

I Filtrage d'un signal non sinusoïdal	1
1.) Théorème de Fourier (découvert par le mathématicien et physicien Joseph Fourier début XIX).....	1
2.) Filtre passe-bas du premier ordre.....	3
3.) Filtre passe-haut du premier ordre	5
4.) Filtre passe-bande	6
II Utilisation des filtres	7
1.) Choix d'un modèle de filtre en fonction d'un cahier des charges.....	7
2.) Catalogue de filtres.....	8
3.) Mise en cascades de deux filtres.....	9
4.) Exemple de filtre non linéaire : le multiplieur	10
III Capacité numérique : Simuler l'action d'un filtre sur un signal périodique.....	11

I Filtrage d'un signal non sinusoïdal

1.) Théorème de Fourier (découvert par le mathématicien et physicien Joseph Fourier début XIX)

Tout signal périodique de pulsation ω_s et de forme quelconque peut se reconstituer par la superposition de signaux sinusoïdaux de pulsations multiples de ω_s .

$$s(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) \text{ où } \omega_n = n \omega_s \text{ et } \omega_s = 2\pi f_s$$

Les A_n et φ_n sont des constantes positives.

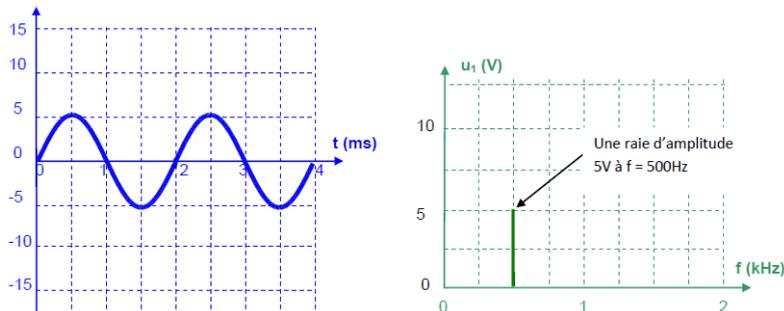
A_0 est la composante continue du signal, ou valeur moyenne ou offset.

A_1 est l'amplitude du signal fondamental de fréquence f_s .

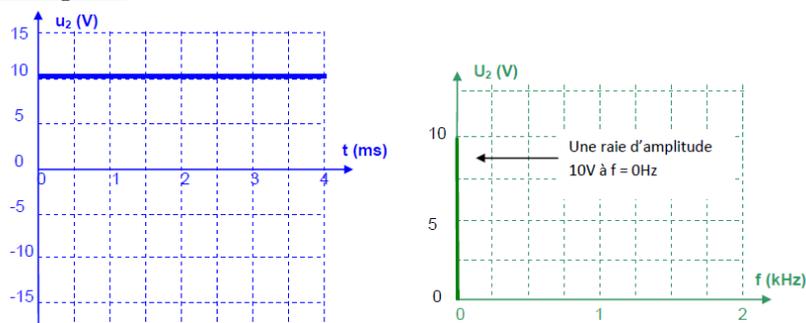
Les A_n sont les amplitudes des harmoniques de fréquence $f_n = n f_s$ de rang $n \geq 2$.

Analyse spectrale : Opération qui consiste à déterminer la décomposition en signaux sinusoïdaux d'un signal donné.

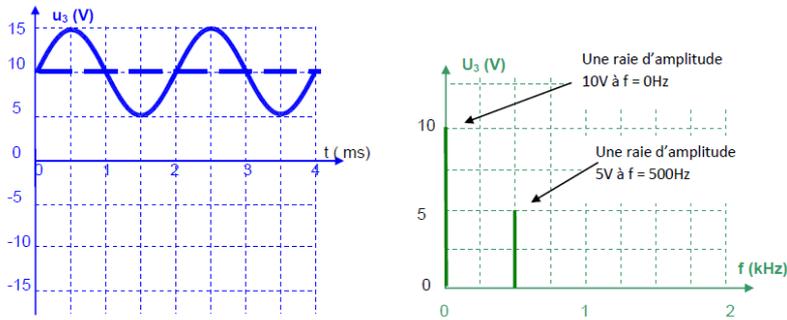
Exemple 1 : $u_1(t) = 5 \cdot \sin(2\pi \cdot 500 \cdot t)$ ne contient qu'une seule fréquence : $f = 500 \text{ Hz}$ $T = 2 \text{ ms}$



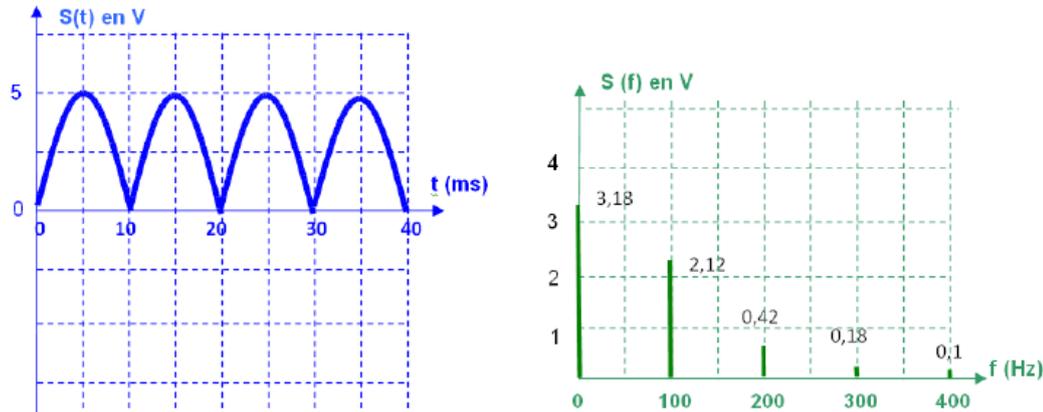
Exemple 2 : $u_2(t) = U_2 = 10\text{V}$



Exemple 3 : $u_3(t) = u_1(t) + u_2(t) = 10 + 5 \cdot \sin(2\pi \cdot 500 \cdot t)$



