Mécanique MC1 Cinématique

Historique

Antiquité : Archimède : Hydrostatique, notion de centre de gravité (250 avant JC).
XVI^{e} : Copernic : description cinématique du système solaire.
Kepler : mouvement des planètes.
Galilée : principe d'inertie, principe de relativité galiléenne.
XVII^{e} : Huygens : Mouvements de rotation.
Newton : Les trois lois de la dynamique classique.

I Introduction à la mécanique

1.) Définitions

Mécanique : Etude du mouvement des systèmes matériels.

Cinématique : Description du mouvement des corps, indépendamment des causes qui le provoquent.

Dynamique : Etude des relations entre les causes du mouvement et leurs effets.

2.) Hypothèses de la mécanique newtonienne

1. Possibilité au moins théorique de connaître avec une précision illimitée la position et la vitesse d'un corps à un instant donné.
2. Le temps se déroule de la même façon quel que soit le mouvement du corps considéré (hypothèse d'un temps absolu).

1. La mécanique quantique rejette la première hypothèse (1923-26 Principe de Heisenberg et Dualité onde-particule De Broglie, Heisenberg, Schrödinger et Born).

Il est impossible de connaître avec une précision illimitée la position et la vitesse d'un corps à un instant donné (= principe d'incertitude de Heisenberg).
A toute particule en mouvement on associe une onde (= dualité onde corpuscule)..

Pour un système de particules espacées de d, la mécanique classique est une bonne approximation si $\lambda << d$.

2. La théorie de la relativité (restreinte) Einstein 1905 rejette la deuxième hypothèse.

Le déroulement du temps dépend du mouvement du système considéré.
La mécanique classique reste une bonne approximation si v << c où v est la vitesse du corps considéré, et c la vitesse de la lumière dans le vide ($c = 3.10^8$ $m.s^{-1}$).

3.) Repérage dans l'espace et le temps

Solide : Corps supposé indéformable. Les distances entre deux points quelconques de (S) ne varient pas au cours du temps.

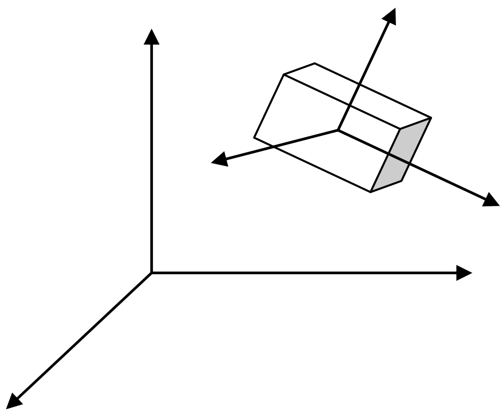
Pour repérer la position d'un solide dans l'espace, il faut choisir un solide de référence (S_{ref}), c'est-à-dire un objet physique par rapport auquel on étudie le mouvement.

Repère d'espace $\Re(O,\vec{e_x},\vec{e_y},\vec{e_z})$
O point arbitraire du repère lié à (S_{ref}).
Base cartésienne définie par trois points fixes appartenant à (S_{ref}).

Pour repérer un solide dans l'espace, il faut six paramètres :
- trois coordonnées d'un point O_1 arbitraire du solide (S): On prend parfois le centre de gravité G du solide.
- trois angles qui définissent l'orientation des axes du repère $\Re_1$ lié au solide (S), par rapport au repère lié au solide de référence (S_{ref}).

Repère temporel : {date origine + horloge de référence}
Horloge de référence : permet de mesurer la durée entre deux événements. On mesure le nombre de fois que se produit un phénomène cyclique.

Référentiel : {repère d'espace lié à un solide de référence + repère temporel}
= Observateur muni d'une horloge

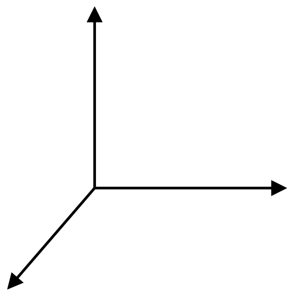


Trajectoire : Ensemble des points de l'espace occupés par O_1 au cours du temps, ou par G, le centre de gravité du solide considéré.

