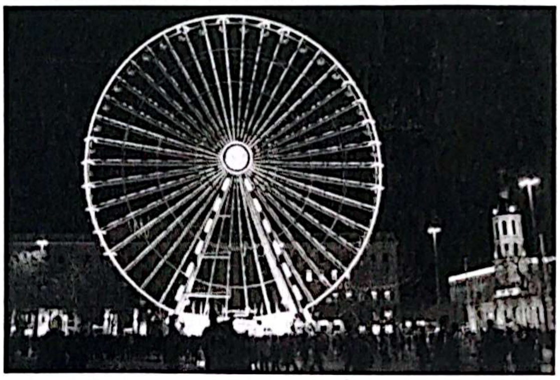
Vecteur unitaire $\vec{e_x}$ ou $\vec{u_x}$

Angle : $\theta > 0$

Mécanique MC1 Cinématique



Historique

Antiquité : Archimède : Hydrostatique, notion de centre de gravité (250 avant JC).
XVI^e : Copernic : description cinématique du système solaire.
Kepler : mouvement des planètes.
Galilée : principe d'inertie, principe de relativité galiléenne.
XVII^e : Huygens : Mouvements de rotation.
Newton : Les trois lois de la dynamique classique.

I Introduction à la mécanique

1.) Définitions

Mécanique : Etude du mouvement des systèmes matériels. → solide, ensemble solide système déformable (ressort).

Cinématique : Description du mouvement des corps, indépendamment des causes qui le provoquent. (MC1)
On ne s'intéresse pas aux forces ni à la masse.

Dynamique : Etude des relations entre les causes du mouvement et leurs effets. (Tout le reste).

On ne s'intéresse au solide (indéformable.)

2.) Hypothèses de la mécanique newtonienne

1. Possibilité au moins théorique de connaître avec une précision illimitée la position et la vitesse d'un corps à un instant donné.
2. Le temps se déroule de la même façon quel que soit le mouvement du corps considéré (hypothèse d'un temps absolu).

1. La mécanique quantique rejette la première hypothèse (1923-26 Principe de Heisenberg et Dualité onde-particule De Broglie, Heisenberg, Schrödinger et Born).

Il est impossible de connaître avec une précision illimitée la position et la vitesse d'un corps à un instant donné (= principe d'incertitude de Heisenberg).
A toute particule en mouvement on associe une onde (= dualité onde corpuscule)..

Pour un système de particules espacées de d, la mécanique classique est une bonne approximation si $\lambda << d$.

2. La théorie de la relativité (restreinte) Einstein 1905 rejette la deuxième hypothèse.

Le déroulement du temps dépend du mouvement du système considéré.
La mécanique classique reste une bonne approximation si $v << c$ où v est la vitesse du corps considéré, et c la vitesse de la lumière dans le vide ($c = 3.10^8$ m.s^{-1}).

Accelerateur de particule on est en meca-relativististe.

3.) Repérage dans l'espace et le temps

Solide : Corps supposé indéformable. Les distances entre deux points quelconques de (S) ne varient pas au cours du temps.

Pour repérer la position d'un solide dans l'espace, il faut choisir un solide de référence (S_{ref}), c'est-à-dire un objet physique par rapport auquel on étudie le mouvement.

Repère d'espace $\mathfrak{R}(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ O point arbitraire du repère lié à (S_{ref}).
Base cartésienne définie par trois points fixes appartenant à (S_{ref}).

Pour repérer un solide dans l'espace, il faut six paramètres :
- trois coordonnées d'un point du solide O_1 : On prend parfois le centre de gravité G du solide.
- trois angles qui définissent l'orientation des axes du repère $\mathfrak{R}_1$ lié au solide, par rapport au repère lié au solide de référence.

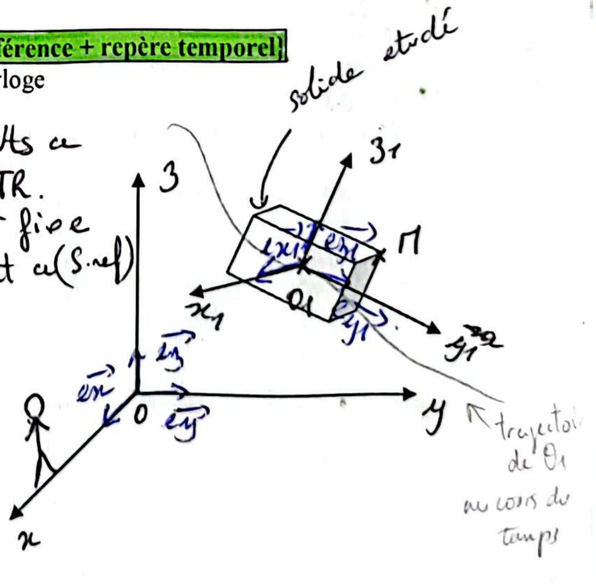
* par rapport a

Repère temporel : {date origine + horloge de référence}
Horloge de référence : permet de mesurer la durée entre deux événements. On mesure le nombre de fois que se produit un phénomène cyclique.

Référentiel : {repère d'espace lié à un solide de référence + repère temporel}
= Observateur muni d'une horloge

Description d'un chat (deformable) dans un wagon de train
=> Mvt d'un cube dans un wagon de train
Solide de reference (surface wagon).
(gare, soleil).
$\mathcal{R}(O; \overrightarrow{ex}; \overrightarrow{ey}; \overrightarrow{ez})$ lié a (Sref) : O, $\overrightarrow{ex}$ $\overrightarrow{ey}$ $\overrightarrow{ez}$ sont fixe par rapport à (Sref).
O_1 est liée au solide (cube)
O_1 = souvent centre de gravité).
3 axes liés au cube $\overrightarrow{ex_1}, \overrightarrow{ey_1}, \overrightarrow{ez_1}$
tout point $M \in (S)$ est definie 3 coordoné d'espace fixe O_1

• uniquement 2 Mvts a étudier. RT ou TR.
observateur fixe par raport a (S.ref)

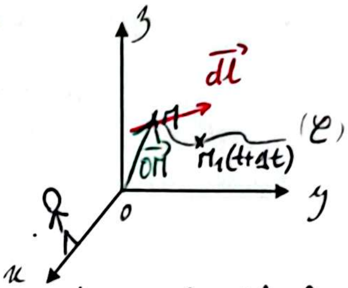


Trajectoire : Ensemble des points de l'espace occupés par l'objet ponctuel M au cours de son déplacement, ou par G, le centre de gravité du solide considéré.

