Mécanique. MC3 Energie du point matériel

I Travail et puissance d'une force

1.) Définitions

Hypothèse : point matériel M(m), soumis à la force $\vec{F}$, de vitesse $\vec{v}$, dans un référentiel $\mathfrak{R}$ quelconque.

Définition : Travail de $\vec{F}$ lorsque M se déplace de $M_1(t_1)$ à $M_2(t_2)$ $\boxed{W_{1\to 2}(\vec{F}) = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}.\overrightarrow{dl}}$

Travail élémentaire de $\vec{F}$ lorsque M se déplace de $\overrightarrow{dl}$ $\boxed{\delta W = \vec{F}.\overrightarrow{dl}}$

Puissance de $\vec{F}$: $P(\vec{F}) = \frac{\delta W}{dt} = \vec{F}.\vec{v}$

$P(\vec{F}) > 0$ Puissance motrice, ou travail moteur (= force motrice).
$P(\vec{F}) < 0$ Puissance résistante, ou travail résistant (= force résistante).

2.) Exemples de forces qui ne travaillent pas

II Théorème de la puissance et de l'énergie cinétique

1.) Energie cinétique :

Pour un point matériel M(m) de vitesse $\vec{v}$, dans un référentiel $\Re$ quelconque, on définit
l'énergie cinétique $\boxed{Ec\ (M/\Re) = \frac{1}{2}\, m\, v^2(M/\Re)}$

2.) Enoncé des théorèmes

Hypothèse : point matériel M(m) soumis à la résultante des forces $\vec{F}$, de vitesse $\vec{v}$, dans un référentiel $\Re_g$ supposé galiléen.

Théorème de l'énergie cinétique dans $\Re_g$ galiléen $W_{1\to 2}(\vec{F}) = E_c(t_2) - E_c(t_1)$

Théorème de la puissance cinétique dans $\Re_g$ galiléen $P(\vec{F}) = \frac{dE_c}{dt}$

Théorème de l'énergie cinétique sous forme infinitésimale dans $\Re_g$ galiléen $\delta W = dE_c$

démo : Travail de $\vec{F}$ lorsque M se déplace de M_1 à M_2 :

III Energie potentielle et mécanique

1.) Energie potentielle

Hypothèse : Point matériel M(m), soumis à une force $\vec{F}$, dans un référentiel $\Re$ quelconque.

Propriété : Si le travail de $\vec{F}$ lorsque M se déplace de $M_1(t_1)$ à $M_2(t_2)$ ne dépend pas du chemin suivi, mais uniquement des positions initiales et finales, la force est dite conservative et le travail s'écrit sous la forme : $\boxed{W_{1\to2}(\vec{F}) = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}.\overrightarrow{dl} = [-Ep]_{M_1}^{M_2}}$ $\boxed{\delta W = \vec{F}.\overrightarrow{dl} = -dEp}$

La fonction Ep est appelée Energie potentielle de M associée à $\vec{F}$. Elle est définie à une constante additive près. C'est une fonction des coordonnées d'espace.

Le travail d'une force conservative le long d'un trajet donné est égal à la diminution d'énergie potentielle. On dit que la force dérive d'une énergie potentielle. Pour une trajectoire fermée, W = 0.

2.) Exemples

3.) Théorème de l'énergie mécanique

Hypothèse : Point matériel M(m), soumis à la résultante des forces $\vec{F} = \vec{F}_c + \vec{F}_{nc}$, dans un référentiel $\Re_g$ supposé galiléen.

où : - $\vec{F}_c$ est la résultante des forces conservatives, de travail W_c dérivant de l'énergie potentielle totale Ep.
- $\vec{F}_{nc}$ est la résultante des forces non conservatives de travail W_{nc}.

Théorème de l'énergie mécanique dans un référentiel $\Re_g$ galiléen : $\boxed{[Em]_{M_1}^{M_2} = W_{nc}}$

où :Em = Ec + Ep est l'énergie mécanique du point matériel. Em est une fonction des coordonnées d'espace et de leurs dérivées. Elle dépend du référentiel. Elle est définie à une constante additive près.
Ec est l'énergie cinétique.
Ep correspond à la somme des énergies potentielles associées à chaque force conservative.

