DS 3 : Électrocinétique et Chimie - Samedi 23 novembre

PTSI La Martinière Monplaisir

Durée : 4 heures
⇒ Les calculatrices sont interdites ⇐
Veiller à la clarté de la rédaction et à l'homogénéité des équations. Présenter les résultats sous forme littérale avant de faire les applications numériques. Mettre en évidence (encadrer, souligner...) les résultats. La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation.
Le barème est donné à titre indicatif et pourra être légèrement ajusté au moment de la correction.
Les différentes parties sont indépendantes et peuvent être abordées dans l'ordre de votre choix.

I Chimie : Cinétique ($\simeq$ 20% des points)

On étudie la réaction de dissolution du carbonate de calcium à partir de deux méthodes. Pour cela on étudie la cinétique de la réaction entre $CaCO_3$ et un volume $V_0 = 100\,mL$ d'une solution d'acide chlorhydrique de concentration $C_a = 0.1\,mol/L$. L'équation de la réaction s'écrit

$$\mathrm{CaCO_3(s) + 2\,H^+(aq) = CO_2(g) + H_2O(l) + Ca^{2+}(aq)}\,.$$

On considérera que la totalité du dioxyde de carbone formé se dégage.

$\boxed{\textbf{1.}}$ Quel est le pH de la solution d'acide chlorhydrique ?

Première méthode

Dans une première expérience on mesure la pression du dioxyde de carbone apparu en utilisant un capteur de pression différentiel. Le gaz occupe un volume $V = 1.0\,L$ à la température de $25°C$. Les résultats sont regroupés dans le tableau ci-dessous :

t (en s)	10,0	20,0	30,0	40,0	50,0	60,0	70,0	80,0	90,0	100
P(CO2) (en Pa)	1250	2280	3320	4120	4880	5560	6090	6540	6940	7170

$\boxed{\textbf{2.}}$ Établir la relation donnant la quantité de matière en dioxyde de carbone $n(CO_2)$ à chaque instant t en fonction de $p(CO_2)$.

$\boxed{\textbf{3.}}$ Établir la relation entre l'avancement x et $n(CO_2)$. Effectuer l'application numérique à $t = 100\,s$ afin de compléter le tableau de valeurs suivant.

On prendra $\dfrac{1}{RT} \simeq 4 \cdot 10^{-4} J^{-1} \cdot mol$.

t (en s)	10,0	20,0	30,0	40,0	50,0	60,0	70,0	80,0	90,0	100
x (en mmol)	0,50	0,92	1,34	1,66	1,97	2,24	2,46	2,64	2,80	

Deuxième méthode

Dans une deuxième expérience, on mesure le pH de la solution afin de déterminer $[H^+(aq)]$ en fonction du temps. Les résultats sont regroupés dans le tableau ci-dessous :

t (en s)	10,0	20,0	30,0	40,0	50,0	60,0	70,0	80,0	90,0	100
$n(H^+)$ (en mmol)	9,00	8,20	7,30	6,70	6,10	5,50	5,10	4,70	4,40	4,20

$\boxed{\textbf{4.}}$ Quelle relation existe-t-il entre $n(\mathrm{H}^+)$ et $[\mathrm{H}^+(aq)]$ à tout instant ? Etablir la relation entre $n(\mathrm{H}^+)$ et l'avancement x. Effectuer l'application numérique à t = 10,0 s afin de compléter le tableau de valeurs suivant :

t (en s)	10,0	20,0	30,0	40,0	50,0	60,0	70,0	80,0	90,0	100
x (en mmol)		0,90	1,35	1,65	1,95	2,25	2,45	2,65	2,80	2,90

$\boxed{\textbf{5.}}$ Les deux méthodes sont-elles cohérentes ?

Une fois les résultats expérimentaux obtenus, on désire déterminer l'ordre de la réaction par rapport à H^+(aq). On utilisera comme expression de la vitesse :

$$v = k[\mathrm{H}^+(aq)]^{\alpha},$$

où α est l'ordre de la réaction.

$\boxed{\textbf{6.}}$ Définir la vitesse de la réaction par rapport à $[\mathrm{H}^+(\mathrm{aq})]$.

$\boxed{\textbf{7.}}$ Etablir la relation entre $[\mathrm{H}^+(\mathrm{aq})]$ et le temps en supposant que la réaction est d'ordre 0 par rapport à H^+(aq). Établir alors la relation suivante :

$$x(t) = kv_0 t.$$

$\boxed{\textbf{8.}}$ Etablir la relation entre $[\mathrm{H}^+(\mathrm{aq})]$ et le temps en supposant que la réaction est d'ordre 1 par rapport à H^+(aq). Établir alors la relation suivante :

$$\ln\left(\frac{c_a V_0 - 2x(t)}{c_a V_0}\right) = -2kt.$$

$\boxed{\textbf{9.}}$ Établir la relation entre $[\mathrm{H}^+(\mathrm{aq})]$ et le temps en supposant que la réaction est d'ordre 2 par rapport à H^+(aq). Établir alors la relation suivante :

$$\frac{1}{c_a V_0 - 2x(t)} - \frac{1}{c_a V_0} = \frac{2kt}{V_0}.$$

On obtient les graphes donnés ci-dessous.