Point matériel M(m) : Point géométrique M, auquel on associe une masse m. Corps assez petit pour que sa position puisse être définie à l'aide de trois coordonnées seulement. = Objet ponctuel.

Dans un référentiel, un événement (M,t) est défini par les paramètres (x,y,z,t) = point de l'espace-temps.
Unité de longueur : le mètre. Unité de temps : la seconde. (Voir poly "les grandeurs mesurables")

II Cinématique du point



1.) Vecteurs vitesse et accélération

Pour un point M en mouvement par rapport à un référentiel $\Re$ de centre O :
L'observateur est lié à $\Re$ et regarde M.

Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$

Vecteur vitesse instantanée : $\vec{v}(M/\mathcal{R}) = \left.\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\mathrm{dt}}\right)_{\Re} = \left.\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \left.\dfrac{d\vec{\ell}}{dt}\right)_{\mathcal{R}}$

Vecteur accélération instantanée : $\vec{a}\left(\dfrac{M}{\Re}\right) = \left.\dfrac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{v}}}{\mathrm{dt}}\right)_{\Re} = \left.\dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\mathrm{dt}^2}\right)_{\Re}$

Déplacement élémentaire : $\overrightarrow{dl} = \overrightarrow{MM'}$

On peut exprimer ensuite ces vecteurs dans différentes bases locales, ou repères de projection.

2.) Coordonnées cartésiennes

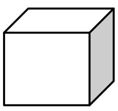
Base orthonormée directe $\left(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}\right)$:

M a pour coordonnées (x, y, z). M décrit tout l'espace pour (x, y, z) ∈] −∞;+∞[

Repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}\right)$ lié au référentiel : $\left(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}\right)$ sont indépendants de M, donc du temps.

Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$
Vecteur vitesse : $\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z$
Vecteur accélération : $\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z$

Déplacement élémentaire : $\overrightarrow{dl} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z$
Volume élémentaire : dV=dx×dy×dz.



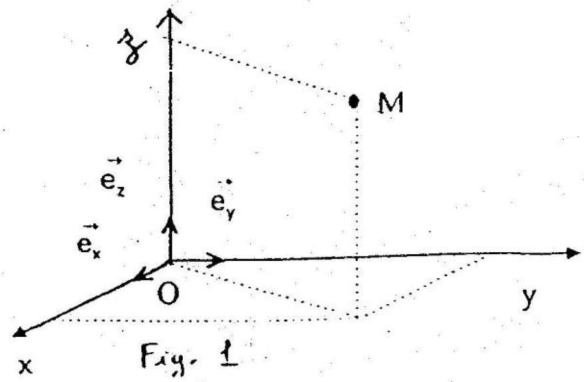


Fig. 1

3.) Coordonnées cylindriques

Base orthonormée directe instantanée $\left(\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z}\right)$.

$\vec{e}_\rho$ vecteur unitaire radial,

$\overrightarrow{e_\theta}$ vecteur unitaire orthoradial.

H projection orthogonale de M sur (Oxy).
I projection orthogonale de M sur (Oz).

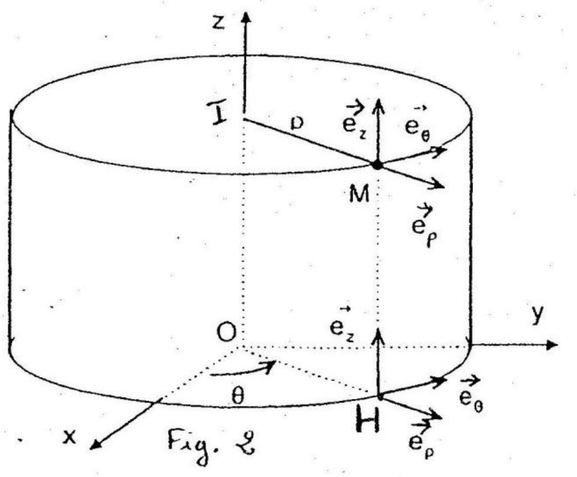


Fig. 2

rayon polaire ρ=OH $\overrightarrow{OH} = \rho\vec{e}_\rho$

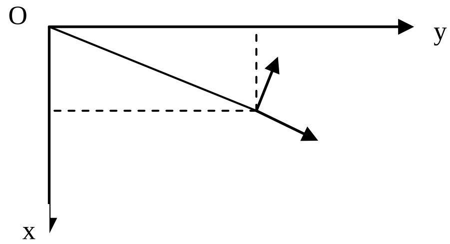
angle polaire $\theta = \left(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_\rho}\right)$

