

Signaux Electriques

SE6 Filtrage linéaire d'un signal sinusoïdal

I Etude d'un filtre	1
1.) Grandeurs caractéristiques d'un signal sinusoïdal	1
2.) Diagramme de Bode du quadripôle	2
II Etude détaillée de filtres du premier ordre	3
1) Circuit RC série sortie sur C.	3
2) Circuit RC série sortie sur R.	5
III Etude détaillée de filtres du second ordre	7
1) Circuit RLC série sortie sur C.	7
2) Circuit RLC série sortie sur R.	9

Filtre : opérateur qui permet de sélectionner des signaux utiles, selon leurs fréquences.

Linéaire : ne contient que des dipôles linéaires. La grandeur de sortie a alors la même fréquence que la grandeur d'entrée.

signal imposé par générateur



I Etude d'un filtre

1.) Grandeurs caractéristiques d'un signal sinusoïdal

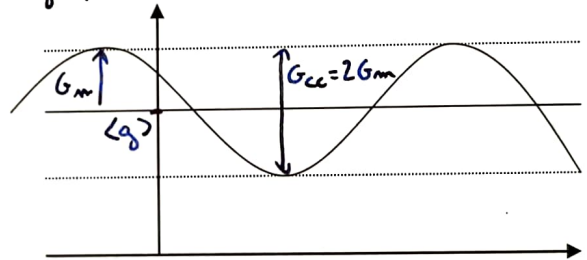
Grandeur sinusoïdale : $g(t) = G_m \cos(\omega t + \phi) + \langle g \rangle$

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

où la valeur moyenne de g est $\langle g \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T g(t) dt$ *

= offset *

= décalage *



Pour toute la suite du cours, on prendra $\langle g \rangle = 0$ d'où $g(t) = G_m \cos(\omega t + \phi)$

Valeur efficace (ou valeur RMS) : valeur du signal continu qui, traversant le même conducteur ohmique, provoque les mêmes pertes Joule moyennes.

$$I_{eff} = \sqrt{\langle i^2(t) \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt}$$

$$U_{eff} = \sqrt{\langle u^2(t) \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt}$$

Démo : Conducteur ohmique, en régime continu :

Loi d'ohm : $U = R.I$ Puissance reçue : $P = U.I = \frac{U^2}{R} = R.I^2$

Conducteur ohmique, en régime périodique : Loi d'Ohm

Puissance instantanée reçue : $P(t) = u(t) \cdot i(t) = \frac{u^2(t)}{R} = R \cdot i^2(t)$

Puissance moyenne : $P = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T R \cdot i^2(t) dt$

$$P = R \cdot \frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt = R I_{eff}^2$$

Signal sinusoïdal : $i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi_i)$ $u(t) = U_m \cos(\omega t + \phi_u)$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$$

$$I_{eff} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

$$U_{eff} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$$

$$I_{eff}^2 = \frac{I_m^2}{2} \Rightarrow \boxed{I_{eff} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}} \quad I_m > 0$$

$$I_{eff}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt \quad (\omega = \frac{2\pi}{T})$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi_i) dt$$

$$\cos^2(a) = \frac{\cos(2a) + 1}{2}$$

$$I_{eff}^2 = \frac{I_m^2}{T} \int_0^T \frac{1 + \cos(2\omega t + 2\varphi_i)}{2} dt$$

$$= \frac{I_m^2}{2T} \int_0^T (1 + \cos(2\omega t + 2\varphi_i)) dt$$

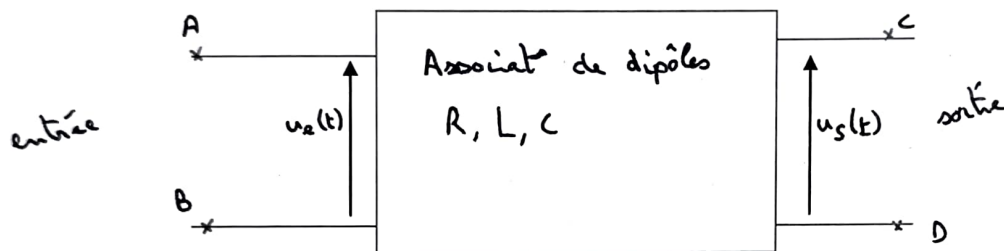
$$= \frac{I_m^2}{2T} \left[t + \frac{1}{2\omega} \sin(2\omega t + 2\varphi_i) \right]_0^T$$

$$= \frac{I_m^2}{2T} \left[T + \frac{1}{2\omega} (\sin(4\pi + 2\varphi_i) - \sin(2\varphi_i)) \right]$$

2.) Diagramme de Bode du quadripôle

Quadripôle : relié à l'extérieur par 4 bornes. Linéaire : ne contient que des dipôles linéaires.

Passif : ne contient pas de sources indépendantes de tension ou de courant.



à vide
= a une branche
rien entre C et D

Amplification en tension (à vide) ou fonction de transfert du quadripôle : $\boxed{H(j\omega) = \frac{u_s}{u_e} = \frac{U_{sm}}{U_{em}}}$ *

Gain en tension du quadripôle : $\boxed{G(\omega) = +20 \log |H|}$ *

* Diagramme de Bode des amplitudes (ou du gain) : on trace G en fonction de $\log \omega$. = tracer les 2 diagrammes en gain et en phase.

* Phase du quadripôle : $\boxed{\varphi = \arg(H(j\omega))}$

* Diagramme de Bode des phases : on trace φ en fonction de $\log \omega$.

Une décade est l'ensemble des pulsations comprises entre ω et 10ω .

$$u_e(t) = U_{em} \cos(\omega t + \varphi_e) ; u_s(t) = U_{sm} \cos(\omega t + \varphi_s)$$

$$\hookrightarrow \underline{u_e(t)} = \underline{U_{em}} e^{j\omega t} \text{ où } \underline{U_{em}} = U_{em} e^{j\varphi_e}$$

$$\underline{u_s(t)} = U_{sm} e^{j(\omega t + \varphi_s)} = \underline{U_{sm}} e^{j\omega t} \text{ où } \underline{U_{sm}} = U_{sm} e^{j\varphi_s} \text{ et } \frac{\underline{U_{em}}}{\underline{U_{sm}}} \text{ amplitudes complexes}$$

$$\underline{H} = \frac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}} = \frac{\underline{U_{sm}}}{\underline{U_{em}}} = \frac{U_{sm} e^{j\varphi_s}}{U_{em} e^{j\varphi_e}} = \frac{U_{sm}}{U_{em}} e^{j(\varphi_s - \varphi_e)}$$

$$\boxed{H = |H| = \frac{U_{sm}}{U_{em}}}$$

$$\boxed{\varphi = \arg(\underline{H}) = \varphi_s - \varphi_e}$$

déphasage de $u_s(t)$ par rapport à u_e

$$\Delta \log \text{ décimal : } \log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

$$y = \log x (\Rightarrow x = 10^y)$$

II Etude détaillée de filtres du premier ordre

1) Circuit RC série sortie sur C.