Théorème de l'énergie mécanique sous forme infinitésimale, dans un référentiel $\Re_g$ galiléen : $\boxed{dEm = \delta W_{nc}}$

Théorème de la puissance mécanique dans un référentiel $\Re_g$ galiléen : $\boxed{\frac{dEm}{dt} = P_{nc}}$

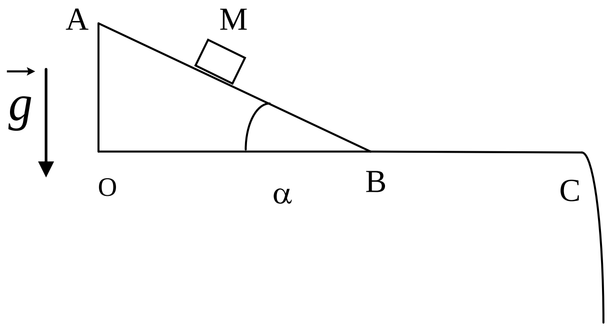
4.) Conservation de l'énergie mécanique

Propriété : L'énergie mécanique se conserve si toutes les forces qui travaillent dérivent d'une énergie potentielle. Elle est alors donnée par les conditions initiales.

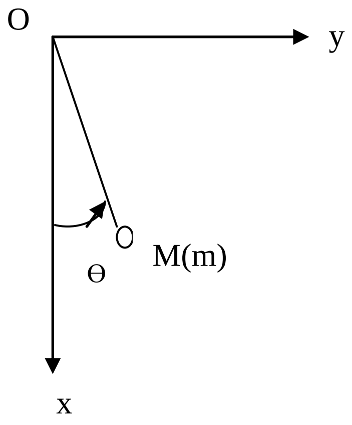
Définition : On appelle intégrale première du mouvement toute quantité ne faisant intervenir que les coordonnées de la position et la vitesse et qui se conserve au cours du mouvement.
La conservation de l'énergie mécanique est une intégrale première du mouvement

Remarque : L'énergie mécanique ne se conserve pas dans les cas où il y a des frottements. Seule l'énergie totale se conserve : une partie de l'énergie mécanique aura été transformée en chaleur.

5.) Exemple : Distance d'arrêt d'une luge



6.) Exemple : Pendule simple



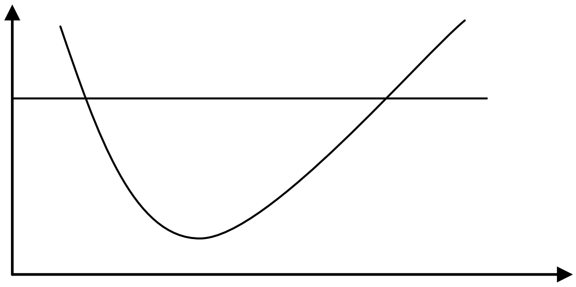
IV Mouvements conservatifs à une dimension

1.) Puits et barrière de potentiel

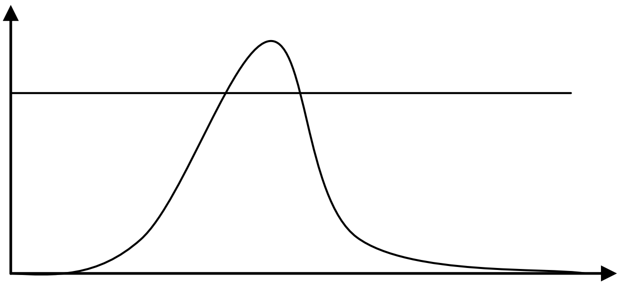
La conservation de l'énergie mécanique suffit à la mise en équation d'un mouvement ne possédant qu'un seul degré de liberté (c'est-à-dire décrit par une seule coordonnée).

Exemple : Point M(m) se déplaçant sans frottements selon un axe (Ox) horizontal, soumis à une force $\vec{F} = F\vec{e}_x$. dérivant d'une énergie potentielle Ep(x).