Point matériel M(m) : Point géométrique M, auquel on associe une masse m. Corps assez petit pour que sa position puisse être définie à l'aide de trois coordonnées seulement. ex : Mouche.

Dans un référentiel, un événement (M,t) est défini par les paramètres (x,y,z,t) = point de l'espace-temps. Unité de longueur : le mètre. Unité de temps : la seconde. (Voir poly "les grandeurs mesurables")

II Cinématique du point



1.) Vecteurs vitesse et accélération

Pour un point M en mouvement par rapport à un référentiel $\Re$ de centre O :
L'observateur est lié à $\Re$ et regarde M. $\mathcal{R}(O;x;y;z)$, 3 axes et O lié au referentiel

Vecteur position : $\boxed{\overrightarrow{OM} = \vec{r}}$ → m

Vecteur vitesse instantanée : $\vec{v}(M/\mathcal{R}) = \left.\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{\Re} = \left.\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \left.\dfrac{d\vec{\ell}}{dt}\right)_{\mathcal{R}}$ → $m.s^{-1}$ on derive par rapport au referentiel R. donc (O fixe).

Déplacement élémentaire : $\vec{dl} = \overrightarrow{MM'}$ et MM' infiniment proche.

Vecteur accélération instantanée : $\vec{a}(M/\Re) = \left.\dfrac{d\vec{v}}{dt}\right)_{\Re} = \left.\dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right)_{\Re}$ → $m.s^{-2}$ On dirive /R, donc O fixe (cst).

On peut exprimer ensuite ces vecteurs dans différentes bases locales, ou repères de projection.

Rq : Vecteur deplacement élémentaire
$M(t)$ et $M_1(t+\Delta t)$

$\vec{v}(M/R) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \left(\dfrac{\overrightarrow{MM_1}}{\Delta t}\right)$

vitesse instantané
vitesse moyenne.

$\vec{v}(M/R) = \dfrac{\overrightarrow{MM'}}{dt}$ | $M(t)$, $M'(t+dt)$.

$\vec{v}(M/R) = \dfrac{\vec{dl}}{dt}$ $\vec{dl}$ est tangent a la trajectoire, dans le sens du MVt.

2.) Coordonnées cartésiennes

Base orthonormée directe $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$:

$\|\vec{e_x}\| = \|\vec{e_y}\| = \|\vec{e_z}\| = 1$ vecteur unitaire

$\vec{e_x} \perp \vec{e_y}$; $\vec{e_z} \perp \vec{e_x}$ et $\vec{e_z} \perp \vec{e_y}$

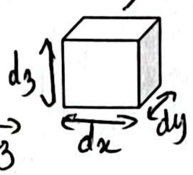
$(\vec{e_x}; \vec{e_y}, \vec{e_z})$ forme un trièdre direct (pouce index majeur) de la main droite.

M a pour coordonnées (x, y, z). M décrit tout l'espace pour (x, y, z) ∈]−∞;+∞[

Repère orthonormé $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ lié au référentiel : $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ sont indépendants de M, donc du temps.

Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$
Vecteur vitesse : $\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z$
Vecteur accélération : $\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z$

Déplacement élémentaire : $\overrightarrow{dl} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z$ utile pour intégral de volume.
Volume élémentaire : dV=dx×dy×dz.



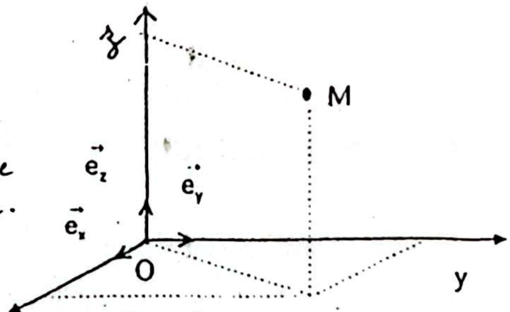


Fig. 1

***

demo $\overrightarrow{OM} = x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z}$

$x(t)$, $y(t)$, $z(t)$

$O, \vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z}$ constants

Vitesse instantanée $v(M/R) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_R$.

$v(M/R) = \frac{dx}{dt}\vec{e_x} + \frac{dy}{dt}\vec{e_y} + \frac{dz}{dt}\vec{e_z}$

$= \dot{x}\,\vec{e_x} + \dot{y}\,\vec{e_y} + \dot{z}\,\vec{e_y}$

Accélérat° $\vec{a}(M/R) = \left.\frac{d\,v(M/R)}{dt}\right)_R$.

$\vec{a}(M/R) = \frac{d^2x}{dt}\vec{e_x} + \frac{d^2y}{dt}\vec{e_y} + \frac{d^2z}{dt}\vec{e_z}$

$= \ddot{x}\vec{e_x} + \ddot{y}\vec{e_y} + \ddot{z}\vec{e_z}$.

Déplacement élémentaire

$\overrightarrow{dl} = \overrightarrow{MM'}$

$M(x;y;z)$: $\overrightarrow{OM} = x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z}$
à l'instant t

M' à l'instant $(t+dt)$

$M'(x+dx, y+dy, z+dz)$.