$$\underline{u_e} = \underline{U_{em}} e^{j\omega t}$$

$$\underline{u_s} = \underline{U_{sm}} e^{j\omega t}$$

$$\left. \begin{aligned} \underline{u_s} &= \underline{Z_c} \dot{i} \\ \underline{u_e} &= (\underline{Z_R} + \underline{Z_c}) \dot{i} \end{aligned} \right\} \frac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}} = \frac{\underline{Z_c}}{\underline{Z_c} + \underline{Z_R}}$$

part division de tension

$$\underline{H} = \frac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 + j\omega \tau} \quad (1)$$

$$\omega_c = \frac{1}{RC} \Rightarrow \underline{H} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} \quad (2) \quad |\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}$$

pulsation caractéristique.

Rq: ① Obtention de l'équation diff ①

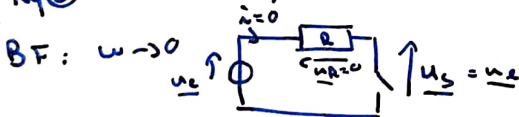
$$\frac{\underline{u_s}(t)}{\underline{u_e}(t)} = \frac{1}{1 + j\omega RC} \Rightarrow \underline{u_s}(t) = \frac{1}{1 + j\omega RC} \underline{u_e}(t)$$

$$\Rightarrow \underline{u_s} + j\omega RC \underline{u_s} = \underline{u_e}$$

$$\Rightarrow \underline{u_s} + RC \frac{d\underline{u_s}}{dt} = \underline{u_e}$$

$$\Rightarrow u_s + RC \frac{du_s}{dt} = u_e$$

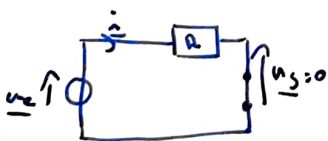
Rq ②: Schémas équivalents



$$\underline{H} = \frac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}} = 1 \quad G = 20 \log(\underline{H}) = 20 \log(1) = 0$$

$$\varphi = \arg(\underline{H}) = \arg(1) = 0$$

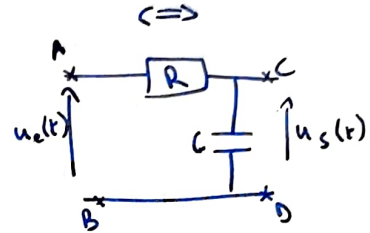
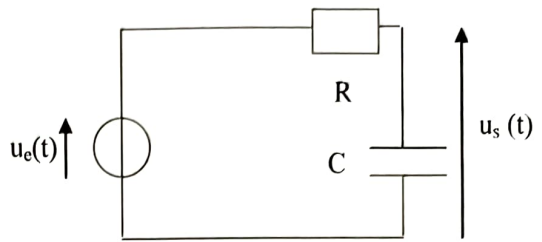
HF: $\omega \rightarrow \infty$ C équivant à un fil



$$\underline{H} = 0$$

$$G \rightarrow -\infty$$

φ indéterminé



b) étude fréquentielle avec équivalents complexes.

Δ Trouver les limites ne suffit pas puisqu'on veut trouver l'équation des asymptotes.

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} \quad (2) \quad \omega \geq 0 \quad \omega_c > 0$$

BF: $\omega \rightarrow 0 \quad \omega \ll \omega_c \quad \frac{\omega}{\omega_c} \ll 1 \quad \frac{\omega}{\omega_c} \rightarrow 0$

$1 + j\frac{\omega}{\omega_c} \approx 1$ polynôme équivalent à son terme de plus bas degré quand $\frac{\omega}{\omega_c} \rightarrow 0$

$$\textcircled{1} \Rightarrow \underline{H} = \frac{1}{1} \quad \underline{H} = 1 \quad |\underline{H}| = 1$$

$$G = 20 \log(|\underline{H}|) \quad G = 0$$

Asymptote horizontale $y = 0$ à BF pour la gain

$$\varphi = \arg(\underline{H}) = \arg(1) \quad \varphi = 0$$

Asymptote horizontale $y_\varphi = 0$ à BF pour la phase.

HF: $\omega \rightarrow +\infty \quad \omega \gg \omega_c \quad \frac{\omega}{\omega_c} \gg 1 \quad \frac{\omega}{\omega_c} \rightarrow +\infty$

Δ $1 + j\frac{\omega}{\omega_c} \approx j\frac{\omega}{\omega_c}$ polynôme équivalent à son terme de + haut degré quand $\frac{\omega}{\omega_c} \rightarrow +\infty$

$$\textcircled{2} \underline{H} = \frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_c}} \quad |\underline{H}| = \frac{1}{\frac{\omega}{\omega_c}} = \frac{\omega_c}{\omega}$$

$$G = 20 \log(|\underline{H}|) = 20 \log(\omega_c) - 20 \log(\omega)$$

Asymptote $y = 20 \log(\omega_c) - 20 \log(\omega)$ pour la gain à HF

On trace y en fonction de $\log \omega$
Droite de pente -20 qui passe par $(\omega = \omega_c, y = 0)$

4 Rq: unité de la pente,

$$\begin{aligned} y(10\omega) - y(\omega) &= (20 \log(\omega_c) - 20 \log(10\omega)) - (20 \log(\omega_c) - 20 \log(\omega)) \\ &= -20 \log\left(\frac{10\omega}{\omega}\right) \\ &= -20 \log(10) \\ &= -20 \text{ dB} \end{aligned}$$

Quand ω est multiplié par 10, on descend de 20 dB sur l'asymptote.

$\Rightarrow$ la pente est de -20 dB/décade

HF: $H \approx \frac{1}{j\omega\omega_c}$ $G = 20 \log |H|$

$y = 20 \log \omega_c - 20 \log \omega$ asymptote de gain à HF

$\varphi = \arg(H)$ $\varphi \approx \arg\left(\frac{1}{j\omega\omega_c}\right) \approx -\arg(j\omega\omega_c)$

$\varphi \approx -\frac{\pi}{2}$

$y_\varphi = -\frac{\pi}{2}$ Asymptote de phase à HF

Rq: $H = \frac{u_p}{u_e} \approx \frac{1}{j\omega\omega_c} \Rightarrow u_p \approx \frac{u_e}{j\omega\omega_c} = \omega_c \times \frac{u_e}{j\omega}$

$\Rightarrow u_p \approx \omega_c \int u_e(t) dt$

Le filtre a un comportement intégrateur à HF.

