# Mécanique. MC3 Energie du point matériel masse constante.



# I Travail et puissance d'une force

## 1.) Définitions

**Hypothèse** : point matériel M(m), soumis à la force $\vec{F}$, de vitesse $\vec{v}$, dans un référentiel $\Re$ quelconque.

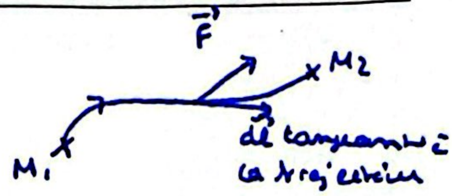
**Définition** : Travail de $\vec{F}$ lorsque M se déplace de $M_1(t_1)$ à $M_2(t_2)$ $\boxed{W_{1\to2}(\vec{F}) = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}.\overrightarrow{dl}}$ Joule

Travail élémentaire de $\vec{F}$ lorsque M se déplace de $\overrightarrow{dl}$ $\boxed{\delta W = \vec{F}.\overrightarrow{dl}}$

Puissance de $\vec{F}$: $P(\vec{F}) = \frac{\delta W}{dt} = \vec{F}.\vec{v}$ Watt.

$P(\vec{F}) > 0$ Puissance motrice, ou travail moteur (= force motrice).

$P(\vec{F}) < 0$ Puissance résistante, ou travail résistant (= force résistante).




unité de W : $U_W = N.m$

$\hat{=}\ m\,s^{-2}.m\,kg$

$= \underline{m^2\,kg\,s^{-2}}$ Joule.

Rq : $\delta W = \vec{F}.\vec{dl}$

ou travail infinitésimal

↳ quantité infinitésimale (= très petite).

$\vec{v} = \frac{\vec{dl}}{dt} \Rightarrow \vec{dl} = \vec{v}\,dt$

$\Rightarrow \delta W = \vec{F}.\vec{v}\,dt.$

$P(\vec{F}) = \frac{\delta W}{dt} = \frac{\vec{F}.\vec{v}\,dt}{dt} = \vec{F}.\vec{v}.$

## 2.) Exemples de forces qui ne travaillent pas (quasiment jamais).


$\vec{R_N}$ ne travaille jamais car perpendiculaire au support, donc à la vitesse.

$W(\vec{R_N}) = \int \vec{R_N}.\vec{dl} = 0$ car $\vec{R_N} \perp \vec{dl}$.

$\vec{T}$ : tension du fil tendu ; est colinéaire au fil, le déplacement est suivant $\vec{e}_\theta$

Rq : $\vec{F_m} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ $\quad \vec{F_m} \perp \vec{v}$ et $\vec{F_m} \perp \vec{B}$

$W(\vec{F_m}) = \int (q\vec{v} \wedge \vec{B}).\vec{dl} = \int \underbrace{(q\vec{v} \wedge \vec{B})}_{\perp \vec{v}}.\vec{v}\,dt = 0.$

## II Théorème de la puissance et de l'énergie cinétique

### 1.) Energie cinétique :

Pour un point matériel M(m) de vitesse $\vec{v}$, dans un référentiel $\Re$ quelconque, on définit l'énergie cinétique $Ec\ (M/\Re) = ½\ m\ v^2(M/\Re)$ * * *

Joule

### 2.) Enoncé des théorèmes

Hypothèse : point matériel M(m) soumis à la résultante des forces $\vec{F}$, de vitesse $\vec{v}$, dans un référentiel $\Re_g$ supposé galiléen.

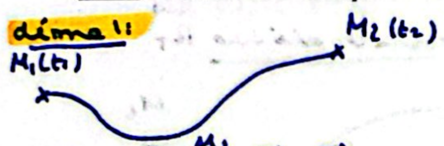
Théorème de l'énergie cinétique dans $\Re_g$ galiléen $W_{1\to2}(\vec{F}) = E_c(t_2) - E_c(t_1) = \Delta Ec.$

Théorème de la puissance cinétique dans $\Re_g$ galiléen $P(\vec{F}) = \frac{dE_c}{dt}$

Théorème de l'énergie cinétique sous forme infinitésimale dans $\Re_g$ galiléen $\delta W = dE_c$

démo : Travail de $\vec{F}$ lorsque M se déplace de $M_1$ à $M_2$ :

démo 1:




$w(\vec{F}) = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}.\vec{dl}$

LFD: Rg galiléen

$m\vec{a} = \vec{F}$

$\vec{v} = \frac{\vec{dl}}{dt} \Rightarrow \vec{dl} = \vec{v}\,dt$

$w(\vec{F}) = \int_{M_1}^{M_2} m \frac{d\vec{v}}{dt}.\vec{v}\,dt$

$v^2 = \vec{v}.\vec{v}$

$d\frac{(\vec{v}.\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt}.\vec{v} + \vec{v}\frac{d\vec{v}}{dt}$

$= 2\frac{d\vec{v}}{dt}v.$

$\Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt}.v = \frac{1}{2}\frac{d(v^2)}{dt}$

$\Rightarrow w(\vec{F}) = \int_{M_1}^{M_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt$

$= \left[\frac{1}{2}mv^2\right]_{M_1}^{M_2}$

$= \frac{1}{2}m\,v^2(t_2) - \frac{1}{2}mv^2(t_1)$

$= \Delta Ec.$

démo 2:

$P(\vec{F}) = \vec{F}.\vec{v}$

LFD : Rg galiléen

$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$

$\Rightarrow P(\vec{F}) = m\frac{d\vec{v}}{dt}.\vec{v}$

$= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$ d'après démo 1

$= \frac{dEc}{dt}$

$\Rightarrow dt\,P(\vec{F}) = dEc$

$\Rightarrow \vec{F}.\vec{v}\,dt = dEc$

$\Rightarrow \delta W(\vec{F}) = dEc$

Rq: $\delta w = dEc$

$\int_{M_1}^{M_2} \delta w = \int_{M_1}^{M_2} dEc$

$W_{1\to2} = Ec(t_2) - Ec(t_1)$

$\delta$ : qtt infinitésimale.