Exemple 4 : Signal sinusoïdal redressé « double alternance » $f_0 = 50$ Hz



Exemple 5 : Signal carré

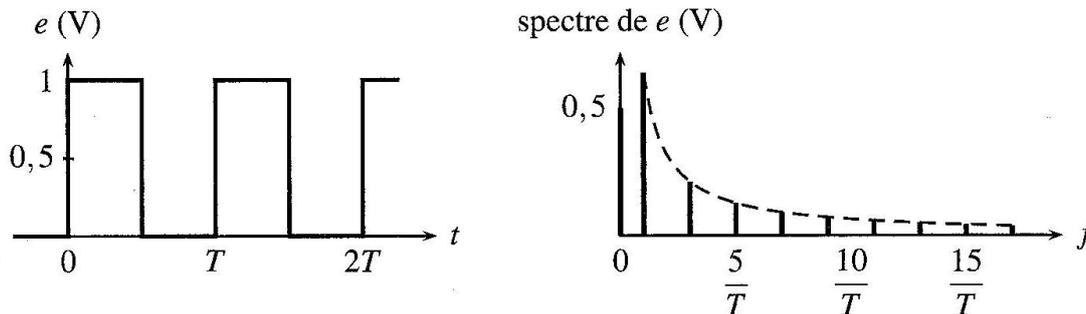


Figure 12.14 – Forme d'onde et spectre du signal $e(t)$.

Remarque : Conservation de la puissance

Pour une tension périodique $u(t)$ mesurée aux bornes d'une résistance R , on a la décomposition en série de Fourier : $u(t) = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} U_{n,eff} \sqrt{2} \cos(\omega_n t + \varphi_n)$ où $U_n = U_{n,eff} \sqrt{2}$

On admet que : $U_{eff}^2 = U_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} U_{n,eff}^2$ Formule de Parseval

donc $\frac{U_{eff}^2}{R} = \frac{U_0^2}{R} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U_{n,eff}^2}{R}$ donc $P_R = P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n$

La puissance moyenne absorbée par la résistance R , due à la tension $u(t)$, est la somme des puissances dues à chacune des composantes de Fourier de la tension $u(t)$ (sa valeur moyenne, son fondamental et toutes ses harmoniques).

2.) Filtre passe-bas du premier ordre

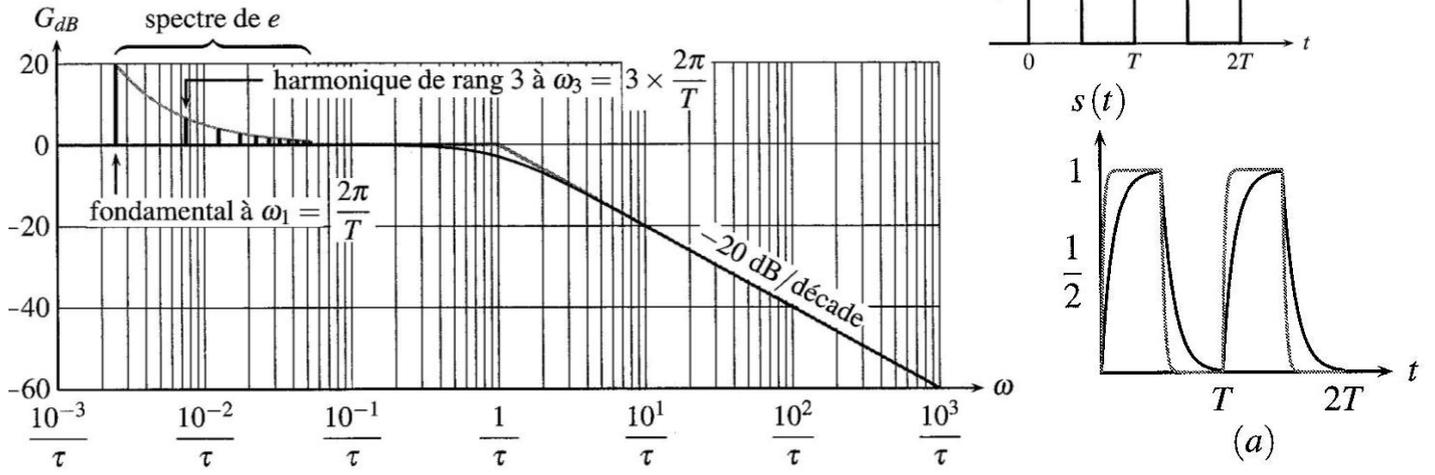


Figure 12.15 – Gain du système et spectre de l'entrée dans le cas où $\frac{2\pi}{T} \ll \frac{1}{\tau}$.