Point particulier pour $\omega = \omega_c$

② $H = \frac{1}{1+j}$ $|H| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$G = 20 \log\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -10 \log(2)$

$G = -3 \text{ dB}$

$\varphi = \arg(H) = \arg\left(\frac{1}{1+j}\right) = -\arg(1+j)$

$\Rightarrow$ On trouve $\varphi = -\frac{\pi}{4}$

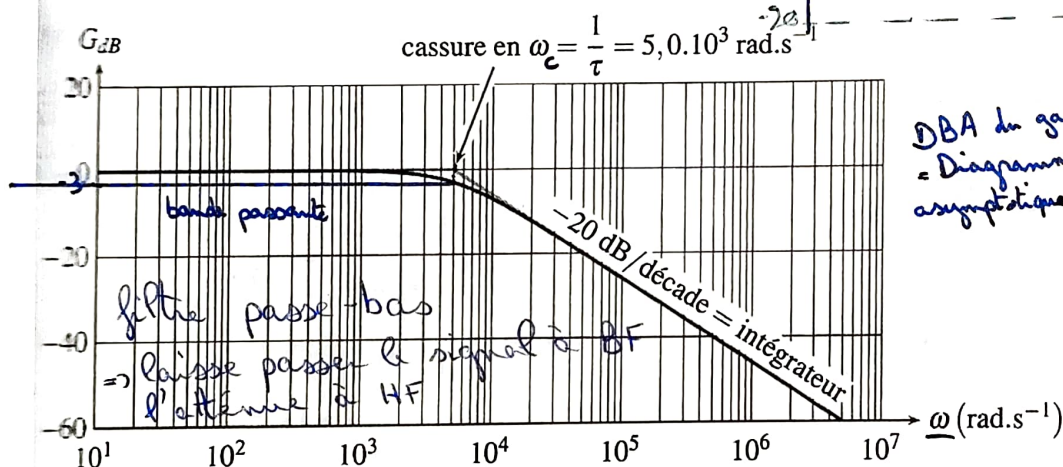
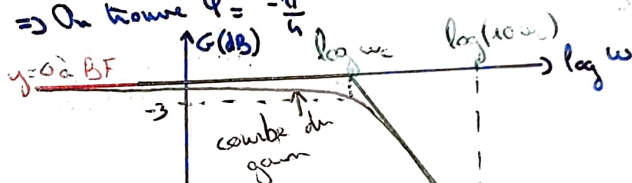


Figure 11.4 – Gain d'un passe-bas du premier ordre dans le cas où $\tau = 2,0 \cdot 10^{-4}$ s (les asymptotes sont en gris).

papier semi-logarithmique.

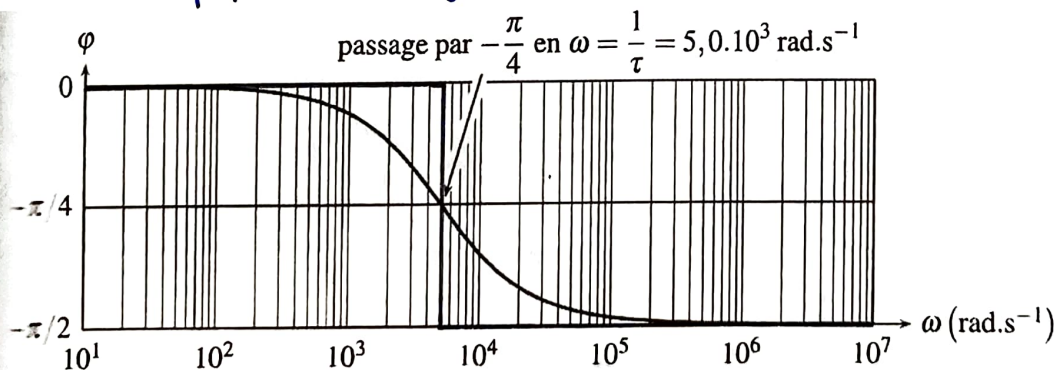
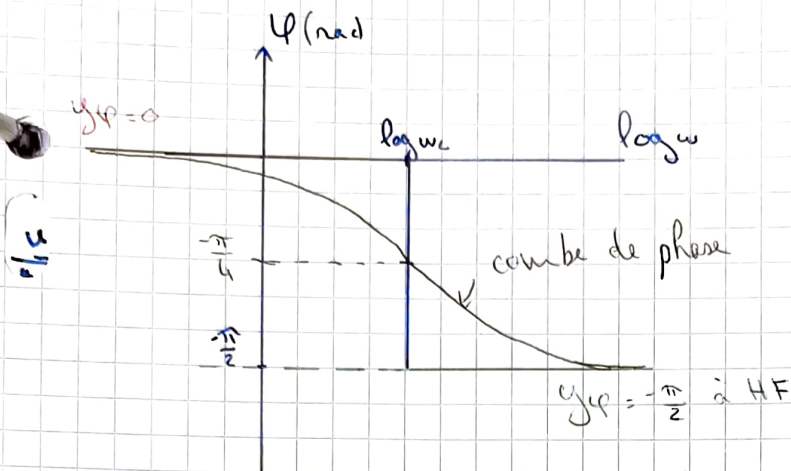


Figure 11.5 – Phase d'un passe-bas du premier ordre dans le cas où $\tau = 2,0 \cdot 10^{-4}$ s.

DBA du gain = Diagramme de bande asymptotique du gain $\{y=0, y=20 \log \omega_c - 20 \log \omega\}$

comportement intégrateur



$$\text{DBA de phase} = \left\{ \varphi = 0, \varphi = -\frac{\pi}{2} \right\}$$

$\Rightarrow$ Bande passante à (-3dB) Intervalle de pulsation sur lequel $|H| \geq \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow 20 \log |H| \geq 20 \log \left(\frac{H_{\max}}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\Rightarrow G \geq 20 \log(H_{\max}) - 10 \log(2)$$

$$\Rightarrow G \geq G_{\max} - 3 \text{ dB}$$

$$G_{\max} = 0 \text{ (à BF)} \Rightarrow H_{\max} = 1$$

$$\text{BP tq } G \geq -3 \text{ dB} \Rightarrow \text{BP} =]0; \omega_c]$$

$$\text{Pulsation de coupure tq } G = G_{\max} - 3 \text{ dB} \Rightarrow H = \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{H = \frac{1}{\sqrt{2}}} \text{ pour } \boxed{\omega = \omega_c = \frac{1}{RC}}$$

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + j\omega \frac{1}{RC}} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 + p\tau} \text{ avec } p = j\omega$$

Commentaires 11.4. BF : $G \approx 0 \Leftrightarrow |H| \approx 1$
et 11.5.