$\int\delta$ : qtt totale.

$dEc$ différentielle totale. cf V.

"l'droit"

$\int dEc = [Ec]_{M_1(t_1)}^{M_2(t_2)} = Ec(t_2) - Ec(t_1)$

diff de la valeur de la fonction entre 2 pts

## III Energie potentielle et mécanique

### 1.) Energie potentielle

Hypothèse : Point matériel M(m), soumis à une force $\vec{F}$, dans un référentiel $\Re$ quelconque.

Propriété : Si le travail de $\vec{F}$ lorsque M se déplace de $M_1(t_1)$ à $M_2(t_2)$ ne dépend pas du chemin suivi, mais uniquement des positions initiales et finales, la force est dite conservative et le travail s'écrit sous la forme : $\boxed{W_{1\to 2}(\vec{F}) = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}.\vec{dl} = [-Ep]_{M_1}^{M_2}}$ $\boxed{\delta W = \vec{F}.\vec{dl} = -dEp}$

La fonction Ep est appelée Energie potentielle de M associée à $\vec{F}$. Elle est définie à une constante additive près. C'est une fonction des coordonnées d'espace.

à cause de l'intégrale (différence).

Le travail d'une force conservative le long d'un trajet donné est égal à la diminution d'énergie potentielle. On dit que la force dérive d'une énergie potentielle. Pour une trajectoire fermée, W = 0.

Re : $W(\vec{F}) = \underbrace{\int \vec{F}.\vec{dl}}_{\delta W} = \int -dE_p = [-E_p]_{M_1}^{M_2}$

$\Rightarrow -dE_p = \delta W$.

trajectoire fermée : $M_1 = M_2$

### 2.) Exemples

• Poids $\vec{P} = m\vec{g}$

$\vec{e_z}$ : verticale ascendante.

$W_{1\to 2}(\vec{P}) = \int_{M_1}^{M_2} \vec{P}.\vec{dl}$

$\vec{P} = -m.g\,\vec{e_z}$

$\vec{dl} = dx\,\vec{e_x} + dy\,\vec{e_y} + dz\,\vec{e_z}$.

$W_{1\to 2}(\vec{P}) = \int_{M_1}^{M_2} -mg\vec{e_z}\,(dx\vec{e_x} + dy\vec{e_y} + dz\vec{e_z})$

$= \int_{M_1}^{M_2} -mg\,dz$.

$= [-mgz]_{M_1}^{M_2}$

$W_{1\to 2}(\vec{P}) = [-E_{pp}]_{M_1}^{M_2}$

donc $mgz = E_{pp} + cste$

• Force de rappel du ressort $k, l_0$

$\vec{F_R} = -k(l - l_0)\,\vec{e_x}$

$x = l - l_0$, allongement du ressort.

$W(\vec{F_R}) = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F_R}.\vec{dl}$ où $\vec{dl} = dx\vec{e_x} + dy\vec{e_y} + dz\vec{e_z}$

$= \int_{M_1}^{M_2} -kx\,\vec{e_x}.\vec{dl}$

$= \int_{M_1}^{M_2} -k\,x\,dx$

$= [-\frac{1}{2}kx^2]_{M_1}^{M_2}$

$W(\vec{F_R}) = [-E_{pe}]_{M_1}^{M_2}$

donc $E_{pe} = \frac{1}{2}kx^2 + cste$.

• Frottements solides $\vec{R_T}$


$W_{1\to 2}(\vec{R_T}) = \int_{M_1}^{M_2} -\vec{R_T}.\vec{dl}$

$= \int_{M_1}^{M_2} \|\vec{R_T}\| \times dl$

on suppose $\|\vec{R_T}\|$ constant sur le trajet $M_1M_2$

$W_{1\to 2}(\vec{R_T}) = R_T \int_{M_1}^{M_2} dl$

$= R_T\,\overset{\frown}{M_1M_2}$

↳ dépend du chemin suivi entre $M_1$ et $M_2$.

$\Rightarrow R_T$ n'est pas conservative, elle ne dérive pas d'une Ep.

$W_{1\to 1}(\vec{R_T}) \neq 0$.

### 3.) Théorème de l'énergie mécanique

Hypothèse : Point matériel M(m), soumis à la résultante des forces $\vec{F} = \vec{F_c} + \vec{F_{nc}}$, dans un référentiel $\Re_g$ supposé galiléen.

où : - $\vec{F_c}$ est la résultante des forces conservatives, de travail $W_c$ dérivant de l'énergie potentielle totale Ep.
- $\vec{F_{nc}}$ est la résultante des forces non conservatives de travail $W_{nc}$.

Théorème de l'énergie mécanique dans un référentiel $\Re_g$ galiléen : $\boxed{[Em]_{M_1}^{M_2} = W_{nc}}$

où :Em = Ec + Ep est l'énergie mécanique du point matériel. Em est une fonction des coordonnées d'espace et de leurs dérivées. Elle dépend du référentiel. Elle est définie à une constante additive près.
Ec est l'énergie cinétique. ↳ à cause de la vitesse ↳ à cause de Ep.
Ep correspond à la somme des énergies potentielles associées à chaque force conservative.