$\overrightarrow{OM'} = (x+dx)\vec{e_x} + (y+dy)\vec{e_y} + (z+dz)\vec{e_z}$

$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}$

$\overrightarrow{dl} = \overrightarrow{MM'} = dx\,\vec{e_x} + dy\,\vec{e_y} + dz\,\vec{e_z}$

$\overrightarrow{MM'}(dx, dy, dz)$.

$\vec{v}(M/R) = \frac{\overrightarrow{MM'}}{dt} = \frac{\overrightarrow{dl}}{dt}$. est vérifié.

3.) Coordonnées cylindriques

Base orthonormée directe instantanée $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.

$\vec{e}_\rho$ vecteur unitaire radial

$\vec{e}_\theta$ vecteur unitaire orthoradial

H projection orthogonale de M sur (Oxy).
I projection orthogonale de M sur (Oz).

rayon polaire $\rho = OH$ $\overrightarrow{OH} = \rho\vec{e}_\rho$

angle polaire $\theta = (\vec{e}_x, \vec{e}_\rho)$

cote $z = \overline{OI} = \overline{HM}$ $\overrightarrow{HM} = z\vec{e}_z$

Coordoné polaire un mvt plus souvent noté (r, θ)

M (ρ, θ, z) où $\rho \in [0; +\infty[$; $\theta \in [0; 2\pi[$; $z \in]-\infty; +\infty[$

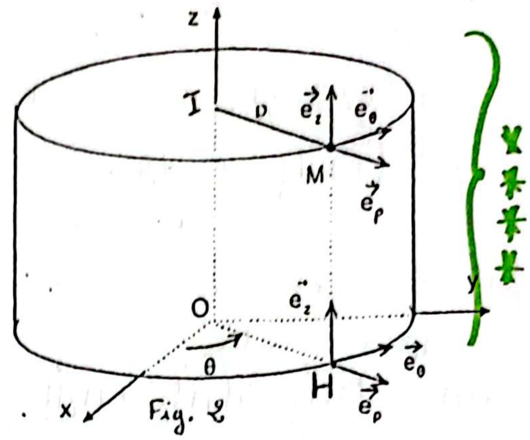
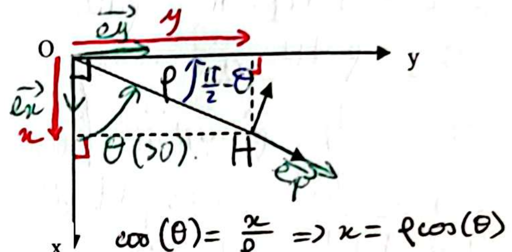


Fig. 2

Relations avec les coordonnées cartésiennes :

$x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, $z = z$.



$\cos(\theta) = \frac{x}{\rho} \Rightarrow x = \rho\cos(\theta)$

$\sin(\theta) = \frac{y}{\rho} \Rightarrow y = \rho\sin(\theta)$.

ou $y = \rho\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \rho\sin(\theta)$.

Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM} = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z$

Vecteur vitesse : $\vec{v} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z$

Vecteur accélération : $\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z$

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta \qquad \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{e}_\rho$$

demo $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM} = \rho\vec{e_\rho} + z\vec{e_z}$

$\rho(t)$, $\theta(t)$, $z(t)$, $\vec{e_\rho}(t)$, $e_\theta(t)$

θ et $\vec{e_z}$ fixes /R donc independants du temps

Vitesse $\vec{v}(M/R) = \frac{d}{dt}(\rho\vec{e_\rho}) + \frac{dz}{dt}\vec{e_z}$

$\vec{v}(M/R) = \frac{d\rho}{dt}\vec{e_\rho} + \rho\frac{d\vec{e_\rho}}{dt} + \frac{dz}{dt}\vec{e_z}$

$= \dot{\rho}\vec{e_\rho} + \rho\frac{d\vec{e_\rho}}{dt} + \dot{z}\vec{e_z}$

$\vec{e_\rho} = \cos(\theta)\vec{e_x} + \cos(\frac{\pi}{2} - \theta)\vec{e_y}$

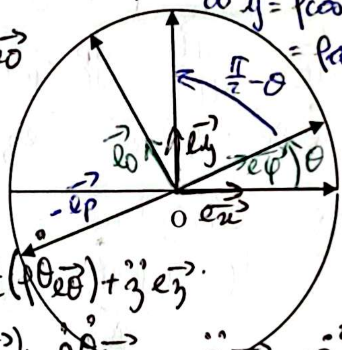
$= \cos(\theta)\vec{e_x} + \sin(\theta)\vec{e_y}$.

$\vec{e_\rho}(\theta(t))$.

donc $\frac{d\vec{e_\rho}}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \times \frac{d\vec{e_\rho}}{d\theta} = \dot{\theta}\frac{d\vec{e_\rho}}{dt}$.

$\frac{d\vec{e_\rho}}{dt} = -\sin(\theta)\vec{e_x} + \cos(\theta)\vec{e_y}$

donc $\vec{v} = \dot{\rho}\vec{e_\rho} + \rho\dot{\theta}\vec{e_\theta} + \dot{z}\vec{e_z}$



Acceleration :

$\vec{a}(M/R) = \frac{d\vec{v}(M/R)}{dt}$

$\vec{a}(M/R) = \frac{d}{dt}(\dot{\rho}\vec{e_\rho}) + \frac{d}{dt}(\rho\dot{\theta}\vec{e_\theta}) + \ddot{z}\vec{e_z}$.