$\boxed{\textbf{10.}}$ À l'aide des graphes, déterminer l'ordre de la réaction et la constante de vitesse dont on précisera l'unité.

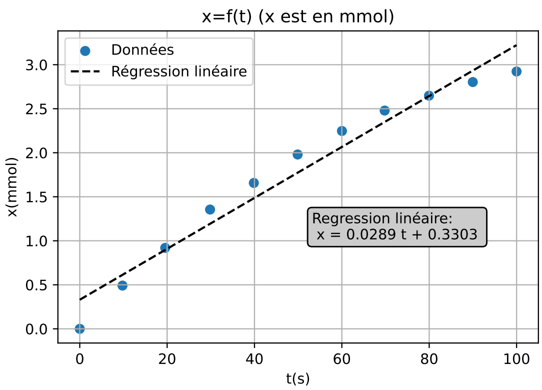


Figure I.1 – Avancement x en fonction du temps. Les pointillés correspondent à la droite obtenue par régression linéaire.

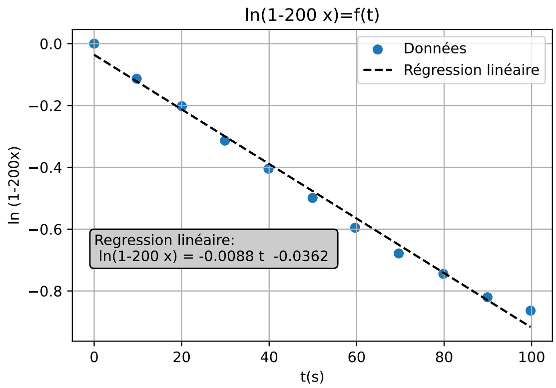


FIGURE I.2 – $\ln(1-200x)$ en fonction du temps. Les pointillés correspondent à la droite obtenue par régression linéaire.

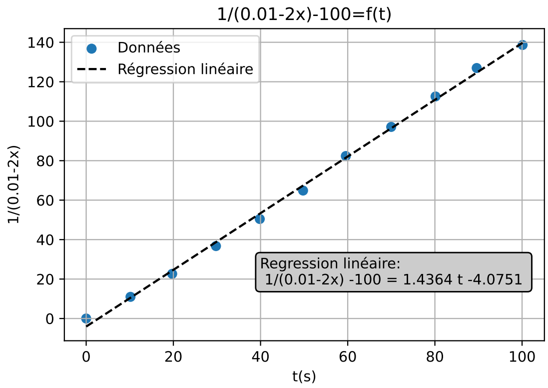


FIGURE I.3 – $1/(0.01-2x)-100$ en fonction du temps. Les pointillés correspondent à la droite obtenue par régression linéaire.

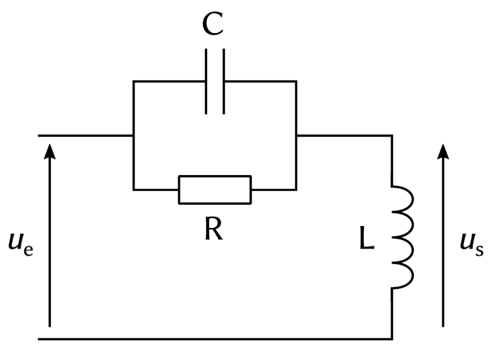
II Circuit RLC ($\simeq$ 30% des points)

II.1 Circuit soumis à un échelon

Dans le montage électrique ci-dessus, le générateur de tension délivre un échelon de tension :

$$u_e(t) = 0 \quad \text{pour} \quad t < 0$$
$$u_e(t) = E \quad \text{pour} \quad t \geq 0.$$

Le condensateur et la bobine sont supposés parfaits.



À $t = 0^-$, le condensateur est déchargé et aucun courant ne traverse la bobine.

1. Juste après la fermeture de l'interrupteur, déterminer la valeur de la tension u_s, ainsi que la dérivée de la tension u_s par rapport au temps.

2. Au bout d'un temps très long ($t \to \infty$), déterminer la valeur de la tension u_s.

3. Déterminer l'équation différentielle portant sur u_s et la mettre sous forme canonique, en faisant apparaître la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q. Exprimer ces deux coefficients en fonction des caractéristiques du circuit.