Théorème de l'énergie mécanique sous forme infinitésimale, dans un référentiel $\Re_g$ galiléen : $\boxed{dEm = \delta W_{nc}}$

Théorème de la puissance mécanique dans un référentiel $\Re_g$ galiléen : $\boxed{\frac{dEm}{dt} = P_{nc}}$

Démo : Th de l'Ec dans $\Re_g$ galiléen

$$\Delta Ec = [Ec]_{M_1}^{M_2} = W_{1\to2}(\vec{F})$$

$$W_{1\to2}(\vec{F}) = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \cdot \vec{dl}$$

$$= \int_{M_1}^{M_2} (\vec{F_c} + \vec{F_{nc}}) \cdot \vec{dl}$$

$$= \int_{M_1}^{M_2} \vec{F_c} \cdot \vec{dl} + \int_{M_1}^{M_2} \vec{F_{nc}} \cdot \vec{dl}$$

$$W_{c\,1\to2} = [-E_p]_{M_1}^{M_2}$$

$$W_{1\to2}(\vec{F}) = [Ec]_{M_1}^{M_2}$$

$$= [-E_p]_{M_1}^{M_2} + W_{nc\,1\to2}$$

$$\Rightarrow W_{nc\,1\to2} = \underbrace{[E_c + E_p]_{M_1}^{M_2}}_{[Em]_{M_1}^{M_2}}$$

$$\Rightarrow [EM]_{M_1}^{M_2} = W_{nc}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta Em = W_{nc}}$$

Démo 2 : si forme infinitésimale.

th de l'Ec

$$dEc = \delta W = \delta W_c + \delta W_{nc}$$

$$\delta W_c = -dE_p \Rightarrow dEc = -dE_p + \delta W_{nc}$$

$$\Rightarrow \boxed{dEm = \delta W_{nc}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dEm}{dt} = \frac{\delta W_{nc}}{dt} = P_{nc}.}$$

### 4.) Conservation de l'énergie mécanique

*** Propriété : L'énergie mécanique se conserve si toutes les forces qui travaillent dérivent d'une énergie potentielle. Elle est alors donnée par les conditions initiales.

*** exercices [illegible].

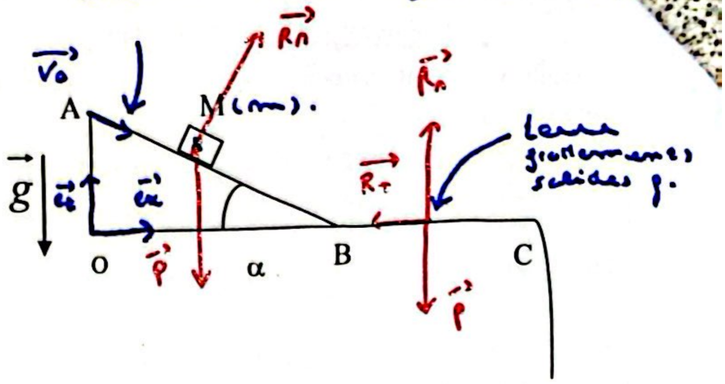
Définition : On appelle intégrale première du mouvement toute quantité ne faisant intervenir que les coordonnées de la position et la vitesse et qui se conserve au cours du mouvement.

La conservation de l'énergie mécanique est une intégrale première du mouvement

Remarque : L'énergie mécanique ne se conserve pas dans les cas où il y a des frottements. Seule l'énergie totale se conserve : une partie de l'énergie mécanique aura été transformée en chaleur.
↳ thermodynamique

BD = L

<u>Neige</u> : on néglige les frottements.




## 5.) Exemple : Distance d'arrêt d'une luge

on cherche la distance d'arrêt en fonction de $v_0$.

Système {M(m)} référentiel galiléen $(O, \vec{e_x}, \vec{e_z})$

Bilan des forces :
- $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\,\vec{e_z}$
- $\vec{R_n}$
- $\vec{R_T} = -R_T\,\vec{e_x}$ sur BC.

$E_m(C) - E_m(A) = W_{B\to C}(\vec{R_T})$

$\Delta E_c + \Delta E_{pp} = W_{B\to C}(\vec{R_T})$.

$\Delta E_c = 0 - \frac{1}{2} m v_0^2$.

$\Delta E_{pp} = 0 - mgz$ où $z = OA$
$= \sin\alpha\, L$.

$\|\vec{R_T}\| = f\,\|\vec{R_n}\|$

PFD sur (Oz) car $\vec{a}$ est sur $\vec{e_x}$.

$\vec{0} = \vec{P} + \vec{R_n}$

donc $\|\vec{R_n}\| = mg$.

donc $\|\vec{R_T}\| = f mg$.

$W_{B\to C}(\vec{R_T}) = \int_B^C \vec{R_T}\cdot d\vec{l}$

$= -fmg \int_B^C d\vec{l}$

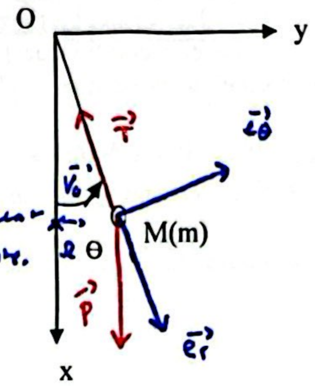
$= -fmg \times d$.

donc :

$-fmg \times d = -\left(\frac{1}{2} m v_0^2 + mg \sin\alpha\, L\right)$

$\Rightarrow d = \dfrac{v_0^2}{fg^2} + \dfrac{\sin\alpha\, L}{f}$

## 6.) Exemple : Pendule simple




Système $\{M(m)\}$.