Filtrage passe-bas d'un signal créneaux (a) $T = 50 \tau$ en gris et $T = 10 \tau$ en noir

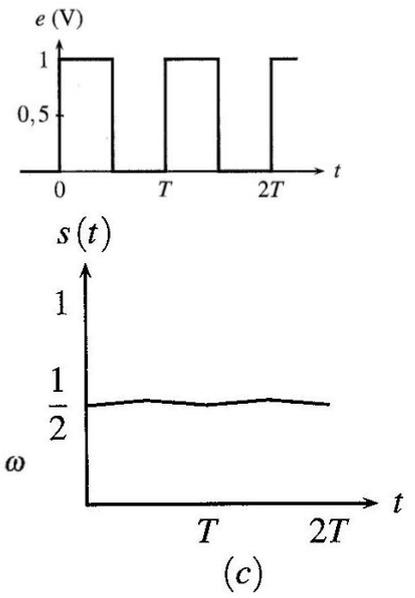
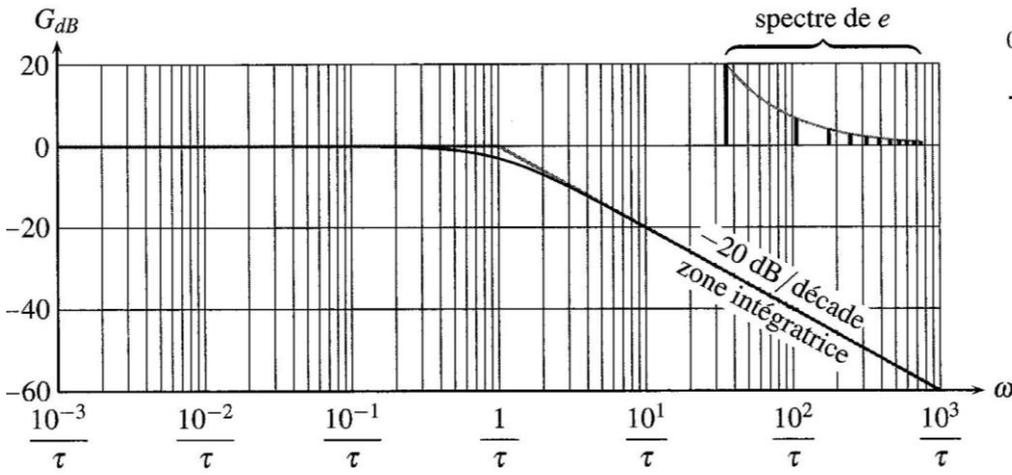
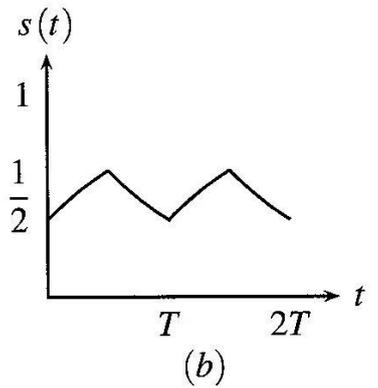
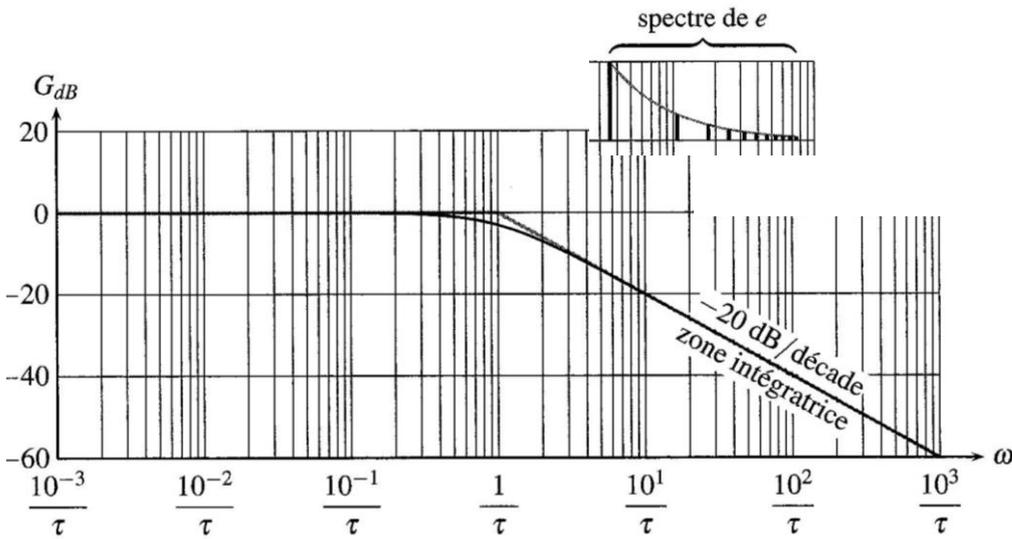


Figure 12.16 – Gain du système et spectre de l'entrée dans le cas où $\frac{2\pi}{T} \gg \frac{1}{\tau}$.

Filtrage passe-bas d'un signal créneaux (c) $T = 0,1 \tau$.



Filtrage passe-bas d'un signal créneaux (b) $T = \tau$.