cote $z = \overline{OI} = \overline{HM}$ $\overrightarrow{HM} = z\vec{e}_z$

M (ρ, θ, z) où ρ∈ [0; +∞[; θ∈ [0; 2π[; z ∈] −∞;+∞[

Relations avec les coordonnées cartésiennes :

$x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$, $z=z$.

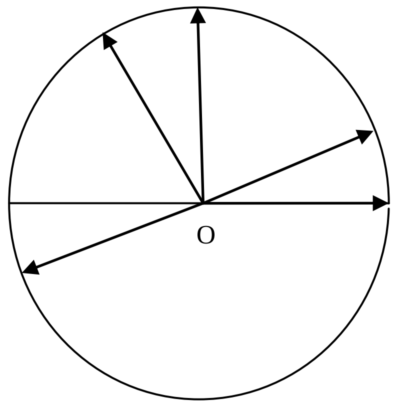


Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM} = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z$

Vecteur vitesse : $\vec{v} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z$

Vecteur accélération : $\vec{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_\rho + \left(\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}\right)\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z$

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta \qquad \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{e}_\rho$$



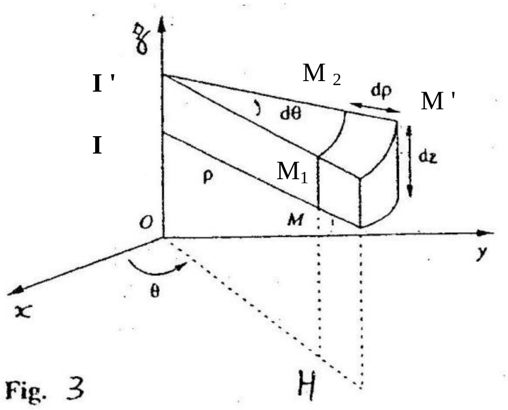
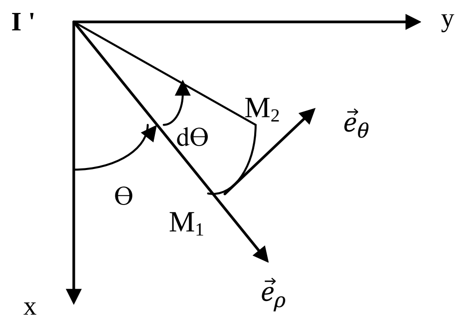


Fig. 3



<u>Déplacement élémentaire</u> $\overrightarrow{dl} = \overrightarrow{dr} = d\rho\vec{e}_\rho + \rho d\theta\vec{e}_\theta + dz\vec{e}_z$
<u>Volume élémentaire</u> dV=dρ×ρdθ×dz.

4.) Coordonnées sphériques (fig. 4)

Base orthonormée directe instantanée $\left(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\varphi}\right)$:

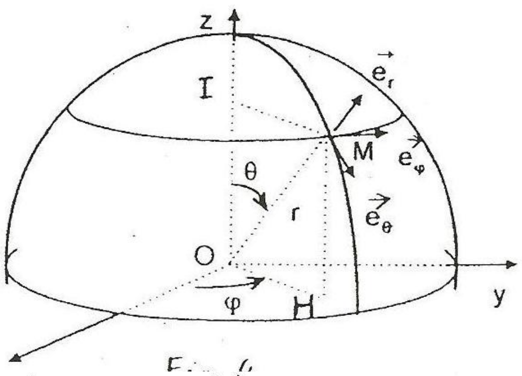
H projection orthogonale de M sur (Oxy).

r = OM.