Rg galiléen $(O, \vec{e_r}, \vec{e_\theta})$

Bilan des forces : $-\ \vec{P} = m\vec{g} = mg\cos\theta\,\vec{e_r} - mg\sin\theta\,\vec{e_\theta}$

$-\ \vec{T} = -T\vec{e_r}$.

$E_m = E_c + E_{pp}$ au point M qlq. car toutes les forces qui travaillent sont conservatives donc $E_m$ = cste.

$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2 l^2$

$\vec{OM} = r\vec{e_r}$

$\vec{v} = \dot{l}\vec{e_r} + \dot{\theta}l\vec{e_\theta}$

$= \dot{\theta}l\vec{e_\theta}$

$E_{pp} : -mgx + c = -mg\cos\theta\, l + c$

$x = -\cos\theta\, l$

donc $E_m = \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2 l^2 - mg\cos\theta\, l + c$ = cste

$\frac{dE_m}{dt} = \frac{1}{2}m\,\ddot{\theta}\,2\dot{\theta}l^2 + mg\dot{\theta}l\sin\theta = 0$.

On lance M du point O avec une vitesse $\vec{v_0} = v_0\vec{e_y}$ (suffisamment petite).

$\Leftrightarrow \quad \ddot{\theta}l + g\sin\theta = 0$

$\Leftrightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$ ] équa diff du mouvement

$\sin\theta \approx \theta$ (petites oscillations).

$\Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$.

donc $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$

donc $\theta = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$.

à $t=0$ : $\theta = 0 \Rightarrow A = 0$

$v = l\dot{\theta} = v_0 \Rightarrow \dot{\theta}_0 = \frac{v_0}{l} \Rightarrow B = \frac{v_0}{l\omega_0}$

donc $\theta = \frac{v_0}{l\omega_0}\sin\omega_0 t$.

$= \frac{v_0}{\sqrt{lg}}\sin\omega_0 t$

- Avec des frottements fluides

$\frac{dE_m}{dt} = P_{nc} = \vec{F_f}\cdot\vec{v}$

$\vec{F_f} = -\alpha\vec{v} \qquad \alpha > 0$

$P_{nc} = -\alpha\vec{v}\cdot\vec{v} = -\alpha v^2$

$= -\alpha l^2\dot{\theta}^2$

$\frac{dE_m}{dt} = P_{nc} = \dot{\theta}(ml^2\ddot{\theta} + mgl\sin\theta)$

$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$

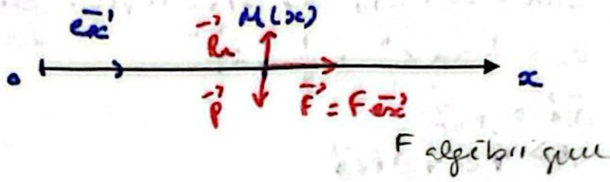
à résoudre sous python TP.

## IV Mouvements conservatifs à une dimension

### 1.) Puits et barrière de potentiel

La conservation de l'énergie mécanique suffit à la mise en équation d'un mouvement ne possédant qu'un seul degré de liberté (c'est-à-dire décrit par une seule coordonnée).

Exemple : Point M(m) se déplaçant sans frottements selon un axe (Ox) horizontal, soumis à une force $\vec{F} = F\vec{e}_x$. dérivant d'une énergie potentielle Ep(x).




Syst [M(m)] Ref terrestre galiléen

$\vec{P}$ et $\vec{R_n}$ ne travaillent pas

$\vec{F}$ seule force conservative

$\Rightarrow$ $E_m = E_c + E_p(x) = cste$

$= \frac{1}{2}mv^2 + E_p(x)$

$\Rightarrow$ $v^2 = \frac{2}{m}(E_m - E_p(x)) \geq 0$

pour que v existe.

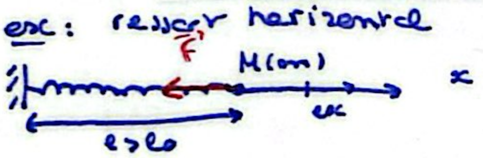
Em déterminée par les CI.

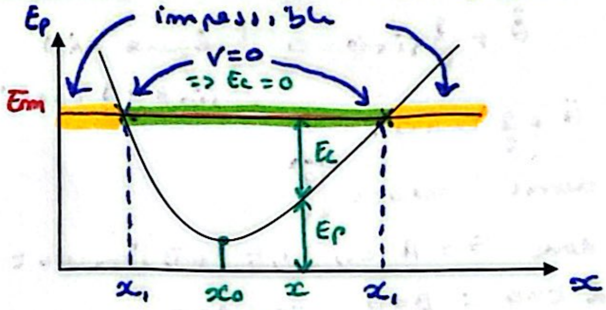
$\Rightarrow$ il faut connaître Ep(x)

- Puits de potentiel : La particule est confinée dans la région [$x_1$, $x_2$]

v existe si $E_m \geq E_p(x)$

ex : ressort horizontal




$\vec{F_R} = -k(l-l_0)\vec{e_x}$

$E_{pe} = \frac{1}{2}k(l-l_0)^2 + cste$

$x = l \Rightarrow E_{pe} = \frac{1}{2}k(x-x_0)^2 + cste$

$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$

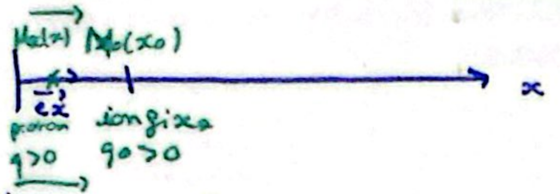
$E_m = E_c + E_{pe} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k(x-x_0)^2 + cste$

Rq : on dérive $(x - x_0)$ pour obtenir l'équa diff du mvt.