3.) Filtre passe-haut du premier ordre

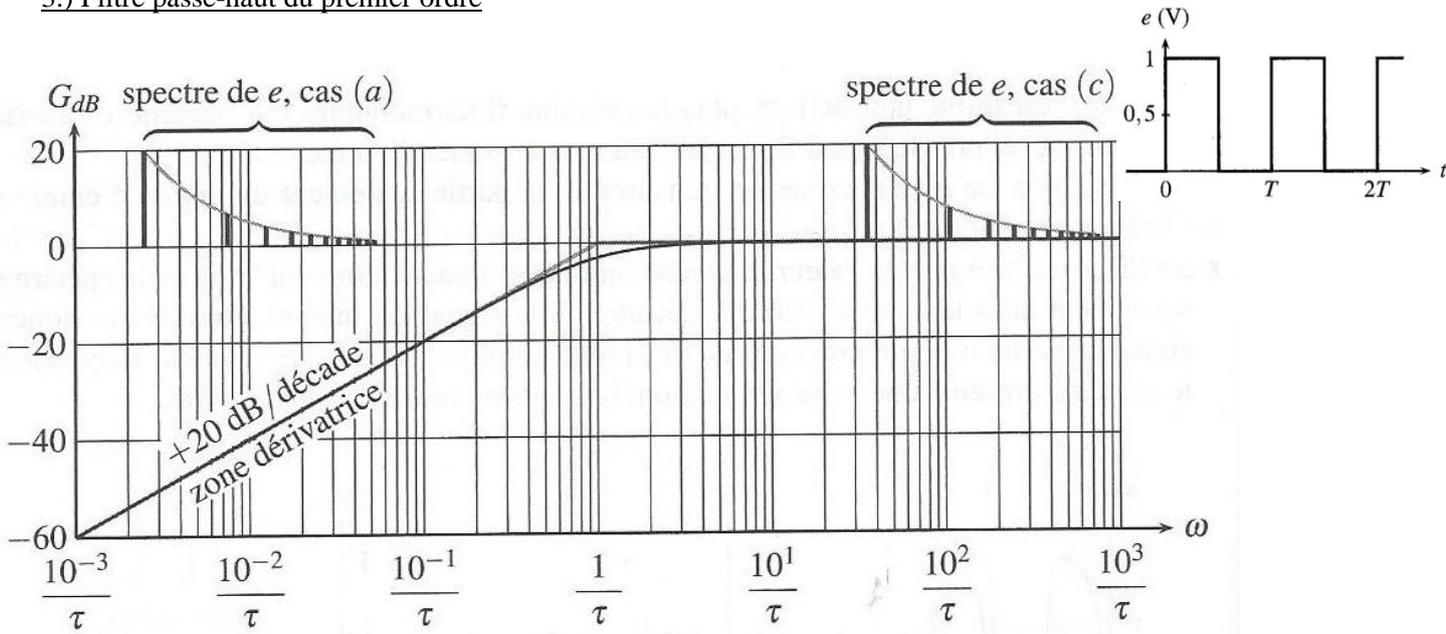


Figure 12.18 – Gain du système et spectre de l'entrée pour un filtrage passe-haut.

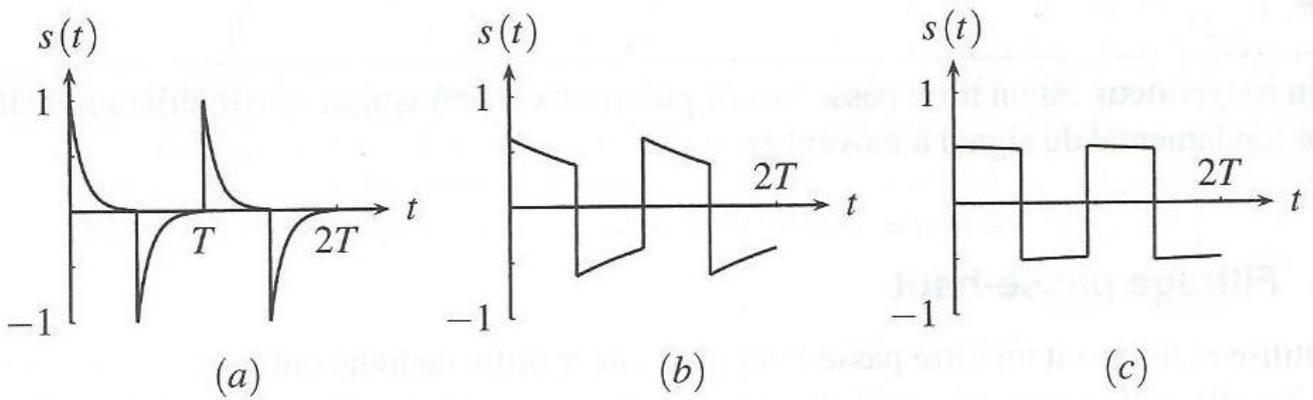


Figure 12.19 – Filtrage passe-haut d'un signal créneau (a) $T = 10\tau$, (b) $T = \tau$, (c) $T = 0,1\tau$.

