
PROGRAMMES 15 et 16.

PROGRAMME 15 : du 27/01 au 31/01

REPRISE DES BIJECTIONS, IMAGES DIRECTES ET RÉCIPROQUES (TIRÉS EN ARRIÈRE)

REPRISE DU DÉBUT DES LIMITES

LIMITES ET CONTINUITÉ : SUITE ET FIN

- ★ Continuité de f en un point a de I . Continuité à droite et à gauche. Prolongement par continuité en un point. Image d'une suite de limite a par une fonction continue en a .
Opérations : combinaisons linéaires, produit, quotient, composition.
- ★ Continuité sur un intervalle. Opérations : combinaisons linéaires, produit, quotient, composée. Théorème des valeurs intermédiaires (forme 1 : f s'annule sur $[a, b]$, forme 2 : tout réel intermédiaire entre des images est atteint). Image d'un intervalle par une fonction continue. Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes (théorème des bornes atteintes). Toute fonction f continue et strictement monotone sur un intervalle I réalise une bijection de I dans l'intervalle $f(I)$, et sa réciproque est continue et strictement monotone sur l'intervalle $f(I)$, et de même monotonie que f .
- ★ Brève extension aux suites complexes : Limite de f en a , continuité de f en a , continuité de f sur un intervalle I . Traduction à l'aide des parties réelle et imaginaire. Fonctions bornées au voisinage de a . Toute fonction admettant une limite finie en a est bornée au voisinage de a . Opérations sur les fonctions admettant une limite finie en a , continues en a ou continues sur un intervalle I : combinaisons linéaires, produit, quotient.

UN ÉNONCÉ AU CHOIX À DEMANDER

- | | |
|--|---|
| <ul style="list-style-type: none"> <input type="checkbox"/> Définition d'une bijection. <input type="checkbox"/> Définition d'une image directe, d'un tiré en arrière. <input type="checkbox"/> Définition mathématique d'une limite. <input type="checkbox"/> Limite à gauche, à droite en un point. <input type="checkbox"/> Passage à la limite. <input type="checkbox"/> Théorème d'encadrement. <input type="checkbox"/> Limite d'une fonction croissante sur $[a, b[$ (étude en b). | <ul style="list-style-type: none"> <input type="checkbox"/> Écriture mathématique de la continuité en un point. <input type="checkbox"/> Continuité à droite, à gauche. <input type="checkbox"/> Prolongement par continuité en un point. <input type="checkbox"/> Théorème des valeurs intermédiaires (forme 1 et/ou 2). <input type="checkbox"/> Théorème des bornes atteintes (savoir faire une phrase en français et une traduction mathématique). |
|--|---|

DÉMONSTRATIONS

- Unicité de la limite (pour le cas limite finie en a réel).
- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ et $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = \ell$ alors $\lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = \ell$ (pour a, b, ℓ réels).
- Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f(a)f(b) \leq 0$. Alors f s'annule au moins une fois sur $[a, b]$ (forme 1 du théorème des valeurs intermédiaires).

PROGRAMME 16 : du 03/02 au 07/02

REPRISE DES LIMITES ET DE LA CONTINUITÉ

DÉRIVATION

- ★ Dérivabilité en un point a , nombre dérivé. Interprétation géométrique.
Si f est définie en a alors f est dérivable en a ssi f admet un DL_1 en a .
Ce DL_1 s'écrit : $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + f'(a)(x - a) + o(x - a)$ soit aussi $f(a + h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(a) + f'(a)h + o(h)$.
La dérivabilité entraîne la continuité.
Savoir interpréter un DL_1 de f en un point a où elle n'est pas définie (interprétation en 2 étapes : d'abord prolongement par continuité en a puis dérivabilité de la fonction prolongée en a).
Dérivabilité à gauche, à droite. Dérivabilité et dérivée sur un intervalle.
- ★ Opérations sur les fonctions dérivables et les dérivées : combinaison linéaire, produit, quotient, composition. Si f est une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle J , si f est dérivable en a , condition nécessaire et suffisante de dérivabilité de f^{-1} en $b = f(a)$ et calcul de la dérivée.
- ★ Dérivées successives. Pour k dans $\mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, fonction de classe C^k sur I . Opérations sur les fonctions de classe C^k : combinaison linéaire, produit (formule de Leibniz), quotient, composée, réciproque.
- ★ Extremum local. Condition nécessaire en un point intérieur. Définition d'un point critique.
- ★ Théorème de Rolle. Égalité des accroissements finis.
Inégalité des accroissements finis : si f est dérivable sur I et si $|f'|$ est bornée par M sur I , alors, pour tout $(x, y) \in I^2$, $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$. Application aux suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$.
Caractérisation des fonctions constantes, croissantes.
Si f est dérivable sur un intervalle I , $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$ et f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points alors f est strictement croissante sur I (à adapter pour la stricte décroissance).
- ★ Théorème de la limite de la dérivée : si f est dérivable sur $I \setminus \{a\}$, continue sur I et si $f'(x)$ tend vers ℓ (réel) lorsque x tend vers a , alors $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \underset{x \rightarrow a}{\rightarrow} \ell$. Ainsi, f est dérivable en a , $f'(a) = \ell$ et f' est continue en a .
Cas où $f'(x)$ tend vers $\pm\infty$ en a .
- ★ Brève extension à \mathbb{C} .

UN ÉNONCÉ AU CHOIX À DEMANDER

- | | |
|--|--|
| <input type="checkbox"/> Définition mathématique d'une limite. | <input type="checkbox"/> Définition de la dérivabilité en un point. |
| <input type="checkbox"/> Limite à gauche, à droite en un point. | <input type="checkbox"/> Dérivabilité à droite, à gauche en un point. |
| <input type="checkbox"/> Passage à la limite. | <input type="checkbox"/> Définition des dérivées successives d'une fonction. |
| <input type="checkbox"/> Théorème d'encadrement. | <input type="checkbox"/> Formule de Leibniz. |
| <input type="checkbox"/> Limite d'une fonction croissante sur $[a, b[$ (étude en b). | <input type="checkbox"/> Définition d'un extremum local. |
| <input type="checkbox"/> Écriture mathématique de la continuité en un point. | <input type="checkbox"/> Résultat sur les extrema d'une fonction dérivable. |
| <input type="checkbox"/> Continuité à droite, à gauche. | <input type="checkbox"/> Théorème de Rolle. |
| <input type="checkbox"/> Prolongement par continuité en un point. | <input type="checkbox"/> Égalité des accroissements finis. |
| <input type="checkbox"/> Théorème des valeurs intermédiaires (forme 1 et/ou 2). | <input type="checkbox"/> Inégalité des accroissements finis. |
| <input type="checkbox"/> Théorème des bornes atteintes (savoir faire une phrase en français et une traduction mathématique). | <input type="checkbox"/> Monotonie des applications dérivables. |
| | <input type="checkbox"/> Théorème de la limite de la dérivée. |

DÉMONSTRATIONS

- Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f(a)f(b) \leq 0$. Alors f s'annule au moins une fois sur $[a, b]$ (forme 1 du théorème des valeurs intermédiaires).
- Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. f est croissante sur I ssi pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$.
- Théorème de Rolle.