PROGRAMMES 11 et 12.

PROGRAMME 11 : du 16/12 au 20/12

Reprise des réels et notions d'arithmétique

Suites

★ Modes de définition d'une suite. De façon explicite ou par récurrence.

★ Monotonie. Suite minorée, majorée, bornée. Une suite (u_n) est bornée si et seulement si $(|u_n|)$ est majorée.

★ Suites stationnaires. Suites arithmétiques, suites géométriques. Les étudiants doivent connaître une méthode de calcul du terme général d'une suite définie par $u_{n+1} = au_n + b$.

★ Suites récurrentes linéaires d'ordre deux (la démonstration sera faite dans le cours d'algèbre linéaire).

★ Limite d'une suite réelle : Limite finie ou infinie d'une suite. Unicité de la limite. Suite convergente, suite divergente. Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges. Toute suite réelle convergente est bornée. Suites convergeant vers 0. Opérations sur les limites : combinaisons linéaires, produit, quotient. Limite de $(f(u_n))$ lorsque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$. Limites classiques (qui viennent des croissances comparées, des taux d'accroissement en 0 des fonctions usuelles). Limite de (q^n).
Stabilité des inégalités larges par passage à la limite.

★ Théorème de convergence par encadrement. Théorèmes de divergence vers l'infini (par comparaison). Théorème de la limite monotone.

★ Suites extraites d'une suite. Si une suite possède une limite (finie ou infinie), alors toutes ses suites extraites possèdent la même limite. Utilisation des suites extraites pour montrer la divergence d'une suite. Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers ℓ (éventuellement $\pm\infty$) alors (u_n) tend vers ℓ.

★ Brève extension aux suites complexes : Convergence d'une suite complexe. Traduction à l'aide des parties réelle et imaginaire. Suites complexes bornées ; toute suite complexe convergente est bornée. Opérations sur les suites convergentes : combinaisons linéaires, produit, quotient.

★ Compléments : Méthode d'étude des suites récurrentes.
Remarque : un exercice sur les suites récurrentes devra être détaillé en plusieurs questions.

Une question de savoir-faire

En plus de la preuve et de l'énoncé, un exercice rapide sur une suite arithmético-géométrique ou une suite récurrente linéaire d'ordre 2 sera demandé.

Un énoncé au choix à demander

- ❒ Définition d'une borne supérieure (lorsqu'elle existe).
- ❒ Définition de la partie entière.
- ❒ Définition des approximations décimales.
- ❒ Définition d'un nombre premier.
- ❒ Théorème de décomposition d'un entier.
- ❒ Définition du pgcd ou du ppcm de deux entiers naturels a et b.
- ❒ Algorithme d'Euclide pour le calcul du pgcd (à expliquer).
- ❒ Définition mathématique d'une limite finie ou infinie.
- ❒ Limites classiques (limites de taux d'accroissement) appliquées aux suites convergeant vers 0.
- ❒ Passage à la limite.
- ❒ Théorème d'encadrement, théorème d'existence de limites pour les limites infinies.
- ❒ Théorème de la limite monotone.
- ❒ Définition des suites adjacentes et théorème sur les suites adjacentes.
- ❒ Définition d'une suite extraite.
- ❒ Conséquence sur une suite extraite de l'existence d'une limite pour la suite (u_n) et cas particulier des suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}).

Démonstrations

- ❒ Unicité de la limite finie (si existence).
- ❒ Si (u_n) converge vers un réel ℓ et (v_n) converge vers un réel ℓ' alors $(u_n + v_n)$ converge vers $\ell + \ell'$.
- ❒ Théorème de la limite monotone (cas suite croissante majorée).
- ❒ Théorème sur les suites adjacentes.

PROGRAMME 12 : du 06/01 au 10/01

Reprise des suites

Introduction aux DL

- ★ Notion de négligeabilité pour les suites :
  - ❐ $u_n = o(v_n)$ si, à partir d'un certain rang, $u_n = \varepsilon_n v_n$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$.

    Si la suite (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang, alors $u_n = o(v_n)$ ssi $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$.

    Propriétés de o (somme, produit, transitivité).
  - ❐ Traduction, à l'aide du symbole o, des croissances comparées des suites usuelles : $\ln^\beta(n)$, n^α et $\mathrm{e}^{\gamma n}$. $n! = o(n^n)$.
  - ❐ Si $u_n = v_n + o(v_n)$ et si (v_n) admet une limite ℓ alors (u_n) admet la même limite.
    Si $u_n = v_n + o(v_n)$ et si (v_n) ne s'annule pas (resp est strictement positive) alors, à partir d'un certain rang, $u_n \neq 0$ (resp $u_n > 0$).
- ★ Cas des fonctions. Adaptation aux fonctions des définitions et résultats du paragraphe précédent (en un point ou à l'infini).
- ★ Développements limités : définition du DL en 0, troncature, DL usuels en 0 à un « petit » ordre, opérations : somme, produit, composition.
- ★ DL en un réel x_0.
- ★ Exemple d'utilisation : recherche d'asymptotes obliques avec les positions relatives locales.

Un énoncé au choix à demander

- ❐ Définition mathématique d'une limite finie ou infinie.
- ❐ Limites classiques (limites de taux d'accroissement) appliquées aux suites convergeant vers 0.
- ❐ Passage à la limite.
- ❐ Théorème d'encadrement, théorème d'existence de limites pour les limites infinies.
- ❐ Théorème de la limite monotone.
- ❐ Limites classiques (limites de taux d'accroissement) appliquées aux suites convergeant vers 0.
- ❐ Définition des suites adjacentes et théorème sur les suites adjacentes.
- ❐ Définition d'une suite extraite.
- ❐ Conséquence sur une suite extraite de l'existence d'une limite pour la suite (u_n) et cas particulier des suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}).
- ❐ Définition d'un $DL_n(0)$.
- ❐ Troncature d'un $DL_n(0)$.
- ❐ Interprétation d'un développement asymptotique de la forme $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} ax + b + \dfrac{c}{x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $c \neq 0$.

Démonstrations

Avant la preuve, on demandera à chaque étudiant trois DL usuels en 0 *à un* <u>*petit*</u> *ordre.*

- ❒ Si (u_n) converge vers un réel ℓ et (v_n) converge vers un réel ℓ' alors $(u_n + v_n)$ converge vers $\ell + \ell'$.
- ❒ Théorème de la limite monotone (cas suite croissante majorée).
- ❒ Théorème sur les suites adjacentes.
- ❒ Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont deux suites qui convergent vers le même réel ℓ alors (u_n) converge vers ℓ.