varphi_v = -\varphi_D . \qquad \varphi_v = \pm\frac{\pi}{4}$