PROGRAMMES 17 et 18.

PROGRAMME 17 : du 10/02 au 14/02

Reprise de la dérivation

Systèmes linéaires

K est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

★ Système linéaire de n équations à p inconnues. Système homogène associé à un système linéaire. Système compatible, incompatible.

★ Opérations élémentaires sur les lignes d'un système. On emploiera les notations suivantes : $L_i \leftrightarrow L_j$, $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ et $L_i \leftarrow \lambda L_i$.

★ Algorithme du pivot de Gauss-Jordan.

Calcul matriciel : début

K est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

★ Ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans K. Transposition.

★ Matrices carrées particulières : ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, matrices diagonales, matrice I_n.
Matrices triangulaires.

★ Opérations sur les matrices : addition, loi externe . (« multiplication d'un scalaire et d'une matrice »). Transposée d'une combinaison linéaire.

★ Matrice élémentaire $E_{i,j}$ de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$. Toute matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ s'écrit comme combinaison linéaire de matrices élémentaires (de même format).

★ Produit de deux matrices. Propriétés des opérations matricielles. Transposée d'un produit.
Symbole de Kronecker $\delta_{i,j}$. $E_{i,j}E_{k,\ell} = \delta_{j,k}E_{i,\ell}$ ($E_{i,j}$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ et $E_{k,\ell}$ dans $\mathcal{M}_{p,q}(K)$).

★ Retour sur les systèmes linéaires. Tout système (S) s'écrit $AX = B$.
Système homogène associé : (H) : $AX = 0$.
Si (S) est compatible, en notant X_0 une solution particulière de (S), alors l'ensemble des solutions de (S) est l'ensemble $\{X_0 + Y / Y \text{est solution de } (H)\}$.

★ Matrices carrées : Puissances d'une matrice carrée. Formule du binôme. Le produit matriciel n'est pas commutatif. Il existe des matrices non nulles dont le produit est nul. Il existe des matrices non nulles qui possèdent une puissance nulle (matrices nilpotentes). Matrices diagonales, triangulaires : stabilité par les opérations. Matrices symétriques, antisymétriques.

Un énoncé au choix à demander

- ❒ Définition de la dérivabilité en un point.
- ❒ Dérivabilité à droite, à gauche en un point.
- ❒ Définition des dérivées successives d'une fonction.
- ❒ Formule de Leibniz.
- ❒ Définition d'un extremum local.
- ❒ Résultat sur les extrema d'une fonction dérivable.
- ❒ Théorème de Rolle.
- ❒ Égalité des accroissements finis.
- ❒ Inégalité des accroissements finis.
- ❒ Monotonie des applications dérivables.
- ❒ Théorème de la limite de la dérivée.
- ❒ Définition d'une matrice diagonale, d'une matrice triangulaire.
- ❒ Définition de la transposée d'une matrice et résultats sur la transposition (combinaison linéaire et produit).
- ❒ Définition du produit matriciel (en donnant bien tous les formats).
- ❒ Produit de deux matrices élémentaires.
- ❒ Formule du binôme.
- ❒ Définition d'une matrice symétrique, antisymétrique.

Démonstrations

- ❒ Égalité des accroissements finis.
- ❒ Transposée d'un produit (ne pas oublier de bien préciser les formats des matrices concernées).
- ❒ L'ensemble des matrices triangulaires supérieures est stable par produit.

<u>PROGRAMME 18</u> **: du 17/02 au 21/02**

Reprise des systèmes et du début du calcul matriciel

Calcul matriciel : suite et fin

★ Opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes. Matrices liées aux opérations élémentaires : matrices de transvection, de transposition et de dilatation. Effectuer une opération élémentaire sur les lignes de A revient à multiplier A à gauche par une matrice liée à une opération élémentaire. Adaptation aux opérations élémentaires sur les colonnes.

★ Matrices carrées inversibles : définition. On introduit la terminologie « groupe linéaire », et la notation $\mathrm{GL}_n(K)$, pour désigner l'ensemble des matrices inversibles d'ordre n, mais tout développement sur la notion de groupe est hors programme. Inverse d'un produit de matrices inversibles. Transposée d'un inverse. Inversibilité des matrices liées aux opérations élémentaires.

★ Pour $A \in \mathcal{M}_n(K)$, équivalence des propriétés suivantes :

  ❒ A est inversible

  ❒ Le système $AX = 0$ n'admet que la solution nulle

  ❒ Pour toute matrice colonne Y, le système $AX = Y$ admet une unique solution

★ Conservation de l'inversibilité par opérations élémentaires sur les lignes et / ou sur les colonnes. Inversibilité d'une matrice triangulaire, d'une matrice diagonale. Inverse d'une matrice diagonale inversible. Si T est triangulaire supérieure (resp. inférieure) inversible alors T^{-1} est triangulaire supérieure (resp. inférieure).

★ Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. S'il est possible, par opérations élémentaires sur les lignes de A de passer de A à I_n alors A est inversible et la même suite d'opérations élémentaires permet de passer de I_n à A^{-1}.

Espaces vectoriels : le tout début

★ Structure de K-espace vectoriel. Premiers exemples de référence : K^n, $K^X = \mathcal{F}(X, K)$ (cas particulier des suites) et $\mathcal{M}_{n,p}(K)$. Combinaisons linéaires d'un nombre fini de vecteurs. Règles de calcul.

★ Sous-espace F d'un K-espace vectoriel E ($F \subset E, F \neq \varnothing$, F stable par combinaison linéaire). L'ensemble des combinaisons linéaires de n vecteurs $u_1, \dots, u_n$ est un sev de E et est appelé sous-espace engendré par $u_1, \dots, u_n$. C'est le plus petit sev de E contenant les vecteurs u_i. Notation $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_n)$.

Un énoncé au choix à demander

- ❒ Définition d'une matrice diagonale, d'une matrice triangulaire.
- ❒ Définition de la transposée d'une matrice et résultats sur la transposition (combinaison linéaire et produit).
- ❒ Définition du produit matriciel (en donnant bien tous les formats).
- ❒ Produit de deux matrices élémentaires.
- ❒ Formule du binôme.
- ❒ Définition d'une matrice symétrique, antisymétrique.
- ❒ Interprétation matricielle d'une opération élémentaire sur les lignes ou sur les colonnes.
- ❒ Définition d'une matrice inversible.
- ❒ Résultat sur le produit de matrices inversibles et sur la transposée d'une matrice inversible.
- ❒ Caractérisation des matrices inversibles en utilisant un système linéaire.
- ❒ Condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice diagonale ou triangulaire soit inversible. Que peut-on dire des inverses ?
- ❒ Donner des exemples de référence de K-ev.
- ❒ Définition d'un sev d'un K-ev E. Donner des exemples de sev d'ev de référence.
- ❒ Définition du sev engendré par des vecteurs.

Démonstrations

- ❒ L'ensemble des matrices triangulaires supérieures est stable par produit.
- ❒ Soit A et B deux matrices carrées d'ordre n se déduisant l'une de l'autre par opérations élémentaires sur les lignes et / ou sur les colonnes. Alors A est inversible ssi B est inversible.
- ❒ Soit E un K-ev et $u_1, \ldots, u_n$ des vecteurs de E.
  Alors $\left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i / (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in K^n \right\}$ est le plus petit sev de E contenant les vecteurs $u_1, \ldots, u_n$.