4.) Filtre passe-bande

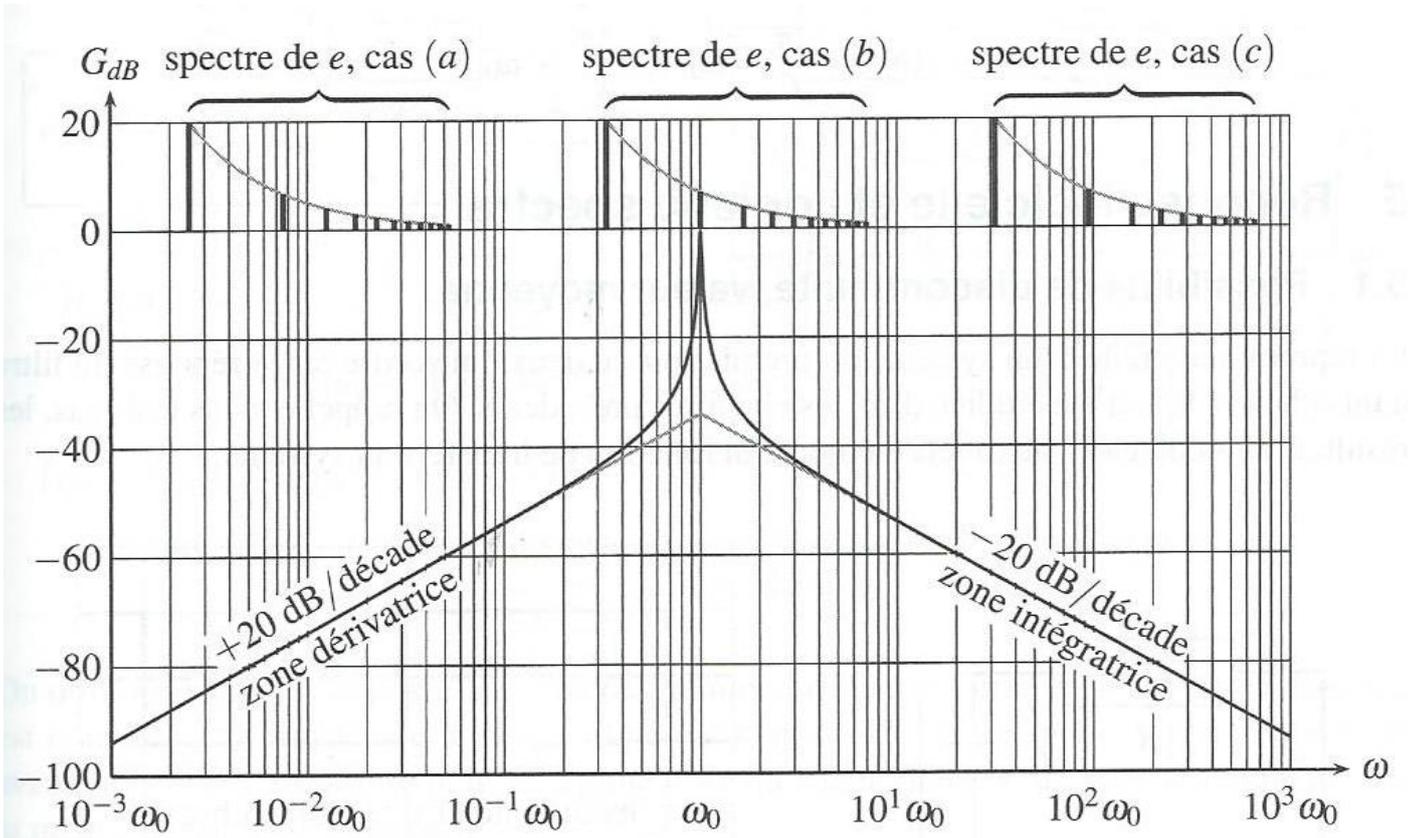


Figure 12.20 – Gain du système et spectre de l'entrée pour un filtrage passe-bande.

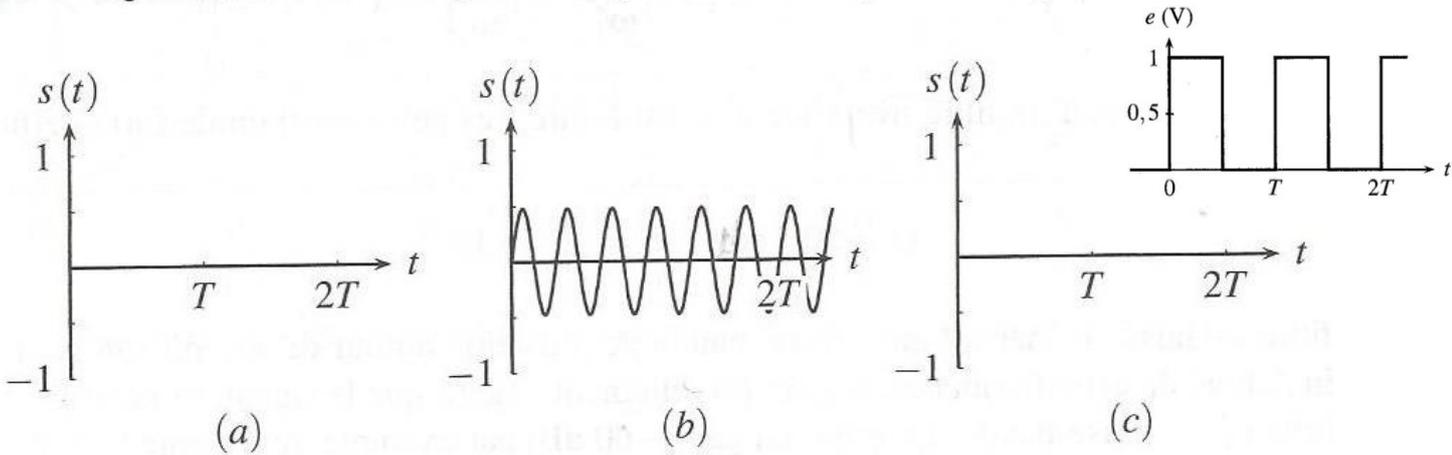


Figure 12.21 – Filtrage passe-bande d'un signal créneau : (a) $\frac{2\pi}{T} \ll \omega_0$,

$$(b) 3 \times \frac{2\pi}{T} = \omega_0, (c) \frac{2\pi}{T} \gg \omega_0.$$

II Utilisation des filtres

1.) Choix d'un modèle de filtre en fonction d'un cahier des charges.