colatitude $\theta = \left(\vec{e_z}, \overrightarrow{OM}\right)$

longitude $\varphi = \left(\vec{e_x}, \overrightarrow{OH}\right)$

M (r, θ, φ) où r ∈ [0; +∞[; θ∈ [0; π]; φ∈ [0; 2π[



Vecteur position :. $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r\vec{e}_r$

Relations avec les coordonnées cartésiennes : $\overline{OH} = \overline{IM} = r\, sin\theta$

$x = \overline{OH}\, cos\varphi = r\, sin\theta\, cos\varphi$

$y = \overline{OH}\, sin\varphi = r\, sin\theta sin\varphi$

$z = \overline{OI} = r\, cos\theta.$

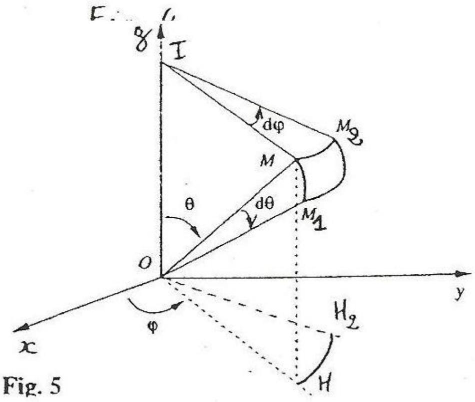
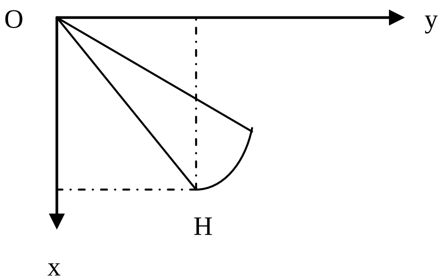
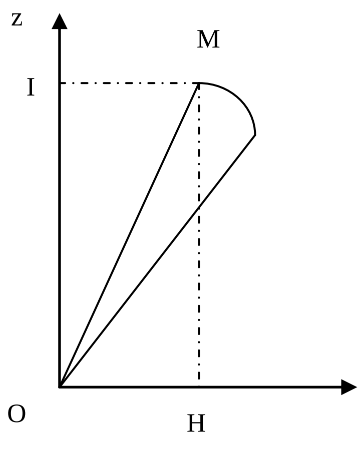


Fig. 5





Déplacement élémentaire : $\overrightarrow{dl} = \overrightarrow{dr} = dr\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta + rsin\theta d\varphi\vec{e}_\varphi$

Surface élémentaire : dS=rdθ×rsinθdφ (fig. 5).

Volume élémentaire : dV=dS×dr=dr×rdθ×rsinθdφ

III Exemples de mouvements simples

1.) Définitions

Un mouvement est uniforme si la norme du vecteur vitesse est constante.
Un mouvement est accéléré si la norme du vecteur vitesse augmente.
Un mouvement est décéléré si la norme du vecteur vitesse diminue.

Un mouvement est uniformément varié si $\frac{dv}{dt}$ est constante.

Le mouvement est uniformément accéléré si $\frac{dv}{dt} = cste > 0$.

Le mouvement est uniformément décéléré si $\frac{dv}{dt} = cste < 0$.

2.) Mouvements rectilignes

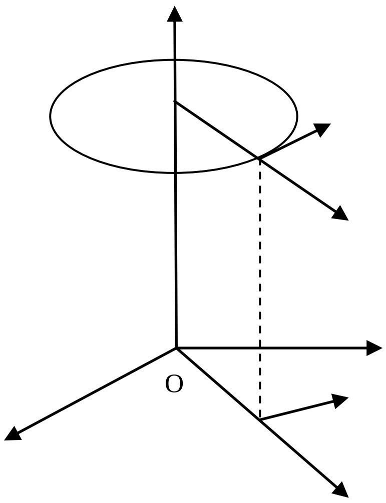
a) Définition : La trajectoire est une droite.

b) Exemple : Mouvement de vecteur accélération constante

3.) Mouvements circulaires

a) Définition La trajectoire est un cercle de rayon R, centré sur I, d'axe (Oz).

coordonnées cylindriques :

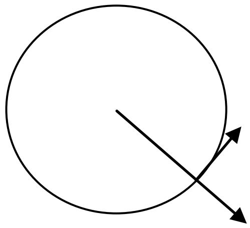


b) Exemple : Mouvement circulaire non uniforme :

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM} = R\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z$

$\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta = R\omega\vec{e}_\theta = v\vec{e}_\theta$ où $\omega = \dot{\theta}$ est la vitesse angulaire.