4. Ecrire l'équation caractéristique, ainsi que le discriminant.

$\boxed{\textbf{5.}}$ Pour $R = 333\,\Omega$, $L = 10\,mH$, $C = 10\,nF$ et $E = 5\,V$, déterminer la valeur du facteur de qualité et en déduire le signe du discriminant. Quel est le type de régime obtenu ?

$\boxed{\textbf{6.}}$ Donner la forme générale de la solution. On ne cherchera pas à déterminer les constantes.

$\boxed{\textbf{7.}}$ Donner l'allure de la courbe représentant u_s en fonction du temps.

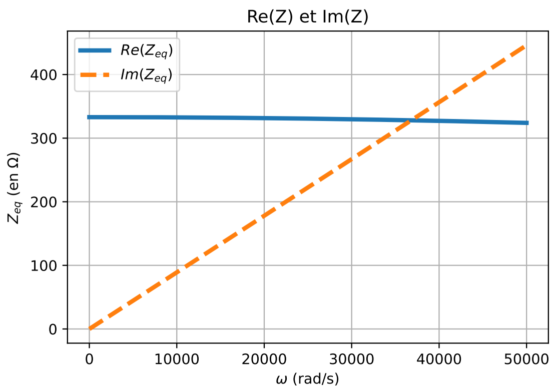
II.2 Étude du régime sinusoïdal forcé

On se place maintenant en régime sinusoïdal forcé. La tension u_e s'écrit $u_e(t) = U_{em}\cos(\omega t)$.

$\boxed{\textbf{8.}}$ Rappeler l'expression des impédances complexes $\underline{Z}_L$, $\underline{Z}_C$ et $\underline{Z}_R$ respectivement équivalentes à la bobine, au condensateur et à la résistance.

$\boxed{\textbf{9.}}$ Déterminer l'expression de l'impédance complexe $\underline{Z}_{eq}$ équivalente au circuit.

$\boxed{\textbf{10.}}$ Calculer l'expression de la partie réelle et de la partie imaginaire de $\underline{Z}_{eq}$ en fonction de ω. On obtient graphiquement les allures suivantes pour $\text{Re}(\underline{Z}_{eq})$ et $\text{Im}(\underline{Z}_{eq})$:



Expliquer pourquoi, compte tenu de l'allure obtenue, on peut considérer que le circuit se comporte comme une bobine en série avec une résistance.

On cherche $u_s(t)$ sous la forme $u_s(t) = U_{sm}(\omega)\cos(\omega t + \varphi)$.

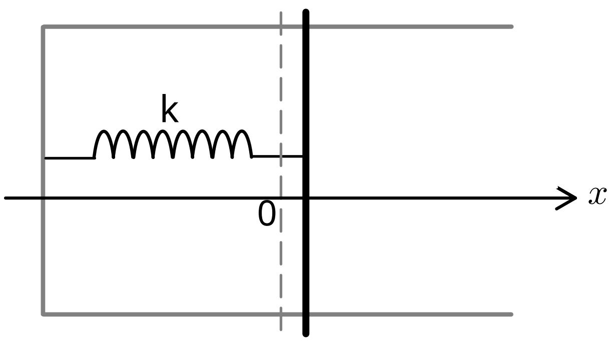
$\boxed{\textbf{11.}}$ Déterminer l'expression de $\underline{U_{sm}}$, l'amplitude complexe associée à $u_s(t)$.

$\boxed{\textbf{12.}}$ Donner l'expression de $U_{sm}(\omega)$.

III Oscillations mécaniques ($\simeq$ 20% des points)

La barre est assimilée à son centre de gravité G

Une barre de masse m peut glisser sans frottements sur deux rails parallèles. Les deux rails et la barre forment un plan horizontal. Les seuls mouvements possibles de la barre sont des translations rectilignes parallèlement à la direction des rails notée (Ox). La barre est liée à un ressort de raideur k. L'origine des abscisses est choisie lorsque le ressort est au repos.



On note ω_0 la pulsation caractéristique du système. À l'instant initial, on lâche la barre sans vitesse initiale à l'abscisse $x = a$, avec $a > 0$.

1. Déterminer l'équation différentielle du mouvement par l'application du principe fondamental de la dynamique (deuxième loi de Newton).

2. Déterminer l'expression de l'abscisse de la barre en fonction du temps.

3. Déterminer l'expression de l'énergie mécanique en fonction du temps.

4. Tracer, sur un même graphique, l'allure de l'énergie potentielle, de l'énergie cinétique et de l'énergie mécanique en fonction du temps.

5. Déterminer les valeurs de l'amplitude maximale X_{max} du mouvement, et celle de la vitesse maximale v_{max} atteinte par la barre.