On est donc amené à définir un gabarit du filtre à construire. Un filtre **passé-bas** a pour fonction de laisser passer toutes les fréquences inférieures à f_p (indice p pour passante) et d'éliminer toutes les fréquences supérieures à f_a (indice a pour atténuée). On définit alors :

- la dernière **fréquence passante** f_p (le filtre doit laisser passer les fréquences $f < f_p$),
- le **gain minimum** G_{sup} , en dB, pour les fréquences qui passent à travers le filtre (il ne doit pas être trop faible, car ces fréquences doivent sortir du filtre sans être atténuées),
- la première **fréquence atténuée** f_a (toutes les fréquences $f > f_a$ doivent être éliminées par le filtre),
- le **gain maximum** G_{inf} pour les fréquences atténuées. Le gain du filtre à ces fréquences doit être inférieur à G_{inf} pour être sûr qu'elles soient éliminées.

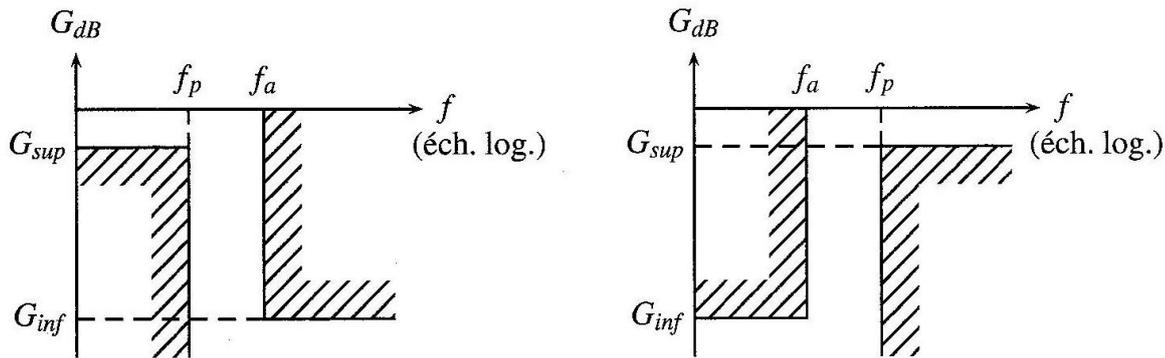


Figure 11.25 – Gabarit (a) d'un passe-bas (b) d'un passe-haut.

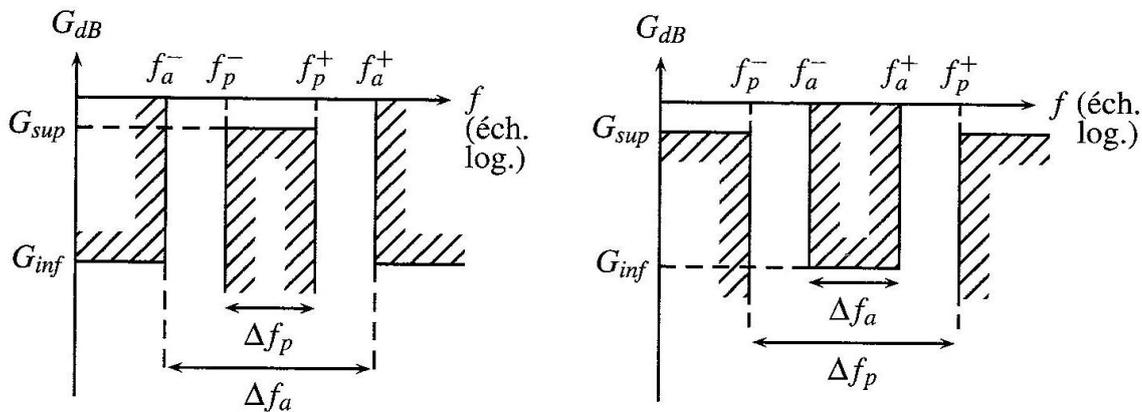


Figure 11.26 – Gabarit (c) d'un passe-bande (d) d'un coupe-bande.

2.) Catalogue de filtres.

Passé bas	Permet de recueillir l'information sur la forme générale du signal. Moyen.	
Premier ordre : - RC série sortie sur C - RL série sortie sur R (TD)	$\underline{H} = \frac{1}{1 + jx}$	Intégrateur à haute fréquence
Second ordre : - RLC série sortie sur C	$\underline{H} = \frac{1}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$	Double intégrateur à haute fréquence
Passé haut	Permet de recueillir l'information relative aux détails du signal. Élimine la valeur moyenne.	
Premier ordre : - RC série sortie sur R - RL série sortie sur L (TD)	$\underline{H} = \frac{jx}{1 + jx}$	Dérivateur à basse fréquence
Second ordre : - RLC série sortie sur L (TD)	$\underline{H} = \frac{-x^2}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$	Double dérivateur à basse fréquence
Passé bande	Sélectionne une fréquence particulière. Coupe les hautes et basses fréquences.	
Second ordre : - RLC série sortie sur R	$\underline{H} = \frac{1}{1 + jQ(x - \frac{1}{x})}$	Dérivateur à basse fréquence Intégrateur à haute fréquence
Coupe bande	Élimine une fréquence particulière.	
Second ordre : - RLC série sortie sur (L,C) (TD)	$\underline{H} = \frac{1 - x^2}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$	

3.) Mise en cascades de deux filtres.

a) Impédances d'entrée et de sortie.