$\vec{a}(M/R) = (\ddot{\rho}\vec{e_\rho} + \dot{\rho}\dot{\vec{e_\theta}}) + \dot{\rho}\dot{\theta}\vec{e_\theta} + \rho\ddot{\theta}\vec{e_\theta} - \rho\dot{\theta}^2\vec{e_\rho} + \ddot{z}\vec{e_z}$

$\vec{a}(M/R) = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{e_\rho} + (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta})\vec{e_\theta} + \ddot{z}\vec{e_z}$

$\vec{e_\theta} = \cos\theta\,\vec{e_y} - \cos(\frac{\pi}{2} - \theta)\,\vec{e_x}$

$= -\sin\theta\,\vec{e_x} + \cos\theta\,\vec{e_y}$

$\Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{e_\rho}}{dt} = \vec{e_\theta}}$

$\frac{d\vec{e_\theta}}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \times \frac{d\vec{e_\theta}}{dt}$

$= \dot{\theta}\,\frac{d\vec{e_\theta}}{d\theta}$

avec $\frac{d\vec{e_\theta}}{dt} = -\cos(\theta)\vec{e_x} - \sin(\theta) = -\vec{e_\rho}$.

Derivé un vecteur unitaire son angle polaire revient a une rotation de $+\frac{\pi}{2}$

Déplacement élémentaire

$\vec{dl} = \vec{MM'}$

où | $M(\rho, \theta, z)$ à l'instant t
| $M'(\rho+d\rho, \theta+d\theta, z+dz)$ à l'instant $t+dt$.

On fait varier chaque coordonné l'une après l'autre.

$\vec{dl} = \vec{MM'} = \vec{MM_1} + \vec{M_1M_2} + \vec{M_2M'}$

on fait varier z de dz θ de $d\theta$ ρ de $d\rho$

$M_1M_2 = I'M_1 \times d\theta = \rho d\theta$ ...

$\boxed{\vec{M_1M_2} = \rho\, d\theta\, \vec{e_\theta}}$

$\vec{M_2M'} = d\rho\, \vec{e_\rho} \simeq \vec{M_1M''}$ (⚠ en faite $\vec{M_2M''}$ selon $\vec{e_\rho}$ qui a subit une rotation par rapport à $\vec{e_\rho}$ de $d\theta$) on néglige cette rotation

On néglige les infinies petit d'ordre 2).

$\vec{MM_1} = \vec{II'} = dz\,\vec{e_z}$.

$\boxed{\vec{dl} = d\rho\,\vec{e_\rho} + \rho\, d\theta\,\vec{e_\theta} + dz\,\vec{e_z}}$

$\vec{v} = \frac{\vec{dl}}{dt} = \frac{\vec{MM'}}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\vec{e_\rho} + \rho\frac{d\theta}{dt}\vec{e_\theta} + \frac{dz}{dt}\vec{e_z}$

$\vec{v} = \dot{\rho}\,\vec{e_\rho} + \rho\dot{\theta}\,\vec{e_\theta} + \dot{z}\,\vec{e_z}$.

Volume élémentaire :

$dV = d\rho \times \underbrace{(\rho\, d\theta)}_{⚠} \times dz$.

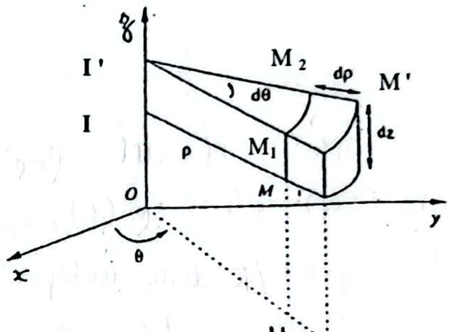
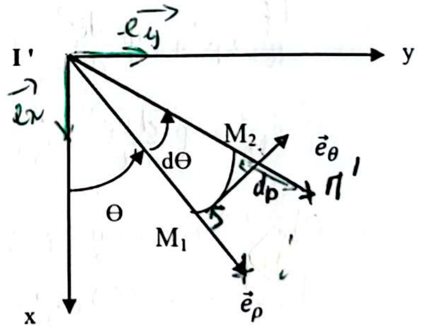


Fig. 3



Déplacement élémentaire $\vec{dl} = \vec{dr} = d\rho\vec{e}_\rho + \rho d\theta\vec{e}_\theta + dz\vec{e}_z$
Volume élémentaire dV=dρ×ρdθ×dz.

⚠ θ et φ inversé en SI.

4.) Coordonnées sphériques (fig. 4)

Base orthonormée directe instantanée $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$: (trièdre direct, + entre eux)

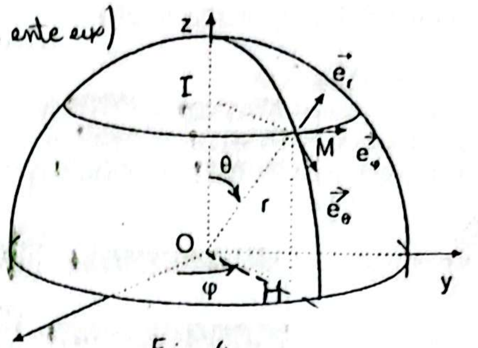
H projection orthogonale de M sur (Oxy).

r = OM. → distance

colatitude $\theta = (\vec{e}_z, \overrightarrow{OM})$

longitude $\varphi = (\vec{e}_x, \overrightarrow{OH})$

M (r, θ, φ) où r ∈ [0; +∞[; θ∈ [0; π]; φ∈ [0; 2π[



Vecteur position :. $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r\vec{e}_r$

Relations avec les coordonnées cartésiennes : $\overline{OH} = \overline{IM} = r\sin\theta$

