
PROGRAMMES 13 et 14.

PROGRAMME 13 : du 13/01 au 17/01

REPRISE DES DL

ENSEMBLES ET APPLICATIONS

- ★ Appartenance, inclusion. Sous-ensembles (ou parties) d'un ensemble, ensemble vide.
- ★ Opérations sur les parties d'un ensemble : réunion, intersection, complémentaire. Notations $\overline{A}$, A^c , $E \setminus A$. Lien entre connecteurs logiques et opérations ensemblistes.
- ★ Recouvrement disjoint d'un ensemble E (famille $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ de parties de E , 2 à 2 disjointes, de réunion E . Partition (recouvrement + chaque F_i est non vide).
- ★ Produit cartésien de deux ensembles, d'un nombre fini d'ensembles.
- ★ Ensemble des parties d'un ensemble.
- ★ Application d'un ensemble E dans un ensemble F ; graphe d'une application. Notations $\mathcal{F}(E, F)$ pour l'ensemble des applications de E dans F .
- ★ Restriction. Notation $f|_A$.
- ★ Composition. Injection, surjection. Composée de deux injections, de deux surjections.
- ★ Bijection, réciproque. Composée de deux bijections, réciproque de la composée.

Remarque aux colleurs : Les exercices sur les ensembles doivent rester basiques.

UN ÉNONCÉ AU CHOIX À DEMANDER

- | | |
|--|---|
| ☐ Définition d'un $DL_n(0)$. | ☐ Opérations sur les parties d'un ensemble E , propriétés. |
| ☐ Troncature d'un DL . | ☐ Définition d'une restriction, d'un prolongement. |
| ☐ Interprétation d'un développement asymptotique de la forme $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} ax + b + \frac{c}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$, $c \neq 0$. | ☐ Définition d'une injection, surjection, bijection. |
| ☐ Définition d'une inclusion d'ensembles. | ☐ Définition de f^{-1} lorsque f est bijective. |
| ☐ Définition de $\mathcal{P}(E)$. | ☐ Composée d'applications bijectives et formule donnant la réciproque. |
| ☐ Recouvrement disjoint, partition. | |

DÉMONSTRATIONS

Avant la preuve, on demandera à chaque étudiant trois DL usuels en 0 à un petit ordre.

□ *Exercice fait en cours* : On note $f(x) = \frac{x^2}{x-1}e^{\frac{1}{x}}$.

Montrer que la courbe de f admet en $+\infty$ une asymptote et étudier les positions relatives.

□ Composée de deux applications injectives ou composée de deux applications surjectives.

□ Soit $f : E \rightarrow F, g : F \rightarrow E$.

Si $f \circ g = \text{id}_F$ et $g \circ f = \text{id}_E$ alors f et g sont bijectives et réciproques l'une de l'autre.

PROGRAMME 14 : du 20/01 au 24/01

REPRISE DES ENSEMBLES/APPLICATIONS ET FIN

- ★ Image directe. Notation $f(A)$.
- ★ Image réciproque. Notation $f^{-1}(B)$. Mais en cours on utilise temporairement la notation $f^{\leftarrow}(B)$ et on parle du « tiré en arrière » de B par f .

LIMITES ET CONTINUITÉ : LE TOUT DÉBUT

- ★ Étant donné un point a appartenant à I ou extrémité de I , limite finie ou infinie d'une fonction en a . Limite finie ou infinie d'une fonction en $\pm\infty$. Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges.
- ★ Unicité de la limite. Si f admet une limite finie en a alors f est bornée au voisinage de a .
- ★ Limite à droite, limite à gauche. Extension de la notion de limite en a lorsque la fonction est définie sur $I \setminus \{a\}$.
- ★ Opérations sur les fonctions admettant une limite finie ou infinie en a . Image d'une suite de limite a par une fonction admettant une limite en a . Stabilité des inégalités larges par passage à la limite. Théorèmes d'encadrement (limite finie), théorème correspondant pour limites infinies (avec une inégalité). Théorème de la limite monotone.

UN ÉNONCÉ AU CHOIX À DEMANDER

- | | |
|---|---|
| ☐ Définition d'une inclusion d'ensembles. | ☐ Composée d'applications bijectives et formule donnant la réciproque. |
| ☐ Définition de $\mathcal{P}(E)$. | ☐ Définition d'une image directe, d'un tiré en arrière. |
| ☐ Recouvrement disjoint, partition. | ☐ Définition mathématique d'une limite. |
| ☐ Opérations sur les parties d'un ensemble E , propriétés. | ☐ Limite à gauche, à droite en un point. |
| ☐ Définition d'une restriction, d'un prolongement. | ☐ Passage à la limite. |
| ☐ Définition d'une injection, surjection, bijection. | ☐ Théorème d'encadrement. |
| ☐ Définition de f^{-1} lorsque f est bijective. | ☐ Limite d'une fonction croissante sur $[a, b[$ (étude en b). |

DÉMONSTRATIONS

- ☐ Soit $f : E \rightarrow F, g : F \rightarrow E$.
Si $f \circ g = \text{id}_F$ et $g \circ f = \text{id}_E$ alors f et g sont bijectives et réciproques l'une de l'autre.
- ☐ *Exercice classique* : Soit $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$.
Si $g \circ f$ est injective alors f est injective.
Si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.
- ☐ Unicité de la limite pour une fonction (dans le cas limite finie en a réel).