$x \in [x_1, x_2]$.

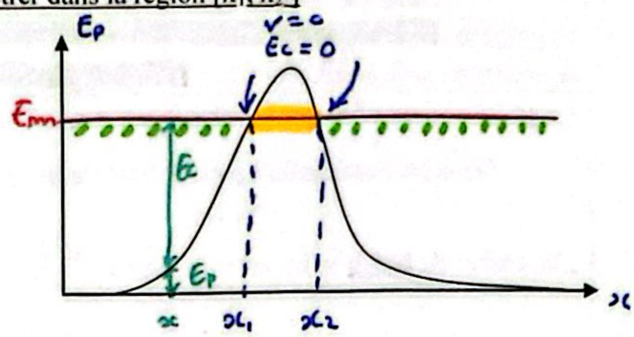
État lié, x ne peut pas tendre vers $+\infty$.

- Barrière de potentiel : La particule ne peut pas pénétrer dans la région [$x_1$, $x_2$]




↳ force répulsive entre 2 particules chargées de même signe.

$\boxed{\begin{array}{l} E_p \longrightarrow +\infty \\ MM_0 \rightarrow 0 \end{array}}$ cf IV




$x \in \, ]-\infty ; x_1]$ ou $[x_2, +\infty[$

si $E_m < E_{p\,max}$ ↳ État de diffusion

2.) Condition d'équilibre et de stabilité

Définition : Un point M est en équilibre dans un référentiel si sa vitesse est nulle à tout instant. ***

- $\forall t \quad \vec{v} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \vec{0}$
  LFD Rg gal. $\Rightarrow \sum \vec{F} = \vec{0}$
- Si $\sum \vec{F} = \vec{0}$
  LFD Rg gal $\Rightarrow m\vec{a} = \vec{0}$
  $\Rightarrow \vec{a} = \vec{0}$
  $\Rightarrow \vec{v} = \overrightarrow{cste}$.
  $\rightarrow$ il faut $\vec{v_0} = \vec{0}$.

***

| |
|---|
| Propriété : M(m) est en équilibre dans un référentiel $\Re_g$ galiléen si la résultante des forces $\vec{F}$ est nulle à tout instant et si la vitesse initiale est nulle. |

| |
|---|
| Définitions :<br>- Un point M est en équilibre stable si la force qui apparaît lorsqu'on l'écarte infiniment peu de sa position d'équilibre tend à l'y ramener.<br>- Dans le cas contraire, l'équilibre est dit instable.<br>- Si aucune force n'apparaît, l'équilibre est dit indifférent. Le point reste dans sa nouvelle position. |

Exemple : Charriot glissant sans frottements sur des montagnes russes.

Rg : galiléen

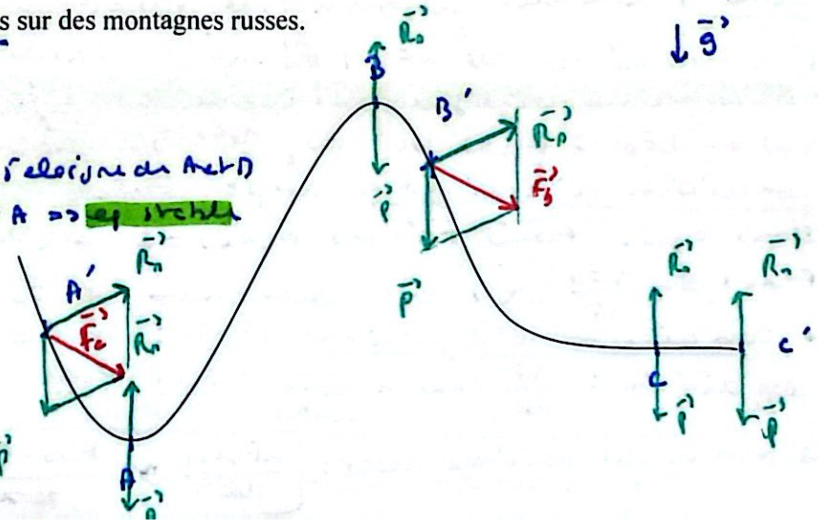
$\vec{P} + \vec{R_n} = \vec{0}$ en A, B et C

$\vec{F} = \vec{P} + \vec{R_n}$ apparait quand on s'éloigne de A et B

Pour $\vec{F_A'}$, tend à ramener A' en A => éq stable

$\vec{F_B'}$ '' éloigner B' de B

=> équilibre instable



### 3.) Cas particulier

Hypothèse : Point M soumis à une force $\vec{F} = F(x)\vec{e}_x$ conservative, dérivant d'une énergie potentielle Ep(x), se déplaçant suivant un axe (Ox), $\vec{F}$ étant la seule force qui travaille.