$x = \overline{OH}\cos\varphi = r\sin\theta\cos\varphi$

$y = \overline{OH}\sin\varphi = r\sin\theta\sin\varphi$ — a retrouver

$z = \overline{OI} = r\cos\theta.$

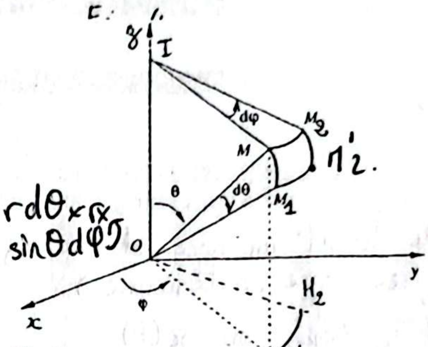


Fig. 5

$OH = r$ et $\overline{OH} = r\cos(\frac{\pi}{2}-\theta) = r\sin(\theta)$

$x = \overline{OH}\cos\varphi = r\sin(\theta)\cos(\varphi).$

$y = \overline{OH}\cos(\frac{\pi}{2}-\varphi) = \overline{OH}\sin(\varphi) = r\sin(\theta)\sin(\varphi)$

$z = \overline{OI} = r\cos(\theta).$

$dS = MM_1 \times MM_2 = rd\theta \times r\sin\theta d\varphi$

$dV = dS \times dr$

On cherche $\overrightarrow{dl}$:

$\overrightarrow{dl} = \overrightarrow{MM'}$ | $M(r,\theta,\varphi)$ a l'instant t.
| $M'(r+dr, \theta+d\theta, \varphi+d\varphi)$ a l'instant t+dt

$\overrightarrow{dl} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M'_2} + \overrightarrow{M'_2M'}$

$= \underbrace{\overrightarrow{MM_1}}_{\theta} + \underbrace{\overrightarrow{MM_2}}_{\varphi} + \underbrace{\overrightarrow{MM''}}_{r}$

(On néglige les infiniments petit d'ordre 2)

$MM_1 = rd\theta$, $\overrightarrow{MM_1} = rd\theta\vec{e_\theta}$

$\widehat{MM_2} = \widehat{HH_2} = OH \times d\varphi = r\sin(\theta)d\varphi.$

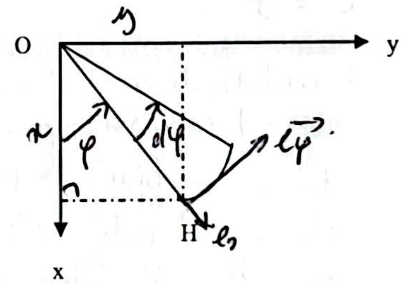
$\overrightarrow{MM_2} = r\sin(\theta)d\varphi\,\vec{e_\varphi}$

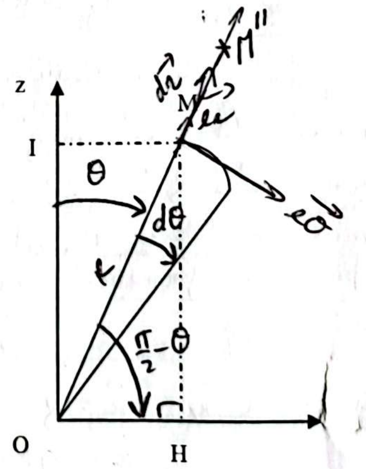
$MM'' = dr$ donc $\overrightarrow{MM''} = dr\vec{e_r}$

$\overrightarrow{dl} = dr\vec{e_r} + rd\theta\vec{e_\theta} + r\sin(\theta)d\varphi\vec{e_\varphi}$

$\vec{v} = \frac{\overrightarrow{dl}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{e_r} + r\frac{d\theta}{dt}\vec{e_\theta} + r\sin\theta\frac{d\varphi}{dt}\vec{e_\varphi}$

$\boxed{\vec{v} = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta} + r\sin\theta\,\dot{\varphi}\vec{e_\varphi}}$ à savoir retrouver





Déplacement élémentaire : $\overrightarrow{dl} = \overrightarrow{dr} = dr\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta + r\sin\theta d\varphi\vec{e}_\varphi$

Surface élémentaire : dS=rdθ×rsinθdφ (fig. 5).

Volume élémentaire : dV=dS×dr=dr×rdθ×rsinθdφ

III Exemples de mouvements simples

1.) Définitions

Un mouvement est uniforme si la norme du vecteur vitesse est constante.
Un mouvement est accéléré si la norme du vecteur vitesse augmente.
Un mouvement est décéléré si la norme du vecteur vitesse diminue.

Un mouvement est uniformément varié si $\frac{dv}{dt}$ est constante.

Le mouvement est uniformément accéléré si $\frac{dv}{dt} = cste > 0$

Le mouvement est uniformément décéléré si $\frac{dv}{dt} = cste < 0$.

2.) Mouvements rectilignes

a) Définition : La trajectoire est une droite.

On choisit un axe et une origine O
(coordonée cartesienne).

$\vec{OM} = x\vec{e_x}$ où $x(t)$

$\vec{v} = \dot{x}\vec{e_x}$ $\quad \vec{a} = \ddot{x}\vec{e_x}$

Mvt rectiligne uniforme

$\dot{x} = const.$

a $t=0$ $\dot{x}(0) = v_0$.

$\vec{v} = v_0 \vec{e_x}$.

$\vec{a} = \vec{0}$

$\dot{x} = v_0$ $\quad x = v_0 t + cste\ 2$.

Si $x(0) = 0 \Rightarrow const_2 = 0 \Rightarrow x = v_0 t$.

$\vec{OM} = v_0 t\, \vec{e_x}$

b) Exemple : Mouvement de vecteur accélération constante

Ex Mvt en chute dans le champs de pesenteur (dynamique) terestre supposé uniforme.

-> a $t=0$ on lance le projectile avec une vitesse $\vec{v_0}$ vertical => mvt rectiligne

$\vec{v_0} = v_0 \vec{e_x}$ $\quad v_0$ valeur algébrique >0 ou <0

Deuxième loi de Newton :

$m\vec{a} = \Sigma\vec{F} = \vec{P} = m\vec{g}$

donc $\vec{a} = \vec{g} = g\vec{e_x}$ ou $g = 9{,}81\, m.s^{-2}$

mvt rectiligne d'accéleration constante

$\boxed{\text{mvt uniformement varié}}$

$\boxed{a = g > 0}$

On obtien x : $\ddot{x} = g$.