$$|H| = \frac{U_{sm}}{U_{em}} \Rightarrow \boxed{U_{sm} \leq U_{em} \text{ et } \varphi \approx 0}$$

$$\Rightarrow \boxed{u_s(t) \approx u_e(t)} \text{ pas d'effet à BF}$$

$$\text{HF } G \rightarrow -\infty \quad |H| \rightarrow 0 \quad U_{sm} \rightarrow 0 \quad \varphi \rightarrow -\frac{\pi}{2}$$

$$\varphi = \varphi_s - \varphi_c \rightarrow -\frac{\pi}{2} < 0 \quad u_s \text{ est en retard / } u_e \quad u_s \text{ est en quadrature retard.}$$

$$\varphi = \omega \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{\varphi}{\omega} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \Delta t = \varphi \times \frac{T}{2\pi}$$

$$\Delta t = \frac{-\pi}{2} \times \frac{T}{2\pi} = -\frac{T}{4}$$

2) Circuit RC série sortie sur R.

a) étude préliminaire

Pont diviseur de tension:

$$\frac{u_s}{u_e} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} \quad \text{HYP : courant de R et C.}$$

$$\underline{H} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} \quad (1) \quad \underline{H} = \frac{u_s}{u_e} = \frac{j\frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} \quad (2)$$

$$\omega_c = \frac{1}{RC} \quad \text{pulsation particulière.}$$

Rq: 1) obtention de l'équ. diff:

$$\begin{aligned} (1) \Rightarrow u_s (1 + j\omega RC) &= u_e j\omega RC \\ \Rightarrow u_s + RC \frac{du_s}{dt} &= RC \frac{du_e}{dt} \end{aligned}$$

Rq 2: Schéma eq:

BF: $\omega \rightarrow 0$ $\underline{H} = 0$ $|\underline{H}| = 0$
 $G \rightarrow -\infty$
 φ indéterminé

HF: $\omega \rightarrow \infty$ $\underline{H} = 1$ $|\underline{H}| = 1$
 $G = 0$
 $\varphi = 0$

fi. lre passe haut: laisse passer le signal à HF, l'atténue à BF

b) étude fréquentielle.

$$\underline{H} = \frac{j\frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} \quad \Delta \text{ on néglige un terme devant l'autre que de une somme ou une différence.}$$

BF: $\omega \rightarrow 0$ $\frac{\omega}{\omega_c} \ll 1$

$$1 + j\frac{\omega}{\omega_c} \approx 1$$

$$\underline{H} \approx \frac{j\frac{\omega}{\omega_c}}{1} \Rightarrow \underline{H} \approx j\frac{\omega}{\omega_c}$$

$$|\underline{H}| \approx \frac{\omega}{\omega_c} \quad G = 20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right) \approx 20 \log \omega - 20 \log \omega_c$$

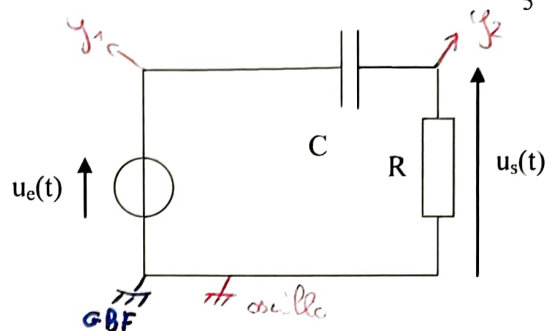
$G = 20 \log \omega - 20 \log \omega_c$ droite de pente 20dB/dec. qui passe par $\omega = \omega_c, G = 0$

$$\varphi = \arg(\underline{H}) = \arg(j\frac{\omega}{\omega_c}) \quad \varphi \approx +\frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$

Rq: $\underline{H} = \frac{u_s}{u_e} \approx j\frac{\omega}{\omega_c} \Rightarrow u_s \approx j\frac{\omega}{\omega_c} u_e$

$$\Rightarrow u_s = \frac{1}{\omega_c} \frac{du_e}{dt} \quad \text{Dérivée à BF.}$$

HF: $\omega \rightarrow \infty$ $\frac{\omega}{\omega_c} \gg 1$ $1 + j\frac{\omega}{\omega_c} \approx j\frac{\omega}{\omega_c}$

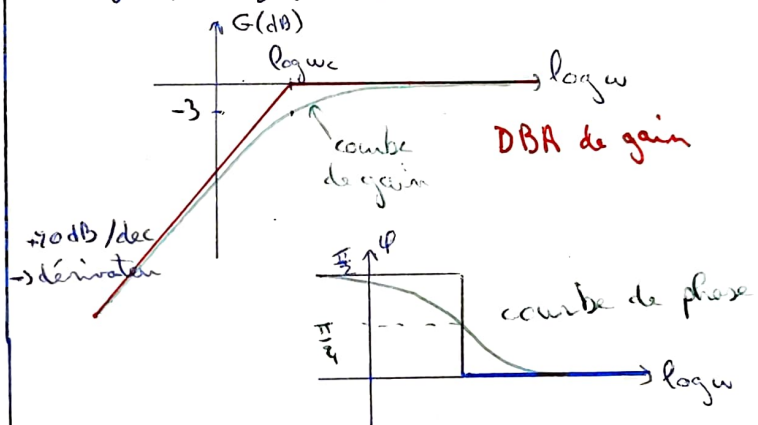


$$\underline{H} \approx \frac{j\frac{\omega}{\omega_c}}{j\frac{\omega}{\omega_c}} \approx 1 \quad |\underline{H}| \approx 1 \quad G \approx 0 \quad \varphi \approx 0$$

$$\omega = \omega_c \quad \underline{H} = \frac{1}{1+j} \quad |\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad G = 20 \log \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$G = -3 \text{ dB}$$

$$\varphi = \arg(\underline{H}) = \arg(j) - \arg(1+j) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$