**Propriété :** Si un point E d'abscisse $x = x_e$ est une position d'équilibre, alors l'énergie potentielle Ep est extrémale en ce point : $\left(\dfrac{dEp}{dx}\right)(x = x_e) = 0$

L'équilibre est stable si Ep est minimale : $\left(\dfrac{d^2Ep}{dx^2}\right)(x = x_e) > 0$

L'équilibre est instable si Ep est maximale : $\left(\dfrac{d^2Ep}{dx^2}\right)(x = x_e) < 0$

L'équilibre est indifférent, si $\left(\dfrac{d^2Ep}{dx^2}\right)(x = x_e) = 0$

équilibre stable : min. local ***

$x$ au voisinage de $x_e$

| $x$ | | $x_e$ | |
|---|---|---|---|
| $E_p$ | ↘ | $E_p(x_e)$ | ↗ |
| $\frac{dE_p}{dt}$ | − | 0 | + |
| $\frac{d^2E_p}{dt^2}$ | | + | |

équilibre instable : max local de $E_p$.

| $x$ | | $x_e$ | |
|---|---|---|---|
| $E_p$ | ↗ | $E_p(x_e)$ | ↘ |
| $\frac{dE_p}{dt}$ | + | 0 | − |
| $\frac{dE_p^2}{dt^2}$ | | − | |

- démo : travail élémentaire $\delta W = \vec{F}\cdot\vec{dl}$ ) car $\vec{dl} = dx\,\vec{e_x} + dy\,\vec{e_y} + dz\,\vec{e_z}$

$\vec{F} = F(x)\,\vec{e_x} \Rightarrow \delta W = F(x)\,\vec{e_x}\cdot\vec{dl} = F(x)\,dx$

or $\vec{F}$ est conservative, elle dérive d'une énergie potentielle $E_p(x)$

$\delta W = -dE_p = F(x)\,dx \Rightarrow F(x) = -\dfrac{dE_p}{dx} \Rightarrow \dfrac{dF(x)}{dx} = -\dfrac{d^2E_p}{dt^2}$

- Condition d'équilibre au pt $E(x_e)$

Dans R gal. $\vec{F}(x_e) = \vec{0} \Rightarrow F(x_e) = 0$ or ($\vec{v_e} = \vec{0}$)

$F(x_e) = -\dfrac{dE_p}{dt}(x_e) = 0$ extremum de $E_p$

- Condition d'équilibre stable : on écarte légèrement M de sa position d'éq.

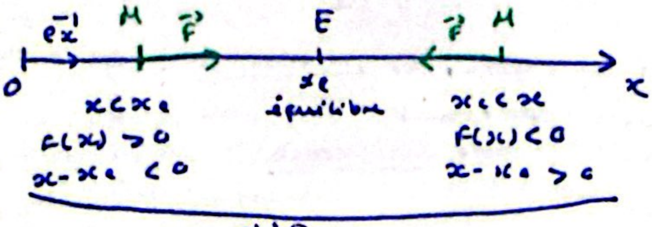
Def dérivée : $\dfrac{df}{dx}(x_e) = \lim\limits_{x \to x_e} \dfrac{F(x) - F(x_e)}{x - x_e}$

le pour $x$ au voisinage de $x_e$ : $\boxed{\dfrac{dF(x_e)}{dx} \simeq \dfrac{F(x) - F(x_e)}{x - x_e}} \Rightarrow F(x) \simeq F(x_e) + (x - x_e)\dfrac{dF(x_e)}{dt}$

$$\Rightarrow F(x) \simeq \underbrace{F(x_e)}_{=0 \text{ à l'éq.}} - (x - x_e)\, \frac{d^2E_p}{dt^2}(x_e)$$

$$f(x) \simeq -(x - x_e)\, \frac{d^2E_p}{dt^2}(x_e)$$

$$\vec{F}' = F(x)\, \vec{e_x}$$




$$\Rightarrow \frac{d^2E_p}{dt^2}(x_e) > 0.$$

4.) Définition générale de l'oscillateur harmonique

**Définition** : On appelle oscillateur harmonique à une dimension tout système à un degré de liberté dont l'équation du mouvement est de la forme : $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ quelle que soit la nature physique de la variable x.

**Propriété** : Un oscillateur se comporte comme un oscillateur harmonique pour de petites oscillations autour d'une position d'équilibre stable.

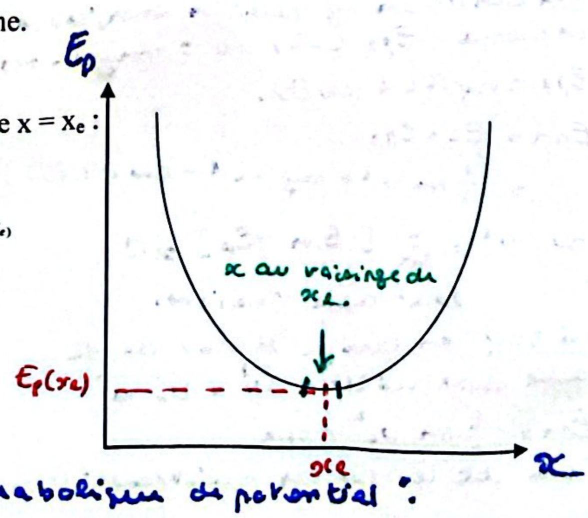
Hypothèse : Oscillateur à une dimension, dont la position est donnée par une seule coordonnée x, soumis à une force $\vec{F} = F(x)\vec{e}_x$ conservative, dérivant d'une énergie potentielle Ep(x), $\vec{F}$ étant la seule force qui travaille.