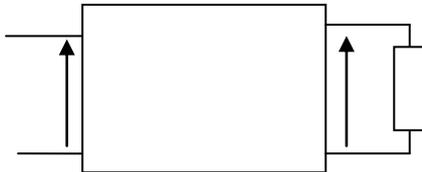


Impédance d'entrée : $Z_e = \frac{u_e}{i_e}$ En présence de Z_u : impédance d'entrée en charge.

En l'absence de Z_u : impédance d'entrée à vide.

On a un dipôle linéaire passif vu de l'entrée (entre A et B) : il est modélisable depuis l'entrée par une impédance équivalente puisqu'il ne contient pas de générateur.

Pour la calculer, on débranche le générateur et on fait des schémas équivalents.



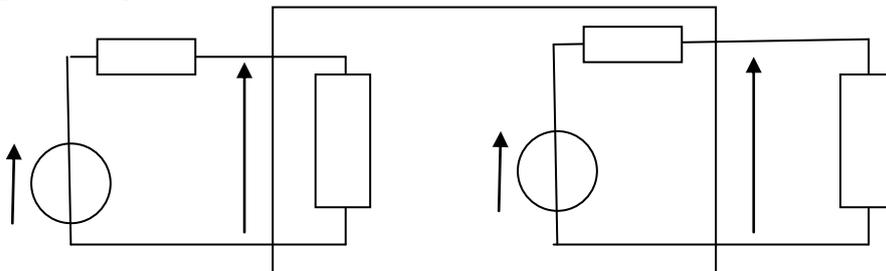
Impédance de sortie

On a un dipôle linéaire actif vu de la sortie (entre C et D) : il est modélisable depuis la sortie par un générateur équivalent de Thévenin.

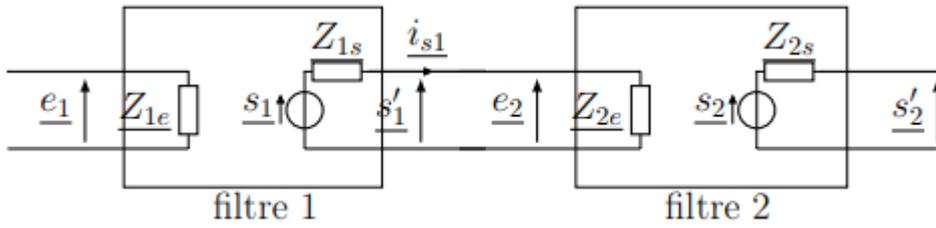
Pour la calculer, on débranche la charge et on fait des schémas équivalents. $Z_s = -\frac{u_s}{i_s}$



Schéma équivalent global :



b) Mise en cascade.



On veut : $\underline{H} = \frac{s_2}{e_1} = \frac{s_2}{e_2} \times \frac{s_1}{e_1} = \underline{H}_2 \times \underline{H}_1$

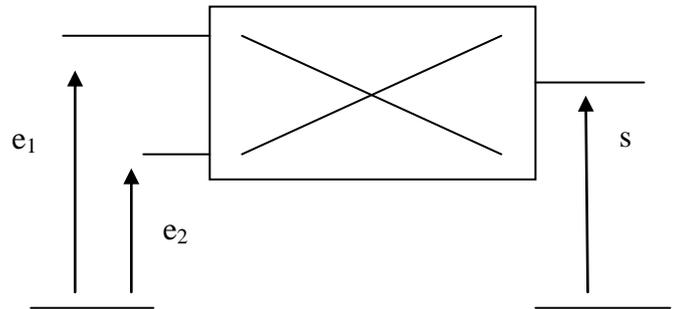
Pour trouver ce résultat, il faut : $i_{s1} = 0$, soit $Z_{2e} \gg 1$ et $e_2 = s_1$ soit $Z_{2e} \gg Z_{1s}$
 C'est ce qu'on appelle l'adaptation d'impédance.

4.) Exemple de filtre non linéaire : le multiplieur

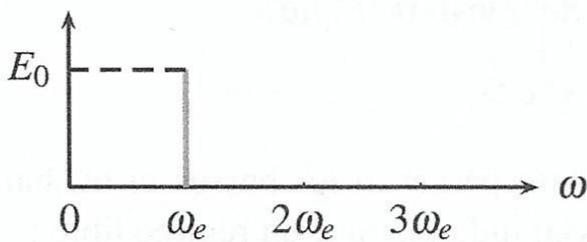
On aura en sortie : $s(t) = k \cdot e_1(t) \cdot e_2(t)$ où k est le gain du multiplieur (en V^{-1}).