$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{e}_\theta - \frac{v^2}{R}\vec{e}_\rho$



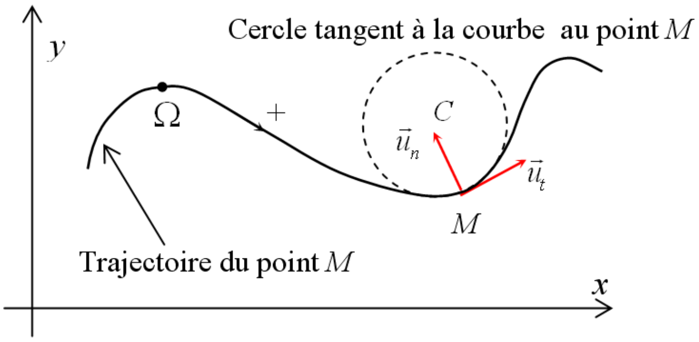
Mouvement circulaire uniforme : v = Cte donc ω = Cte

$\vec{v} = R\omega\vec{e}_\theta = v\vec{e}_\theta$

$\vec{a} = -R\omega^2\vec{e}_\rho = -\frac{v^2}{R}\vec{e}_\rho$

4.) Repérage local le long d'une trajectoire plane : repère de Frenet

M se déplace le long d'une trajectoire dans le plan (xOy)



En un point M quelconque de la trajectoire, on définit :

$\vec{u}_t$: Vecteur unitaire tangent à la trajectoire, orienté dans le sens de parcours de la trajectoire.

$\vec{u}_n$: Vecteur unitaire normal à la trajectoire, dirigé vers l'intérieur de la courbure de la trajectoire.

Repère de Frenet : repère mobile (M, $\vec{u}_t$, $\vec{u}_n$)

Vitesse : $\vec{v} = v\vec{u}_t$

On assimile le mouvement au voisinage du point M à un mouvement circulaire quelconque sur le cercle osculateur (= cercle tangent localement au point M à la trajectoire, de centre C de rayon R).

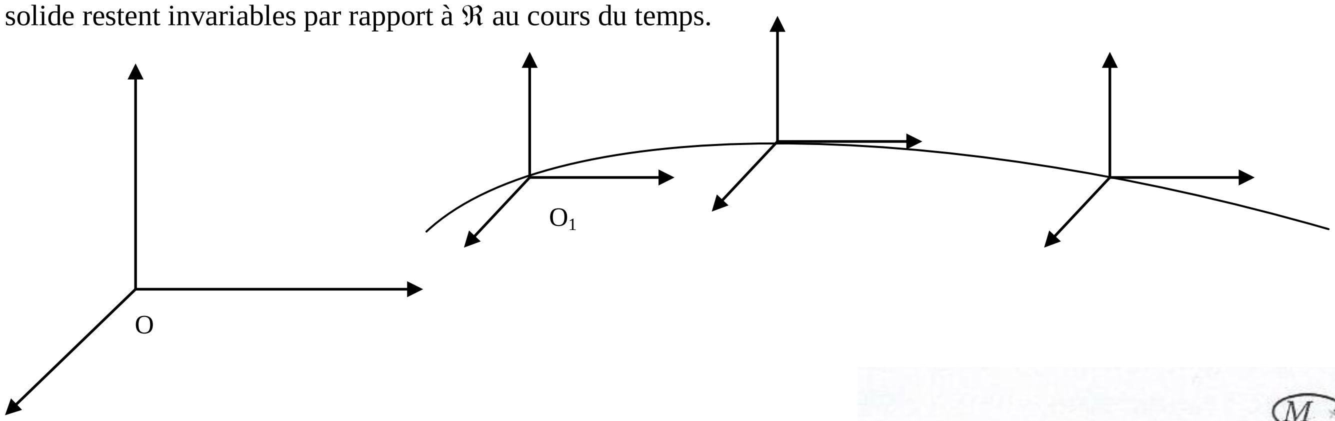
R est appelé rayon de courbure de la trajectoire au point M.