à HF, $\varphi \approx 0$ $u_s(t) \approx u_e(t)$

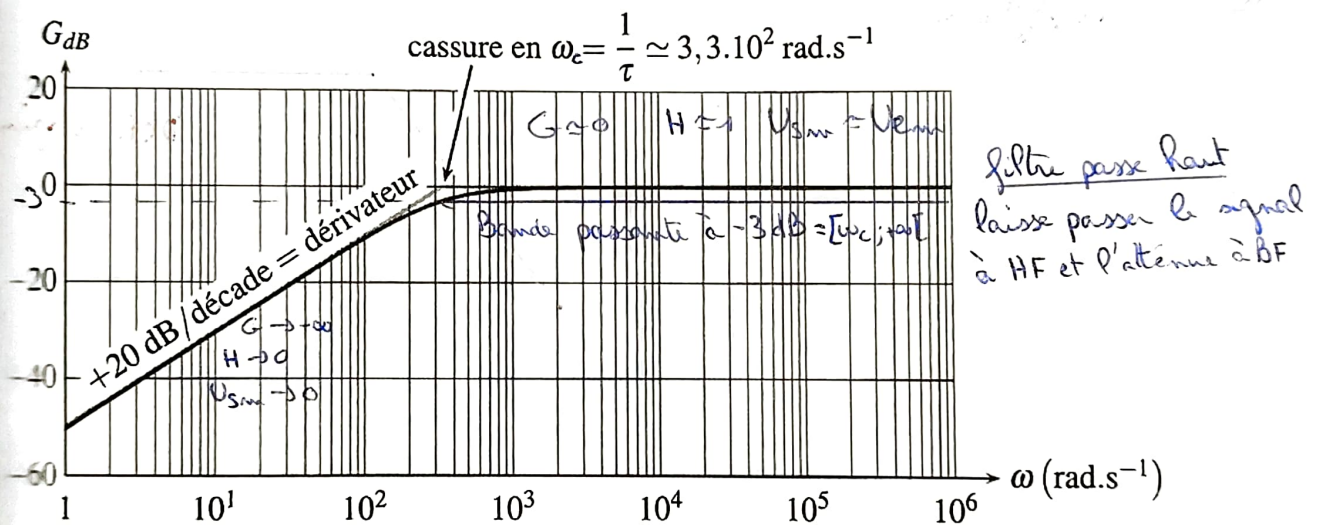


Figure 11.7 – Gain d'un passe-haut du premier ordre dans le cas où $\tau = 3,0 \cdot 10^{-3}$ s (les asymptotes sont en gris).

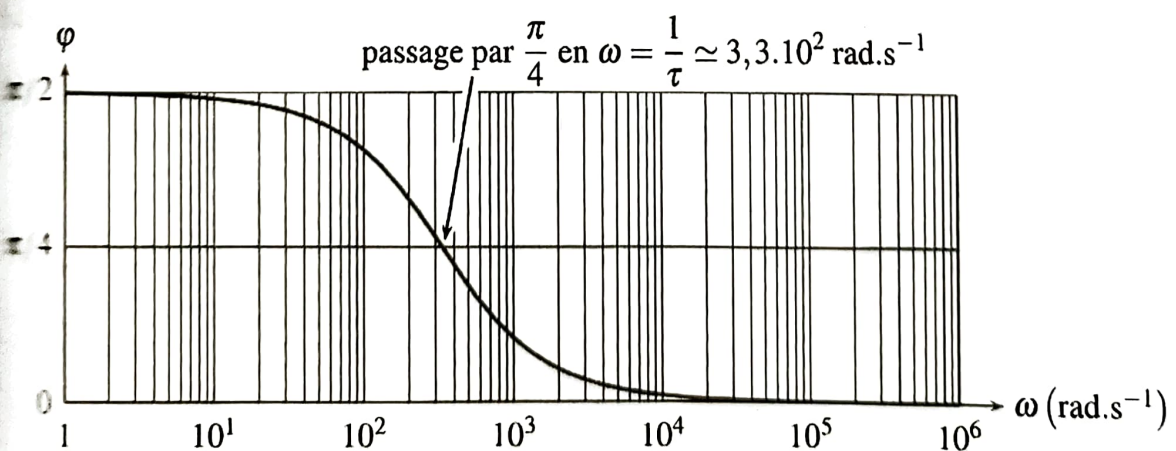
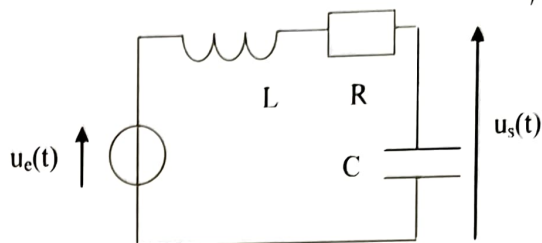


Figure 11.8 – Phase d'un passe-haut du premier ordre dans le cas où $\tau = 3,0 \cdot 10^{-3}$ s.

III Etude détaillée de filtres du second ordre

1) Circuit RLC série sortie sur C.



$$H = \frac{u_s}{u_e} = \frac{1}{j\omega C (R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C})}$$

$$H = \frac{u_s}{u_e} = \frac{1}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} \quad (1)$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ pulsation propre}$$

$$H = \frac{u_s}{u_e} = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + jRC\omega \frac{\omega}{\omega_0}}$$

$$H = \frac{1}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}} \text{ où } x = \frac{\omega}{\omega_0} \text{ pulsation réduite}$$

$$Q = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{\omega_0}{RC\omega_0^2} = \frac{L}{RC}$$

$$Q = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{L\omega_0}{R} \quad Q = \frac{L}{R} \times \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

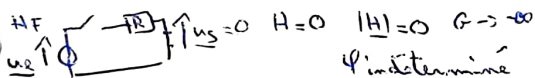
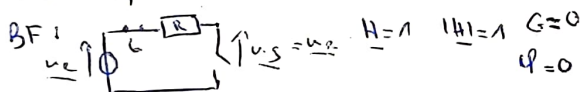
sans dim

Rq 1: Equa diff: $u_s(1 + LCj^2\omega^2 + RCj\omega) = u_e$

$$\Rightarrow u_s + LC \frac{d^2 u_s}{dt^2} + RC \frac{du_s}{dt} = u_e$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 u_s}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_s}{dt} + \frac{1}{LC} u_s = \frac{1}{LC} u_e$$

Schéma équivalent:



b) étude fréquentielle:

$$H = \frac{1}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0} \quad \text{Den} = 1 - x^2 + j\frac{x}{Q}$$

$$\text{BF: } \omega \rightarrow 0 \quad x \ll 1 \quad 1 - x^2 + j\frac{x}{Q} \approx 1$$

$$H \approx 1 \quad |H| \approx 1 \quad G \approx 0$$

$$y=0 \quad \varphi = \arg(H) \approx 0 \quad y\varphi = 0$$

$$\text{HF: } \omega \rightarrow +\infty \quad x \gg 1 \quad \text{Den} \approx -x^2$$

$$H \approx -\frac{1}{x^2}$$

$$\text{Rq: } H = \frac{u_s}{u_e} \approx \frac{1}{j^2 x^2} \Rightarrow u_s = \frac{1}{j^2 x^2} u_e = \frac{1}{-x^2} u_e = -\frac{1}{x^2} u_e$$

$$x = \frac{\omega}{\omega_0} \quad u_s \approx -\frac{\omega_0^2}{\omega^2} u_e$$

$$\Rightarrow j^2 \omega^2 u_s \approx \omega_0^2 u_e \quad (\text{pas de dérivée pour } \omega_0)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 u_s}{dt^2} \approx \omega_0^2 u_e \quad (\text{double intégral})$$