$\dot{x} = gt + cst_1$

a $t=0$, $\dot{x}(0) = g0 + const_1 = v_0$.

$\Rightarrow \dot{x} = gt + v_0$

$x = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + const_2$.

a $t=0$, $x(0) = 0$.

donc $const_2 = 0$

alors $\boxed{x = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t.}$

Si $v_0 > 0$, projectil lancé vers le bas
$\vec{v}$ et $\vec{a}$ dans le même sens.
augmentation de la vitesse tout au long du mouvement.

Mvt accéleré.

Si $v_0 < 0$, projectile lancé vers le haut
$\dot{x}$ peut s'annuler, => 2 phase. dans le mvt

- 1er phase $\vec{v}$ et $\vec{a}$, sont en sens inverse donc Mvt décéleré jusqu'au point ou la vitesse s'annule.
- 2eme phase vers le bas Mvt accelére.

3.) Mouvements circulaires

a) Définition La trajectoire est un cercle de rayon R, centré sur I, d'axe (Oz).

coordonnées cylindriques :

$\rho = OH = IM = R$ = constante

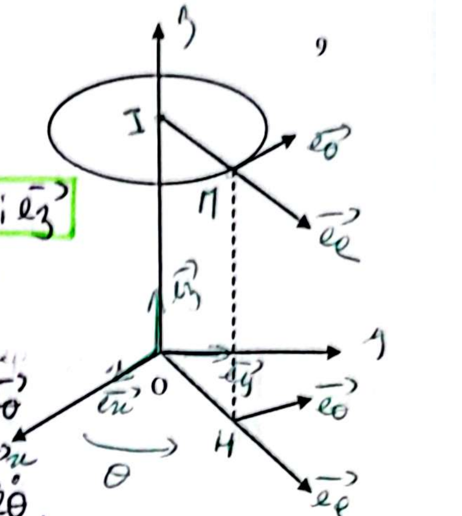
$\theta(t)$

$z_I = \overline{OI} = \overline{HM}$ = const.

$\vec{OM} = \vec{OH} + \vec{HM} = \boxed{R\vec{e_\rho} + z_I\vec{e_z}}$

$= R\dot{\theta}\vec{e_\theta} + R\dot{\theta}(-\dot{\theta}\vec{e_\rho})$

$= R\ddot{\theta}\vec{e_\theta} - R\dot{\theta}^2\vec{e_\rho}$



b) Exemple : Mouvement circulaire non uniforme :

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM} = R\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z$

à refaire à chaque fois.

$\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta = R\omega\vec{e}_\theta = v\vec{e}_\theta$ où $\omega = \dot{\theta}$ est la vitesse angulaire.

$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{e}_\theta - \frac{v^2}{R}\vec{e}_\rho$

donc $\boxed{\omega = \dot{\theta}}$ $\vec{v} = R\omega\vec{e_\theta}$

$a = R\frac{d\omega}{dt}\vec{e_\theta} - R\omega^2\vec{e_\rho}$

$\vec{v} = v\vec{e_\theta}$ ou $v = R\dot{\theta}$.

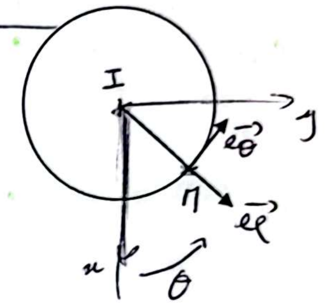
$\boxed{\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{e_\theta} - \frac{v^2}{R}\vec{e_\rho}}$ ✱✱

$\vec{a} = \vec{a_T} + \vec{a_N}$

$\vec{a_T} = R\ddot{\theta}\vec{e_\theta} = \frac{dv}{dt}\vec{e_\theta}$ accélération tangentiel.

$\vec{a_N} = -R\dot{\theta}^2\vec{e_\rho}$

$= -\frac{v^2}{R}\vec{e_\rho}$ accélération normal.



---

a) $\vec{v}(M/R) = \frac{d\vec{OM}}{dt}\Big)_R = R\frac{d\vec{e_\rho}}{dt}$

$\frac{d\vec{e_\rho}}{dt} = \frac{d\vec{e_\rho}}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\vec{e_\theta}$

$\vec{a}(M/R) = \frac{d\vec{v}(M/R)}{dt}\Big)_R$.

$\frac{d\vec{e_\theta}}{dt} = -\dot{\theta}\vec{e_\rho}$

À refaire à chaque fois.

Mouvement circulaire uniforme : v = Cte donc ω = Cte

à redémontrer à chaque fois.

$\vec{v} = R\omega\vec{e}_\theta = v\vec{e}_\theta$

$\vec{a} = -R\omega^2\vec{e}_\rho = -\frac{v^2}{R}\vec{e}_\rho$

$\omega = \dot{\theta} = cst.$

$\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e_\theta} = R\omega\vec{e_\theta}$

$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{e_\rho} = -R\omega^2\vec{e_\rho} = -\frac{v^2}{R}\vec{e_\rho}$

Rq trajectoire dans un plan, on se place souvent ds la base polaire $(\vec{e_z}; \vec{e_\theta})$ si on a choisit $I = O$.

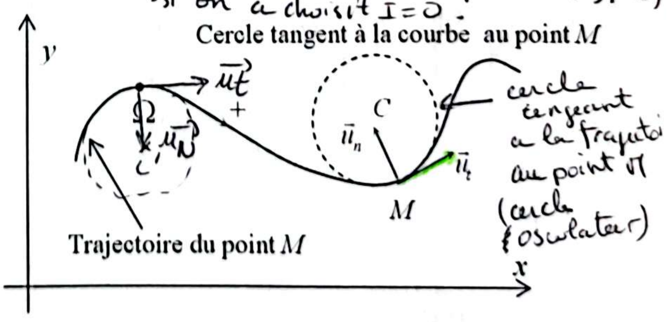
4.) Repérage local le long d'une trajectoire plane : repère de Frenet

M se déplace le long d'une trajectoire dans le plan (xOy)

En un point M quelconque de la trajectoire, on définit :

$\vec{u}_t$: Vecteur unitaire tangent à la trajectoire, orienté dans le sens de parcours de la trajectoire.