- Puits de potentiel : La particule est confinée dans la région [x_1, x_2]



- Barrière de potentiel : La particule ne peut pas pénétrer dans la région [x_1, x_2]



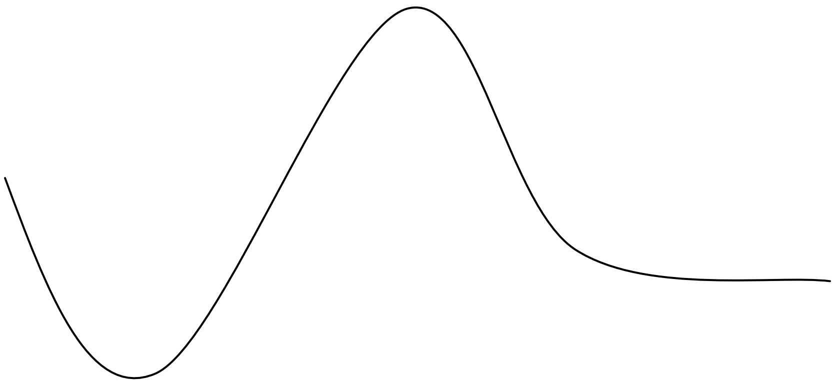
2.) Condition d'équilibre et de stabilité

Définition : Un point M est en équilibre dans un référentiel si sa vitesse est nulle à tout instant.

Propriété : M(m) est en équilibre dans un référentiel $\Re_g$ galiléen si la résultante des forces $\vec{F}$ est nulle à tout instant et si la vitesse initiale est nulle.

Définitions :
- Un point M est en équilibre stable si la force qui apparaît lorsqu'on l'écarte infiniment peu de sa position d'équilibre tend à l'y ramener.
- Dans le cas contraire, l'équilibre est dit instable.
- Si aucune force n'apparaît, l'équilibre est dit indifférent. Le point reste dans sa nouvelle position.

Exemple : Charriot glissant sans frottements sur des montagnes russes.



3.) Cas particulier

Hypothèse : Point M soumis à une force $\vec{F} = F(x)\vec{e}_x$ conservative, dérivant d'une énergie potentielle Ep(x), se déplaçant suivant un axe (Ox), $\vec{F}$ étant la seule force qui travaille.

Propriété : Si un point E d'abscisse $x = x_e$ est une position d'équilibre, alors

l'énergie potentielle Ep est extrémale en ce point : $\left(\frac{dEp}{dx}\right)(x = x_e) = 0$

L'équilibre est stable si Ep est minimale : $\left(\frac{d^2Ep}{dx^2}\right)(x = x_e) > 0$

L'équilibre est instable si Ep est maximale : $\left(\frac{d^2Ep}{dx^2}\right)(x = x_e) < 0$

L'équilibre est indifférent. si $\left(\frac{d^2Ep}{dx^2}\right)(x = x_e) = 0$

4.) Définition générale de l'oscillateur harmonique

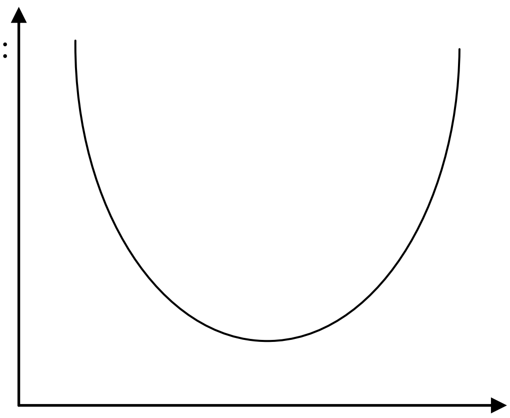
Définition : On appelle oscillateur harmonique à une dimension tout système à un degré de liberté dont l'équation du mouvement est de la forme : $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ quelle que soit la nature physique de la variable x.

Propriété : Un oscillateur se comporte comme un oscillateur harmonique pour de petites oscillations autour d'une position d'équilibre stable.