$$|H| = \frac{1}{x^2} \quad G = 20 \log(|H|) = -40 \log x$$

$$\approx -40 \log \omega + 40 \log \omega_0$$

Droite de pente -40 dB/décade passant par $\omega = \omega_0$ $y=0$

$$y = -40 \log \omega + 40 \log \omega_0$$

$$\varphi = \arg\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad \frac{1}{x^2} \text{ réel négatif}$$

$$\varphi = \pm \pi \quad y\varphi = \pm \pi$$

$$x=1 \quad \omega=\omega_0 \quad H \approx \frac{1}{1-1+j\frac{1}{Q}} = \frac{Q}{e^{j\frac{\pi}{2}}} = Q e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$|H|=Q \quad G=20 \log Q \quad \varphi = \arg(Q e^{-j\frac{\pi}{2}}) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\text{Rq: Recherche du max: } |H| = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}$$

$$f(x) = (1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}$$

$$\text{On pose } x = x^2 : f(x) = (1-x^2)^2 + \frac{x}{Q^2}$$

$$f'(x) = -2(1-x) + \frac{1}{Q^2}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow 1-x_1 = \frac{1}{2Q^2} \Rightarrow x_1 = 1 - \frac{1}{2Q^2} \quad Q \gg \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow x_1 = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

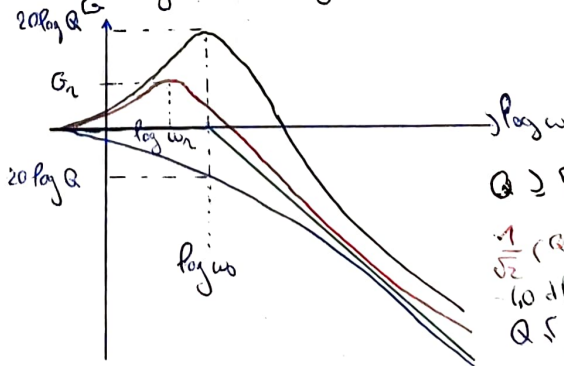
$$f(x_1) = \left(1 - 1 + \frac{1}{2Q^2}\right)^2 + \frac{1}{Q^2} \left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)$$

$$= \frac{1}{4Q^4} + \frac{4Q^2}{4Q^4} - \frac{2}{4Q^4}$$

$$f(x_1) = \frac{4Q^2 - 1}{4Q^4} = \sqrt{\frac{4Q^2 - 1}{4Q^4}} = \frac{\sqrt{4Q^2 - 1}}{2Q^2}$$

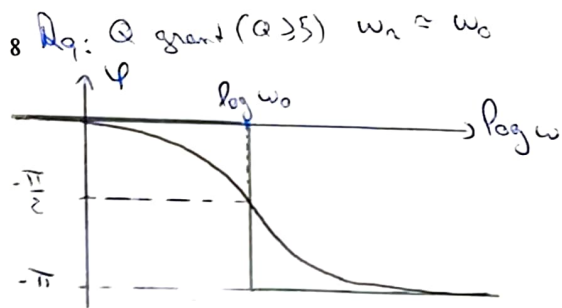
$$H(x_1) = \frac{2Q^2}{\sqrt{4Q^2 - 1}} = H_n$$

$$G_n = 20 \log H_n = 20 \log (|H|(x_1))$$



$Q \geq 5$

$\frac{1}{\sqrt{2}} < Q < 5$
-40 dB/dec
 $Q \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$



c) Commentaires

$$Q = \frac{1}{2\xi}$$

à BF: $G \rightarrow 0$ $|H| \rightarrow 1$

$$|H| = \frac{U_{sm}}{U_{em}} \Rightarrow U_{sm} \approx U_{em} \quad \left\{ u_s(t) \approx u_e(t) \right\}$$

$$\varphi \rightarrow 0 \quad \varphi = \frac{U_{us}}{U} G_{dB}$$

Le filtre passe bas laisse passer le signal à BF.

à HF: $G \rightarrow -\infty$ $|H| \rightarrow 0$ $U_{sm} \rightarrow 0$ $\varphi \rightarrow -\pi$

Le filtre atténue et déphase les hautes fréquences.

u_s est en opposition de phase / u_e

+ Double intégrateur

+ Amplification locale autour de ω_n = phénomène de résonance.

$G > 0$ $|H| > 1$

$$U_{sm} > U_{em} \text{ pour } Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Plus Q est grand, plus le pic de résonance est étroit plus la rotation de phase est "rapide" (courbe de φ + proche des asymptotes).

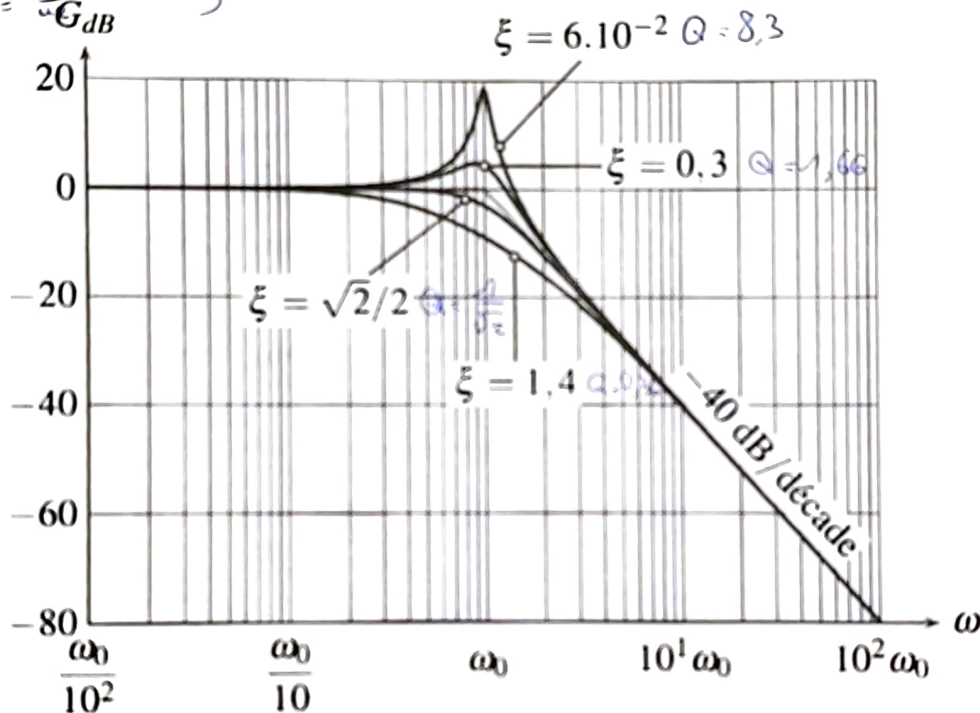


Figure 11.16 – Gain d'un passe-bas du deuxième ordre (les asymptotes sont en gris).