$\vec{u}_n$: Vecteur unitaire normal à la trajectoire, dirigé vers l'intérieur de la courbure de la trajectoire.



Repère de Frenet : repère mobile $(M, \vec{u}_t, \vec{u}_n)$

Vitesse : $\vec{v} = v\vec{u}_t$

On assimile le mouvement au voisinage du point M à un mouvement circulaire quelconque sur le cercle osculateur (= cercle tangent localement au point M à la trajectoire, de centre C de rayon R).

R est appelé rayon de courbure de la trajectoire au point M.

Accélération : $\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_t + \frac{v^2}{R}\vec{u}_n$

On reutilise les 2 expressions obtenue

$\vec{v} = v\vec{e_\theta}$ et $\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u_\theta} - \frac{v^2}{R}\vec{u_\rho}$.

$\vec{e_\theta} = \vec{u_t}$ $\vec{v} = v\vec{u_t}$

$\vec{e_\rho} = -\vec{u_r}$ $\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u_t} + \frac{v^2}{R}\vec{u_r}$

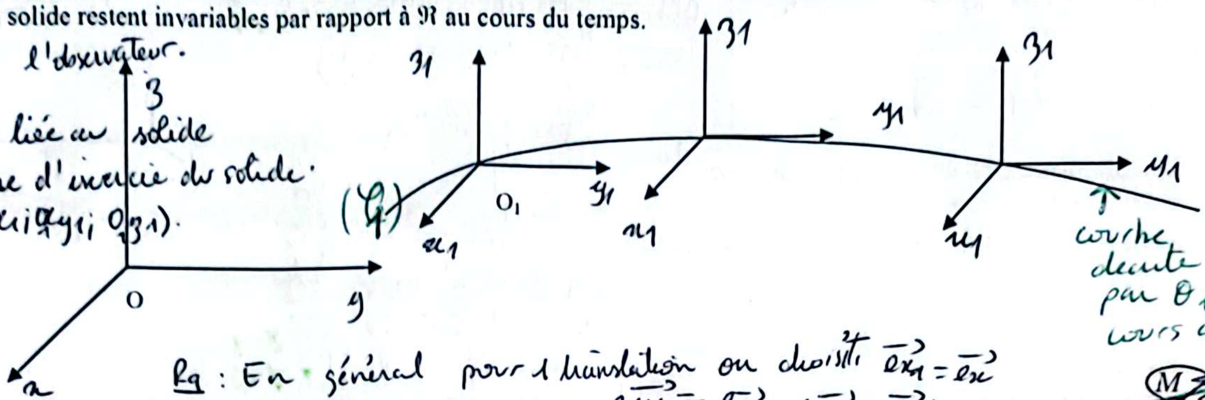
IV Cinématique du solide

1.) Translation (S)

a) Définitions Un solide est en translation par rapport à un référentiel $\mathfrak{R}$ lorsque les vecteurs de base cartésiens liés au solide restent invariables par rapport à $\mathfrak{R}$ au cours du temps.

R liée a l'observateur.

O_1 = point liée au solide
↳ centre d'inertie du solide.
sut. $(O_1 x_1, O_1 y_1, O_1 z_1)$.

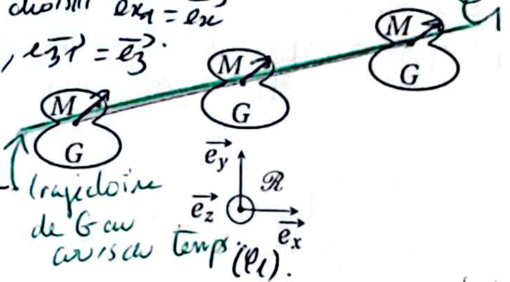


Rq : En général pour 1 translation on choisit $\vec{e_{x_1}} = \vec{e_x}$, $\vec{e_{y_1}} = \vec{e_y}$, $\vec{e_{z_1}} = \vec{e_z}$.

Translation rectiligne : O_1 a une trajectoire rectiligne par rapport à $\mathfrak{R}$.

ex : voiture sur une autoroute

ici $O_1 = G$, $\vec{GM} = \vec{O_1M}$ est au court du temps.
M point quelconque du solide



Translation circulaire : O_1 a une trajectoire circulaire par rapport à $\mathfrak{R}$.

Exemple : Nacelle d'une grande roue.

$(O_1 ; x_1 ; y_1 ; z_1)$ liée à la nacelle.

ref terrestre (O, x, y, z) liée a l'observateur.

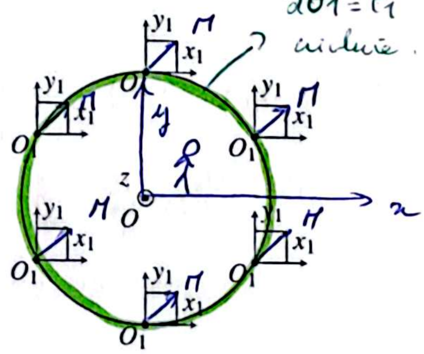
(Oz) axe de rotation de la grande roue

On choisit $\vec{e_{z_1}} = \vec{e_z}$

Translation : $\vec{OM} = \vec{OO_1} + \vec{O_1M}$
M ptn fixe du solide.

$\vec{O_1M} = x_1 \vec{e_{x_1}} + y_1 \vec{e_{y_1}} + z_1 \vec{e_{z_1}}$.