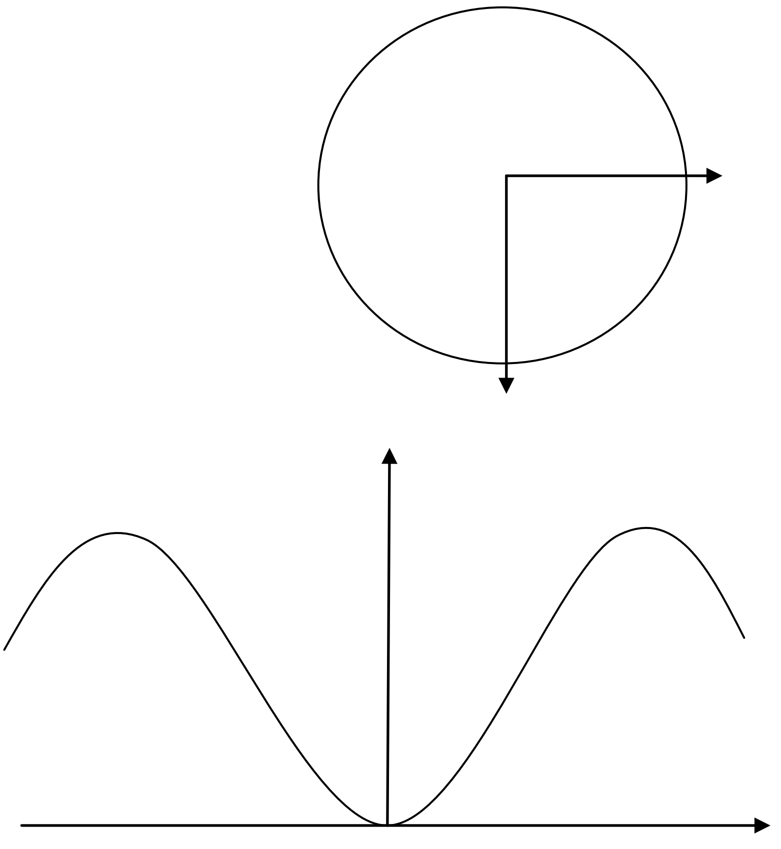
Hypothèse : Oscillateur à une dimension, dont la position est donnée par une seule coordonnée x, soumis à une force $\vec{F} = F(x)\vec{e}_x$ conservative, dérivant d'une énergie potentielle Ep(x), $\vec{F}$ étant la seule force qui travaille.
Soit x_e correspondant à une position d'équilibre stable du système.

Expression de l'énergie potentielle :
Développement limité de Ep(x) au second ordre, au voisinage de $x = x_e$:

$$Ep(x) \approx Ep(x_e) + (x - x_e)\left(\frac{dEp}{dx}\right)_{(x=x_e)} + \frac{(x-x_e)^2}{2}\left(\frac{d^2Ep}{dx^2}\right)_{(x=x_e)}$$



5.) Anneau sur un guide circulaire



V Gradient d'énergie potentielle. Lien avec une force conservative.

1.) Définitions

Définition : Le gradient de l'énergie potentielle Ep, noté $\overrightarrow{grad}Ep$, est le vecteur tel que la variation de Ep lors d'un déplacement élémentaire $\overrightarrow{dl}$ s'écrit $dEp = \overrightarrow{grad}Ep.\overrightarrow{dl}$.

Propriété : Si une force conservative dérive d'une énergie potentielle Ep, on a alors : $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}Ep$

Remarque : Le vecteur $\overrightarrow{grad}\ Ep$ est orienté dans le sens où Ep croît le plus rapidement.

En coordonnées cartésiennes, on a Ep(x,y,z)
La différentielle de Ep est la variation élémentaire de Ep associée à un déplacement élémentaire du point M :
dEp=Ep(x+dx, y+dy, z+dz)-Ep(x,y,z) $\quad dEp = \left.\frac{\partial E_p}{\partial x}\right)_{y,z} dx + \left.\frac{\partial E_p}{\partial y}\right)_{x,z} dy + \left.\frac{\partial E_p}{\partial z}\right)_{x,y} dz$

En coordonnées cartésiennes, $\overrightarrow{dl} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z$
donc $\overrightarrow{grad}Ep = \left.\frac{\partial E_p}{\partial x}\right)_{y,z} \vec{e}_x + \left.\frac{\partial E_p}{\partial y}\right)_{x,z} \vec{e}_y + \left.\frac{\partial E_p}{\partial z}\right)_{x,y} \vec{e}_z$

Remarque : L'expression du gradient sera fournie dans les autres systèmes de coordonnées.