On reprend le problème précédent mais, cette fois, on suppose que la barre subit une force de frottement visqueux $\vec{F} = -\alpha\vec{v}$, où $\vec{v}$ est le vecteur vitesse de la barre et α un coefficient positif. On pose $2\lambda = \alpha/m$.

6. Établir l'équation différentielle du mouvement, en faisant appraître ω_0 et λ.

7. On suppose $\lambda \ll \omega_0$. Déterminer l'expression de l'abscisse x de la barre en fonction du temps t.

8. Représenter l'allure du graphe de x en fonction de t.

9. La condition précédente étant toujours vérifiée, montrer que l'énergie mécanique peut se mettre sous la forme approchée

$$E_m \simeq \frac{1}{2}ka^2e^{-t/\tau}.$$

On donnera l'expression de τ.

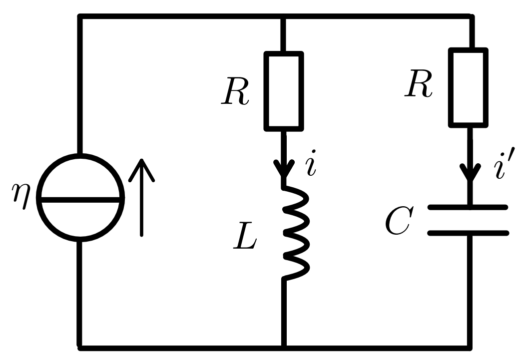
IV Circuit "2R"LC ($\simeq$ 30% des points)

IV.1 Échelon de courant

Le circuit que l'on considère est soumis à un échelon de courant délivré par un générateur idéal de courant tel que :

$$\eta = 0 \quad \text{pour} \quad t < 0$$
$$\eta = I_0 \quad \text{pour} \quad t > 0.$$

Les courants sont nuls en $t = 0^-$, et le condensateur est initialement déchargé.



1. Déterminer $i(0^+)$ et $i'(0^+)$.

2. Déterminer l'équation à laquelle obéit l'intensité $i(t)$. On fera apparaître un facteur de qualité Q et une pulsation caractéristique ω_0 pour mettre cette équation sous forme canonique.

3. On choisit $L = 10\,mH$ et $C = 10\,nF$. À quelle condition sur R le circuit évolue-t-il en régime pseudo périodique ?

4. Déterminer alors l'expression de $i(t)$.

5. En déduire l'expression de l'intensité $i'(t)$.

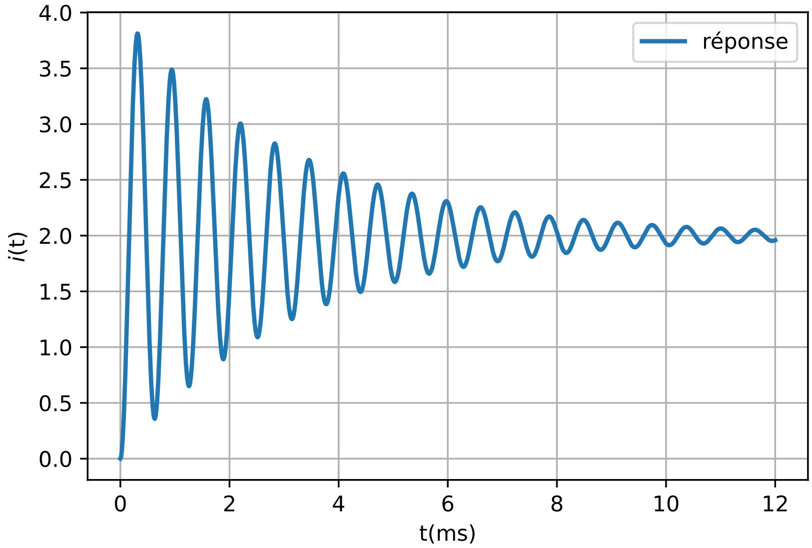
Dans cette situation, on définit le décrément logarithmique par

$$\delta = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{i(t) - i(\infty)}{i(t + nT) - i(\infty)}\right),$$

avec n un entier, $i(\infty)$ la valeur de $i(t)$ en régime permanent, et $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ la pseudo-période (ω est la pseudo-pulsation).

6. Déterminer l'expression de δ en fonction de Q.

7. On obtient la courbe suivante pour $i(t)$. Déterminer la valeur de δ, puis celle de Q, et enfin celle de R. On donne $\ln 2 \simeq 0.7$.



IV.2 Régime sinusoïdal forcé

L'entrée est maintenant une source sinusoïdale de courant :

$$\eta(t) = I_{m0}\cos(\omega t)\,, \quad \text{avec}\, I_{m0} \quad \text{une constante}\,.$$

8. Quelle est l'impédance équivalente $\underline{Z}_{eq}$ au circuit ?

9. Calculer l'amplitude du courant $i(t)$ en régime sinusoïdal forcé.