Accélération : $\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_t + \frac{v^2}{R}\vec{u}_n$

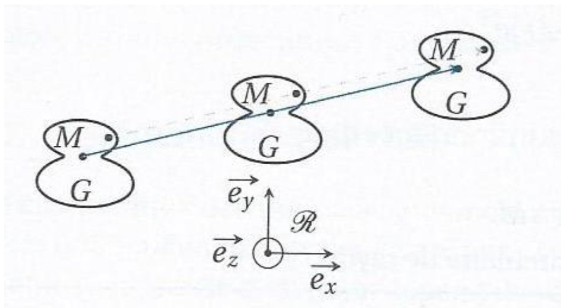
IV Cinématique du solide

1.) Translation

a) Définitions Un solide est en translation par rapport à un référentiel $\Re$ lorsque les vecteurs de base cartésiens liés au solide restent invariables par rapport à $\Re$ au cours du temps.

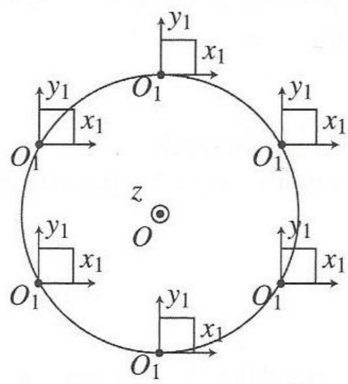


Translation rectiligne : O_1 a une trajectoire rectiligne par rapport à $\Re$.



Translation circulaire : O_1 a une trajectoire circulaire par rapport à $\Re$.

Exemple : Nacelle d'une grande roue.



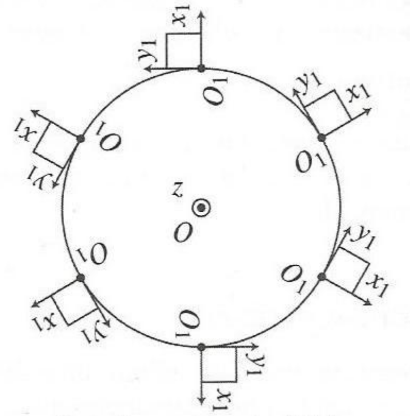
Translation circulaire.

Tous les points d'un solide en translation ont même mouvement. Le mouvement du solide est complètement décrit par le mouvement d'un de ses points, par exemple le centre de gravité G.

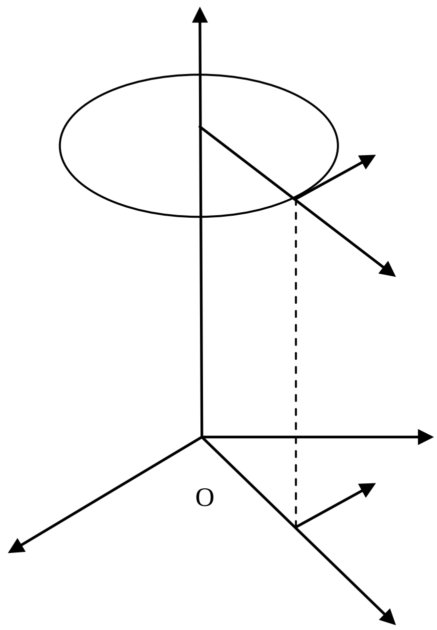
2.) Rotation autour d'un axe fixe Δ

Un solide est en rotation autour d'un axe fixe Δ si tous ses points sont en mouvement circulaire autour de Δ.

Exemple : Nacelle d'une grande roue qui s'est emballée.



Rotation autour de (Oz).



Vecteur rotation : $\vec{\Omega} = \omega \vec{e}_z$

- parallèle à l'axe de rotation, et suivant la règle du tire bouchon
- de norme la vitesse angulaire de rotation

Remarque : L'axe de rotation n'appartient pas forcément au solide.