En coordonnées cylindriques $\overrightarrow{grad}Ep = \left.\frac{\partial E_p}{\partial r}\right)_{\theta,z} \vec{e}_r + \frac{1}{r}\left.\frac{\partial E_p}{\partial \theta}\right)_{r,z} \vec{e}_\theta + \left.\frac{\partial E_p}{\partial z}\right)_{r,\theta} \vec{e}_z$

En coordonnées sphériques $\overrightarrow{grad}Ep = \left.\frac{\partial E_p}{\partial r}\right)_{\theta,\varphi} \vec{e}_r + \frac{1}{r}\left.\frac{\partial E_p}{\partial \theta}\right)_{r,\varphi} \vec{e}_\theta + \frac{1}{rsin\theta}\left.\frac{\partial E_p}{\partial \varphi}\right)_{r,\theta} \vec{e}_\varphi$

2.) Exemples

VI. Méthode d'Euler appliquée à un oscillateur d'ordre 2

1.) Principe

Pour l'équation différentielle du pendule simple :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\alpha}{m}\frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{\ell} sin\theta = 0 \qquad \text{soit} \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\xi\omega_0\frac{d\theta}{dt} + {\omega_0}^2 sin\theta = 0$$

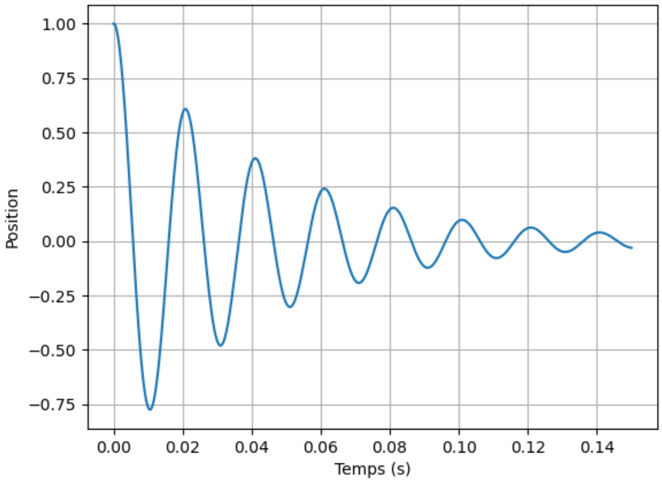
2.) Mise en œuvre

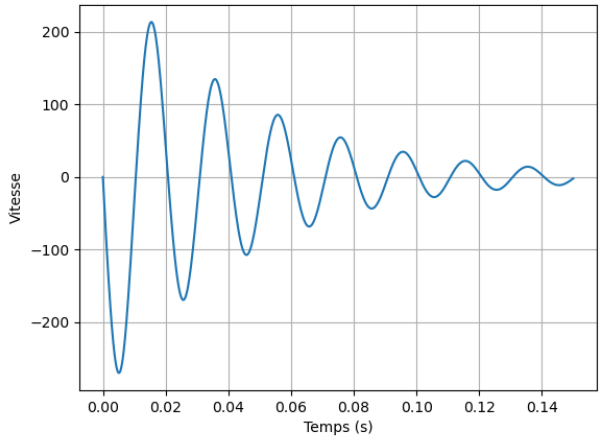
Dans le script, Θ est noté x, $\dot{\theta}$ est noté v.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
from scipy import fftpack