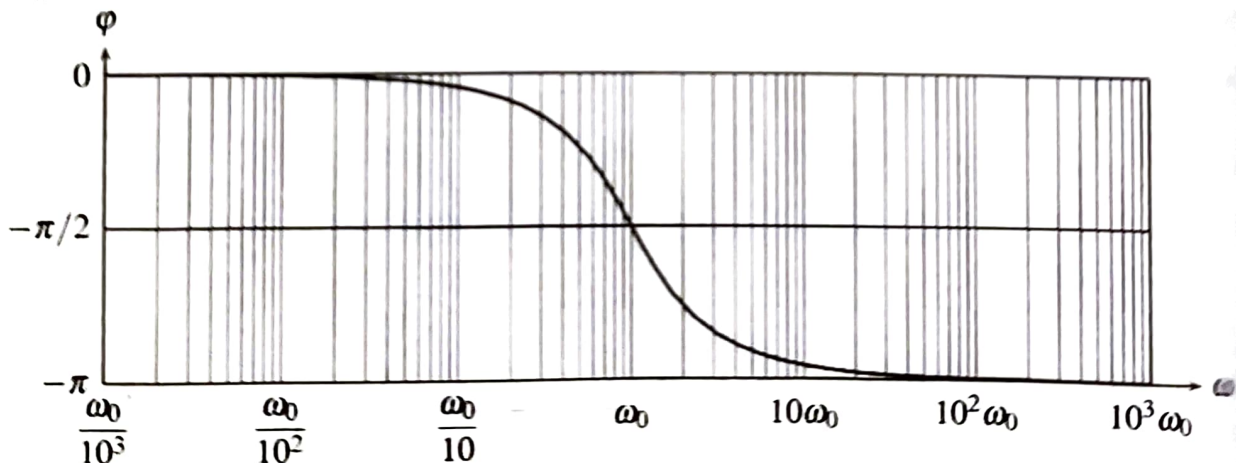


Figure 11.15 – Phase d'un passe-bas du deuxième ordre (tracé pour $\xi = 0,70$).

2) Circuit RLC série sortie sur R.

a) études préliminaires
part diviseur de tension

$$H = \frac{u_s}{u_e} = \frac{R}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + \frac{L}{R} j\omega + \frac{1}{j\omega RC}}$$

$$H = \frac{1}{1 + \frac{L}{R} j\omega + \frac{1}{j\omega RC}} = \frac{1}{1 + j\left(\frac{L}{R}\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)}$$

$$x = \frac{\omega}{\omega_0} \quad H = \frac{1}{1 + j\left(\frac{L}{R}x\omega_0 - \frac{1}{RC\omega_0 x}\right)}$$

$$Q = \frac{L}{R} \omega_0 = \frac{1}{RC\omega_0}$$

$$\Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{LC} \quad \left(\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\right) \text{ point propre}$$

$$Q = \frac{L}{R} \times \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow \left(Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}\right) \text{ facteur de qualité}$$

$$H = \frac{1}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

* pour la méthode

Rq1: ① équa diff

$$u_e = u_s \left(1 + \frac{L}{R} j\omega + \frac{1}{j\omega RC}\right)$$

$$R u_s + L \frac{du_s}{dt} + \frac{1}{C} \int u_s dt = R u_e$$

$$\left(\frac{d^2 u_s}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_s}{dt} + \frac{1}{LC} u_s = \frac{R}{L} \frac{du_e}{dt}\right)$$

$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L} \quad \text{et} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

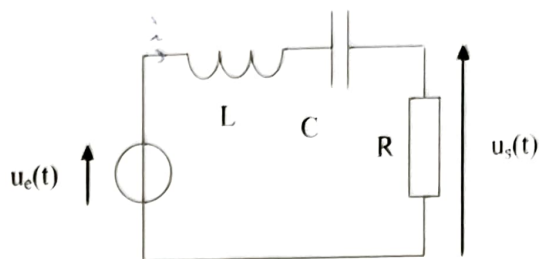
2) éléments équivalents:

BF: $\omega \rightarrow 0$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{j\omega RC} \gg \frac{L}{R}$ $\Rightarrow$ $H \approx 0$ $G \rightarrow -\infty$ Ψ indéterminé

HF: $\omega \rightarrow \infty$ $\Rightarrow$ $\frac{L}{R} j\omega \gg \frac{1}{j\omega RC}$ $\Rightarrow$ $H \approx 0$ $G \rightarrow -\infty$ Ψ indéterminé

HF: $\omega \rightarrow \infty$ $\Rightarrow$ $\frac{L}{R} j\omega \gg \frac{1}{j\omega RC}$ $\Rightarrow$ $H \approx 0$ $G \rightarrow -\infty$ Ψ indéterminé

HF: $\omega \rightarrow \infty$ $\Rightarrow$ $\frac{L}{R} j\omega \gg \frac{1}{j\omega RC}$ $\Rightarrow$ $H \approx 0$ $G \rightarrow -\infty$ Ψ indéterminé



b) étude fréquentielle

$$H = \frac{1}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

BF: $\omega \rightarrow 0$ $\omega \ll \omega_0$ $x \ll 1$ $\frac{1}{x} \gg 1$

$$x - \frac{1}{x} \approx -\frac{1}{x}$$

$$1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right) \approx jQ\left(-\frac{1}{x}\right) \approx -\frac{jQ}{x}$$

$$H \approx \frac{-x}{jQ} \quad |H| \approx \frac{x}{Q} \quad G = 20 \log(|H|) = 20 \log x - 20 \log Q$$

$y = 20 \log x - 20 \log Q$ de pente 20 dB/déc passant par $x=1$ $y = -20 \log Q$

$$H \approx \frac{jx}{Q} \approx \frac{jx}{Q}$$

$$\varphi = \arg(H) \approx \arg\left(\frac{x}{Q} e^{j\frac{\pi}{2}}\right) \approx \frac{\pi}{2} \quad \boxed{\varphi = \frac{\pi}{2}}$$

$$H = \frac{u_s}{u_e} \approx \frac{jx}{Q} \Rightarrow u_s = \frac{j\omega}{\omega_0 Q} u_e$$

$$u_s \approx \frac{1}{\omega_0 Q} \frac{du_e}{dt} \quad \text{dérivée}$$

HF: $\omega \rightarrow +\infty$ $\omega \gg \omega_0$ $x \gg 1$ $\frac{1}{x} \ll 1$