Soit $x_e$ correspondant à une position d'équilibre stable du système.

Expression de l'énergie potentielle :

Développement limité de Ep(x) au second ordre, au voisinage de $x = x_e$ :

$$Ep(x) \approx Ep(x_e) + (x - x_e)\left(\frac{dEp}{dx}\right)_{(x=x_e)} + \frac{(x - x_e)^2}{2}\left(\frac{d^2Ep}{dx^2}\right)_{(x=x_e)}$$




"puits paraboliques de potentiel".

Condition d'équilibre stable

$E_p$ maximale en $x_e$

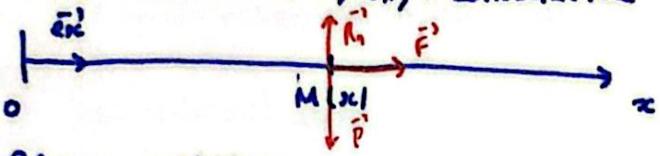
$$\begin{cases} \dfrac{d(E_p)}{dx}(x_e) = 0 \\ \dfrac{d^2E_p}{dx^2}(x_e) > 0 \end{cases}$$

$E_p(x) \simeq E_p(x_e) + \frac{1}{2} k (x - x_e)^2$

en posant $k = \dfrac{d^2E_p}{dx^2}(x_e) > 0$

$E_p$ est de forme parabolique $\cup$.

$M(x)$ soumis à $\vec{P}, \vec{R_n}, \vec{F}$ conservative




Rf supp galiléen :

Il y a conservation de Em.

$E_m = E_c + E_p(x) = cste$

$= \frac{1}{2} m v^2 + \underbrace{E_p(x)}_{\simeq}$

$\simeq \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + E_p(x_e) + \frac{1}{2} k (x - x_e)^2$.

$X = x - x_e$ donc $\dot{X} = \dot{x}$

$E_m \simeq \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + E_p(x_e) + \frac{1}{2} k (x - x_e)^2$

$\dfrac{dE_m}{dt} \simeq m \dot{x} \ddot{x} + \dfrac{dE_p}{dx}(x_e) + k \dot{x} (x - x_e)$

$\simeq \dot{x} (m \ddot{x} + k (x - x_e)) = 0$

car Em cst.

$\dot{X} = 0$ ou $\underline{m \ddot{x} + k(x - x_e) = 0}$

équa diff du mvmt

oscillateur harmonique de pulsation propre.

$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ où $k = \dfrac{d^2E_p}{dx^2}(x_e) > 0$.

[ Em : cste / temps => stationnaire

grandeur : cste / variables d'espace => uniforme ]

****

5.) Anneau sur un guide circulaire M(m) rayon R

Syst [anneau M(m)]   Bilan des forces : $-\vec{P} = m\vec{g}$   $-\vec{R_n} \perp$ support

Rf : terrestre galiléen

$R_n$ ne travaille pas donc seule P travaille et est conservative, elle dérive d'une Ep.

$E_{pp} = -mgx + cste$   $(\vec{e_x} \downarrow)$

$x = \overline{OH} = R\cos\theta$

on choisit un ref pour les energies potentielles

on prend $E_{pp}(\Omega) = 0$ : $-mgR + cste \Rightarrow cste = mgR$

$E_{pp} = mgR(1 - \cos\theta)$.

$E_m = E_c + E_{pp}$

$= \frac{1}{2} m v^2 + mgR(1 - \cos\theta)$

$\Rightarrow v^2 = \frac{2}{m} [E_m - E_p] \geq 0$

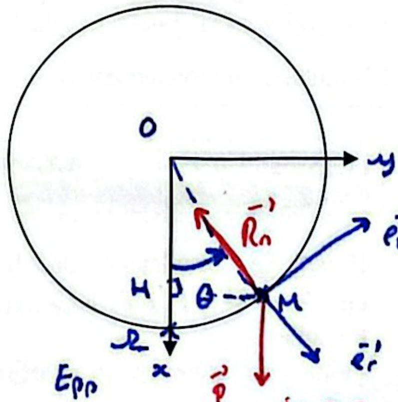
pour que v existe.

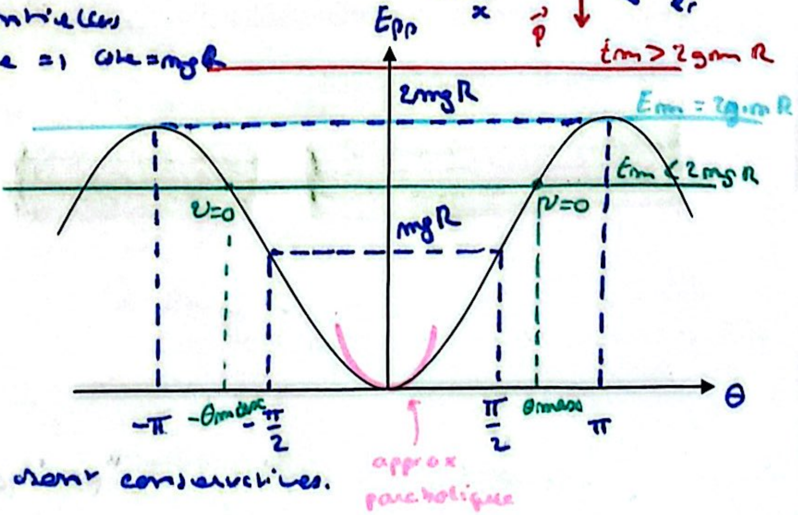
à $t=0$ on lance M(m) de $\Omega$

avec une vitesse $\vec{v_0} = v_0 \vec{e_y}$

$E_m = \frac{1}{2} m v_0^2 = cste$

car tt les forces qui travaillent sont conservatives.