tmax = 0.15

def ordre2_euler(w0, ksi, n):
```



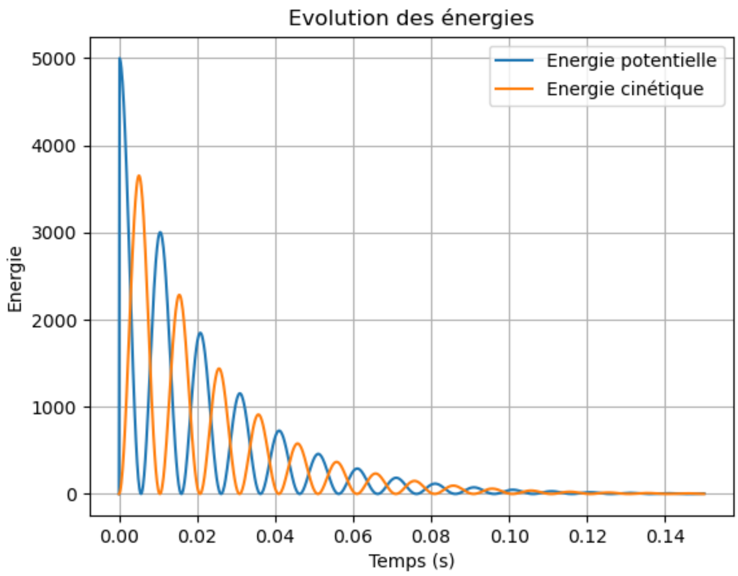


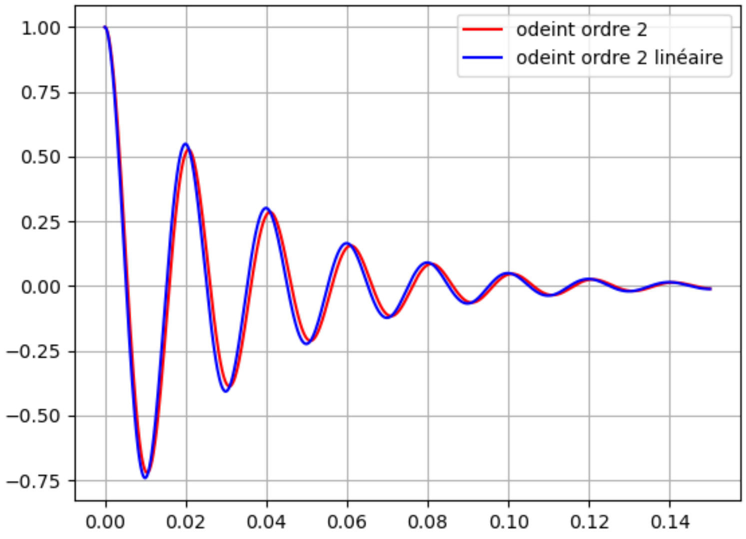

```
n = 1000
les_t, les_x, les_v = ordre2_euler(316,0.095,n) #valeur des coefficients#
  plt.plot(les_t, les_x )
plt.xlabel("Temps (s)")
plt.ylabel("Position")
plt.grid(True)

plt.figure()
plt.plot(les_t, les_v,)
plt.xlabel("Temps (s)")
plt.ylabel("Vitesse")
plt.grid(True)
les_Ep = [0.5*x**2/1e-4 for x in les_x]
les_Ec= [0.5*v**2*0.1 for v in les_v]

plt.figure()
plt.title("Evolution des énergies")
plt.plot(les_t, les_Ep,label="Energie potentielle" )
plt.xlabel("Temps (s)")
plt.ylabel("Energie")

plt.plot(les_t, les_Ec,label="Energie cinétique" )
plt.xlabel("Temps (s)")
plt.grid(True)
```






```
plt.legend()

##Résolution avec odeint

def F(z, t):

les_t = np.linspace(0, tmax, 1000)
sol = odeint(F, (1,0), les_t)

#sol donne un tableau numpy.
#un element du tableau est formée d'une liste comprenant une position et une vitesse
#c'est la premiere colonne qui nous intéresse, on la recupere via la commande sol[:, 0]

def F1(z, t):

sol1 = odeint(F1, (1,0), les_t)

plt.figure()
les_x = sol[:, 0]
plt.plot(les_t, les_x, 'r', label = 'odeint ordre 2')

les_x1 = sol1[:, 0]
plt.plot(les_t, les_x1, 'b', label = 'odeint ordre 2 linéaire')
plt.grid()
plt.legend()
plt.show()
```