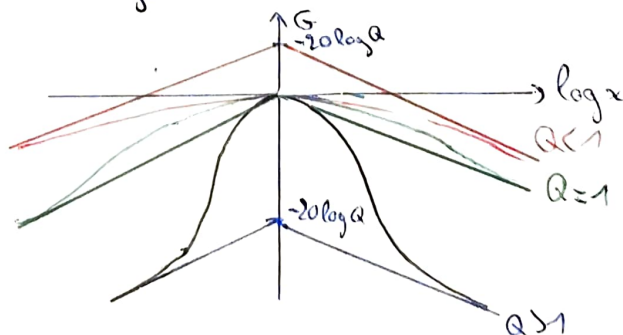
$$x - \frac{1}{x} \approx x \Rightarrow 1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right) \approx jQx$$

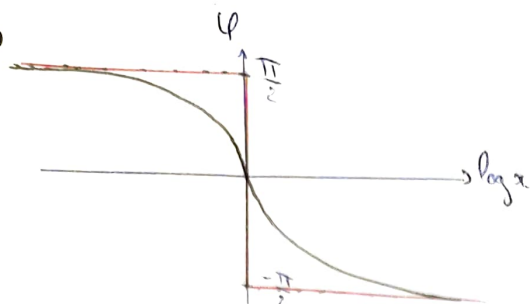
$$H \approx \frac{1}{jQx} \quad |H| = \frac{1}{Qx} \quad G = 20 \log(|H|) = -20 \log Q - 20 \log x$$

$y = -20 \log Q - 20 \log x$ de pente -20 dB/déc passant par $x=1$ $y = -20 \log Q$

$$\varphi = \arg(H) = \arg\left(\frac{1}{jQx}\right) = \arg\left(\frac{1}{xQ} e^{-j\frac{\pi}{2}}\right) = -\frac{\pi}{2} \quad \boxed{\varphi = -\frac{\pi}{2}}$$

$$H = \frac{u_s}{u_e} \approx \frac{\omega_0}{jQ\omega} \Rightarrow u_s \approx \frac{\omega_0}{Q} \int u_e dt \quad \text{Intégration.}$$





Rq: Bande passante: $\lg |H| = \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}}$

$$H_{\max} = |H|(x=1) = 1$$

Pulsation de coupure $\lg |H| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\frac{1}{\sqrt{1+Q^2(x-\frac{1}{x})^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow 2 = 1 + Q^2(x - \frac{1}{x})^2$$

$$Q(x - \frac{1}{x}) = \pm 1$$

$$Qx^2 \pm x - Q = 0$$

$$x^2 \pm \frac{x}{Q} - 1 = 0$$

Le discriminant est:

$$\Delta = \frac{1}{Q^2} + 4 > 0$$

$$\text{donc } x = \frac{\pm \frac{1}{Q} \pm \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-1}{2Q} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4}$$

$$x_2 = \frac{1}{2Q} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4}$$

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

$$\Delta x = \frac{1}{Q} \text{ largeur de la bande passante}$$

$Q \uparrow \Delta x \downarrow$
pic de résonance plus étroit
résonance + aigüe

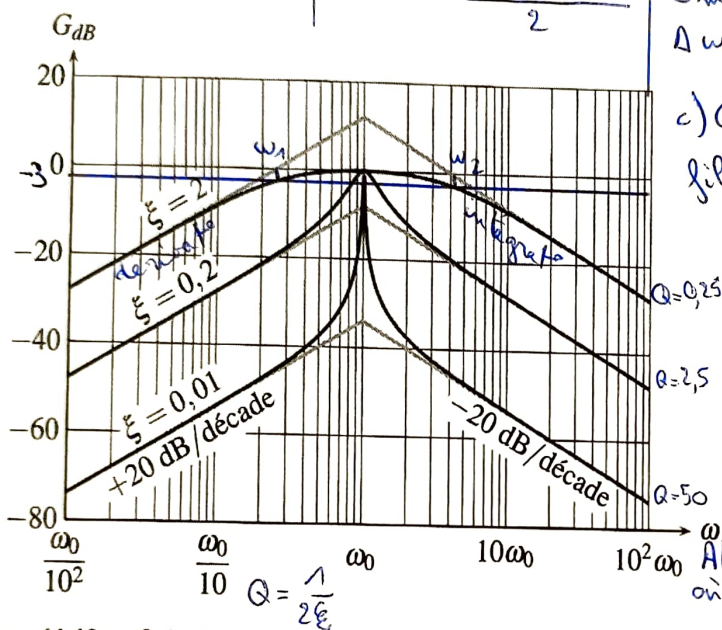
$$\text{Bande passante pour } H \geq \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow G \geq G_{\max} - 3 \text{ dB}$$

$$G_{\max} = 0$$

$$\Delta \omega = \frac{\omega_0}{Q} \text{ où } x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

c) Commentaires 11.18 et 11.19
filtre passe bande.



filtre très sélectif: ne laisse passer que la pulsation ω_0
Atténuation > 40 dB pour les domaines où il dérive ou intègre.

Figure 11.18 – Gain d'un passe-bande du deuxième ordre (les expressions asymptotiques sont en gris).

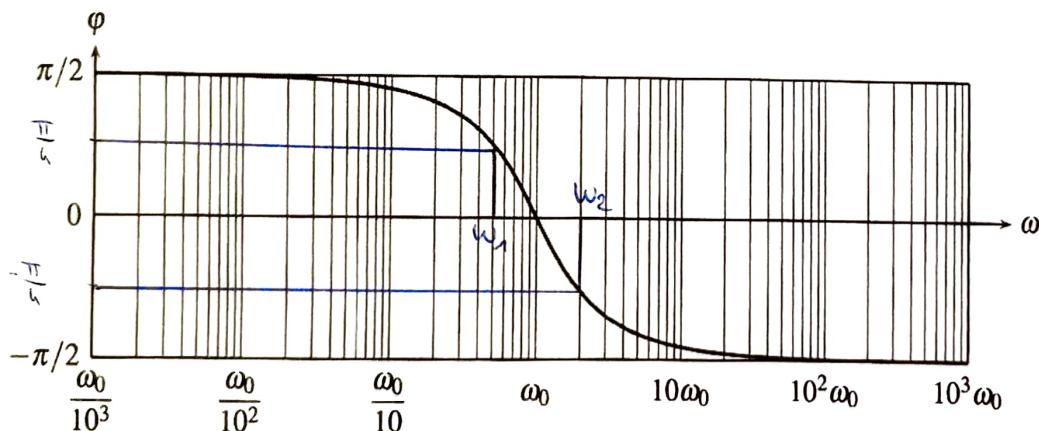


Figure 11.19 – Phase d'un passe-bande du deuxième ordre (tracé pour $\xi = 0,70$).