Solide => $\{x_1, y_1, z_1$ constant. $\{\vec{e_{x_1}}, \vec{e_{y_1}}, \vec{e_{z_1}}$ constant lors de la derivation car Translation.



Translation circulaire.

- Tous les points du solide ont la même vitesse et même acceleration.
- Suivant le type de translation on se rapporte au cas precedent de cinematique du point.

$\vec{e_{x_1}} = \vec{e_x}$
$\vec{e_{y_1}} = \vec{e_y}$
$\vec{e_{z_1}} = \vec{e_z}$

$$\vec{v}(M/R) = \frac{d\vec{OM}}{dt}\Big|_R = \frac{d\vec{OO_1}}{dt}\Big|_R + \frac{d\vec{O_1M}}{dt}\Big|_R.$$

$\vec{O_1M}$ = const donc $\frac{d\vec{O_1M}}{dt}\Big|_R = \vec{0}$ donc $\vec{v}(M/R) = \frac{d\vec{OO_1}}{dt}\Big|_R = \vec{v}(O_1/R)$ et $\vec{a}(M/R) = \vec{a}(O_1/R)$

Tous les points d'un solide en translation ont même mouvement. Le mouvement du solide est complètement décrit par le mouvement d'un de ses points, par exemple le centre de gravité G.

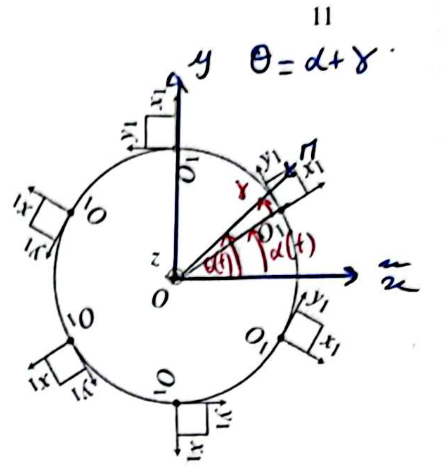
TR rectiligne => Mvt rectiligne de O_1 : $\vec{OO_1} = x\vec{e_x}$ et on derive 2 fois.

TR circulaire => Mvt circulaire de O_1, $\vec{OO_1} = R\vec{e_\rho}(+z_1\vec{e_z})$ $\vec{v}(O_1/R) = R\dot{\theta}\vec{e_\theta}$
$\vec{a}(O_1/R) = R\ddot{\theta}\vec{e_\theta} - R\dot{\theta}^2\vec{e_\rho}$

2.) Rotation autour d'un axe fixe Δ

Un solide est en rotation autour d'un axe fixe Δ si tous ses points sont en mouvement circulaire autour de Δ.

Exemple : Nacelle d'une grande roue qui s'est emballée.


Rotation autour de (Oz).

Axe de rotation $\Delta = (Oz)$

$R_1(O_1, x_1, y_1)$ liée a la nacelle.

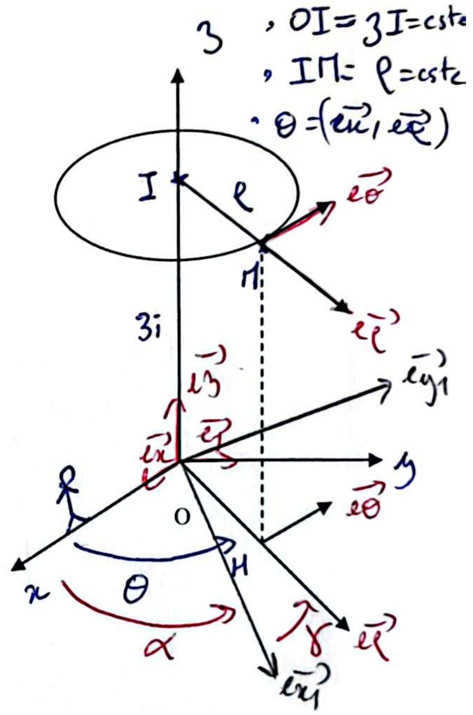
$\vec{e_{z1}} = \vec{e_z}$ suivant l'axe de rotation.

$M \in$ solide (S) ex : nacelle.

M décrit un cercle de autour $\Delta(Oz)$.

de centre I projection orthogonal de M sur Δ.

Coordonnés cylindriques. dans referenciel R lieé a l'observateur



$\vec{OM} = \vec{OH} + \vec{HM} = R\vec{e_\rho} + z_I\vec{e_z}$

$\vec{v}(M/R) = R\dot{\theta}\vec{e_\theta}$

car $\vec{e_\rho}(t)$ et $\vec{e_z} = $ const.

$\vec{a} = R\ddot{\theta}\vec{e_\theta} - R\dot{\theta}^2\vec{e_\rho}$.

car $\frac{d\vec{e_\rho}}{dt} = -\dot{\theta}\vec{e_\rho}$

$v = R\dot{\theta} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = R\ddot{\theta}$

$v^2 = R^2\dot{\theta}^2$

$\vec{v} = v\vec{e_\theta}$ donc $\vec{a} = \boxed{\frac{dv}{dt}\vec{e_\theta} - \frac{v^2}{R}\vec{e_\rho}}$

à demontrer.

Donc $\theta(t) = \alpha(t) + \gamma$ avec γ const.

$\dot{\theta} = \dot{\alpha} = \omega$ <u>vitesse angulaire</u>

$\gamma = (\vec{e_{x1}}, \vec{e_\rho})$ et $\alpha = (\vec{e_x}, \vec{e_{x1}})$.

indépendant du point m considéré.

Vecteur rotation : $\vec{\Omega} = \omega\vec{e}_z$

- parallèle à l'axe de rotation et suivant la règle du tire bouchon
- de norme la vitesse angulaire de rotation

Remarque : L'axe de rotation n'appartient pas forcément au solide. Rotat° de la lune.