Si $e_1(t) = e_2(t) = E_0 \cos(\omega_e t)$,

alors $s(t) = kE_0^2 \cos^2(\omega_e t) = kE_0^2 \frac{1 + \cos(2\omega_e t)}{2}$



spectre de e



spectre de s

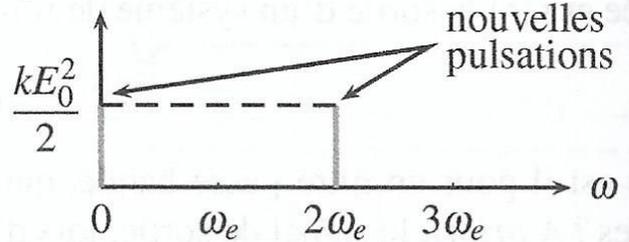


Figure 10.18 – Spectres des signaux d'entrée et de sortie du multiplieur.

III Capacité numérique : Simuler l'action d'un filtre sur un signal périodique.

```

1  ##SE6 Capacité numérique
2  ##effet d'un filtre sur un signal périodique
3
4  ##exemple du signal créneau et des filtres passe bas et passe haut du premier ordre (variable fo)
5
6  ##importation des bibliothèques
7
8  import numpy as np
9  import scipy.integrate as spi
10 import matplotlib.pyplot as plt
11
12 ##definition des filtres du premier ordre:
13 ##Filtre passe bas
14 def passebas(f,fo):#définition du module de H#
15     x=f/fo
16     h=1/(1+x**2)**(0.5)
17     return(h)
18
19 def phasebas(f,fo):#définition du l'argument de H#
20     x=f/fo
21     phib=-np.arctan(x)
22     return(phib)
23
24 ##Filtre passe haut
25 def passehaut(f,fo):
26     x=f/fo
27     h=x/(1+x**2)**(0.5)
28     return(h)
29
30 def phasehaut(f,fo):
31     x=f/fo
32     phih=-np.arctan(x)+np.pi/2
33     return(phih)
34
35 ##spectre du signal d'entrée créneau:
36
37 F=[0] #frequence nulle
38 f=1000 #fondamental
39 N=200 #nombres d'harmoniques
40 for k in range(1,N):#Les fréquences des harmoniques#
41     y=f*k
42     F.append(y)
43
44
45 Ae=[0.5] #composante continue
46 A=1 #amplitude du fondamental
47 for k in range(1,N):#cas d'un signal creneau
48     if k%2==0:
49         y=0
50     else:
51         y=A/k
52     Ae.append(y)
53
54 ##fonction produit de listes:
55
56 def prod(A,B):
57     C=[]
58     for k in range(len(A)):
59         x=A[k]*B[k]
60         C.append(x)
61     return(C)
62
63 ##calcul du spectre en sortie
64
65 fo=2000 #fréquence de coupure du filtre#
66
67 Hpb=[passebas(freq,fo) for freq in F]#création de la liste des amplitudes#
68 Aspb=prod(Hpb,Ae)
69 phipb=[phasebas(freq,fo) for freq in F]#création de la liste des arguments#
70
71 Hph=[passehaut(freq,fo) for freq in F]
72 Asph=prod(Hph,Ae)
73 phiph=[phasehaut(freq,fo) for freq in F]

```

```

76 ##tracé des courbes
77
78 ##effet du passe bas
79
80 plt.bar(F,Ae,200,color='r',label="Signal d'entrée")
81 plt.bar(F,Aspb,100,color='b',label='Signal de sortie du passe-bas')
82
83 plt.xlabel('frequences')
84 plt.ylabel('An')
85 plt.axis([-2000,20000,0,1])
86 plt.title('spectres de fréquence')
87 plt.legend()
88
89
90 ##effet du passe haut
91 plt.figure()
92 plt.bar(F,Ae,200,color='r',label="Signal d'entrée")
93 plt.bar(F,Asph,100,color='b',label='Signal de sortie du passe-haut')
94
95 plt.xlabel('frequences')
96 plt.ylabel('An')
97 plt.axis([-2000,20000,0,1])
98 plt.title('spectres de fréquence')
99 plt.legend()
100
101
102
103 ##Courbes temporelles
104 les_t=np.linspace(0,3/f,2000)#intervalle de temps
105
106 les_e=[]#Création de la liste des amplitudes pour la tension d'entrée#
107 les_sb=[]#Création de la liste des amplitudes pour la tension de sortie#
108 les_sh=[]
109
110 for t in les_t:
111     e=Ae[0]
112     sb=Aspb[0]
113     sh=Asph[0]
114     for k in range (1,N):
115         e=e+Ae[k]*np.sin((2*np.pi*f*k)*t)
116         sb=sb+Aspb[k]*np.sin((2*np.pi*f*k)*t+phipb[k])
117         sh=sh+Asph[k]*np.sin((2*np.pi*f*k)*t+phiph[k])
118     les_e.append(e)
119     les_sb.append(sb)
120     les_sh.append(sh)
121
122 plt.figure()
123 plt.plot(les_t,les_e)
124 plt.title('signal d entrée: e(t)')
125 plt.xlabel('t(s)')
126 plt.ylabel('e(V)')
127 plt.figure()
128 plt.plot(les_t,les_sb)
129 plt.title('s(t) pour le filtre passe bas')
130 plt.xlabel('t(s)')
131 plt.ylabel('e(V)')
132 plt.figure()
133 plt.plot(les_t,les_sh)
134 plt.title('s(t) pour le filtre passe haut')
135 plt.xlabel('t(s)')
136 plt.ylabel('e(V)')
137
138 plt.show()

```