$1^{er}$ cas : Si $E_m > 2mgR$

$\frac{1}{2} m v_0^2 > 2mgR$

$\Rightarrow v_0^2 > 4gR \Rightarrow v_0 > 2\sqrt{gR}$

Mouvement révolutif $\forall t, E_c \neq 0$
$v \neq 0$

Donc l'anneau une fois lancé ne s'arrête pas.

$2^{eme}$ cas : $E_m < 2mgR$ $\quad v_0 < 2\sqrt{gR}$

Mouvement oscillatoire pour $\theta = \pm \theta_{max}$, la vitesse s'annule $\quad \theta \in [-\theta_{max}, +\theta_{max}]$

$\theta_{max}$ tq : $E_c = 0 \Rightarrow E_m = E_{pp}$

$\Rightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 = mgR(1-\cos\theta_{max})$

$\Rightarrow \cos\theta_{max} = \frac{-v_0^2}{2gR} + 1$

$\Rightarrow \theta_{max} = \arccos\left(\frac{-v_0^2}{2Rg} + 1\right)$

$3^{eme}$ cas : $E_m = 2mgR$

L'anneau s'arrête en $\theta = \pi$, en équilibre instable, pour un temps incertain
↳ la moindre perturbation le fait repartir.

Rq : équation diff du mouvement

Energie mécanique : $E_m = E_c + E_p$

$E_m = \frac{1}{2} m v^2 + mgR(1-\cos\theta) = cste$

$\vec{OM} = R\vec{e_r} \qquad \vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e_\theta}$

$E_m = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 + mgR(1-\cos\theta) = cste$

$\frac{dE_m}{dt} = mR^2\ddot{\theta}\dot{\theta} + mgR\dot{\theta}\sin\theta = 0$

$\Rightarrow \dot{\theta} = 0$ ou $mR^2\ddot{\theta} + mgR\sin\theta = 0$

Pour de petites oscillations : $\sin\theta \simeq \theta$.

$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{R}\theta \simeq 0 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R}}$

oscillateur harmonique

Petites oscillations autour d'une pos. d'équilibre stable : $\mathcal{R}(\theta = 0)$.

$E_{pp} = mgR(1-\cos\theta)$

$\simeq mgR\left(1 - \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)\right)$ $\underline{DL_2}$

$\simeq mgR\left(\frac{\theta^2}{2}\right)$ forme parabolique autour de $\theta = 0$

## V Gradient d'énergie potentielle. Lien avec une force conservative.

### 1.) Définitions

| |
|---|
| **Définition** : Le gradient de l'énergie potentielle Ep, noté $\overrightarrow{grad}Ep$, est le vecteur tel que la variation de Ep lors d'un déplacement élémentaire $\overrightarrow{dl}$ s'écrit $dEp = \overrightarrow{grad}Ep.\overrightarrow{dl}$. <br><br> **Propriété** : Si une force conservative dérive d'une énergie potentielle Ep, on a alors : $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}Ep$ |

Remarque : Le vecteur $\overrightarrow{grad}\ Ep$ est orienté dans le sens où Ep croît le plus rapidement.

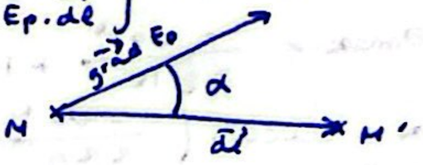
dem $\vec F = -\overrightarrow{grad} E_p$

force conservative : $\delta W = \vec F \cdot \vec{dl} = -dE_p$

df : $dE_p = \overrightarrow{grad} E_p \cdot \vec{dl} \Rightarrow \delta W = \vec F \cdot \vec{dl} = -\overrightarrow{grad} E_p \cdot \vec{dl}$ $\Big\} \Rightarrow \vec F = -\overrightarrow{grad} E_p$

cf p.10 à 1 dim : $F(x) = -\frac{dE_p}{dx}$

$dE_p = \overrightarrow{grad} E_p \cdot \vec{dl} = \|\overrightarrow{grad} E_p\| \cdot \|\vec{dl}\| \cos\alpha$




- si $\overrightarrow{grad} E_p \perp \vec{dl}$, on aura $dE_p = 0 \Leftrightarrow E_p =$ cste
  $\overrightarrow{grad} E_p$ est $\perp$ aux surfaces tq $E_p =$ cste
- Si $\overrightarrow{grad} E_p \rightrightarrows \vec{dl}$, $dE_p = \|\overrightarrow{grad} E_p\| \|\vec{dl}\|$
  on a alors $dE_p$ max. Ep ↗ ds le sens de $\overrightarrow{grad} E_p$.

∂ : "d rond"

$M(x, y, z) \rightarrow M(x+dx, y+dy, z+dz)$

| |
|---|
| En coordonnées cartésiennes, on a Ep(x,y,z) <br> La différentielle de Ep est la variation élémentaire de Ep associée à un déplacement élémentaire du point M : <br> dEp=Ep(x+dx, y+dy, z+dz)-Ep(x,y,z) (*) $dEp = \frac{\partial E_p}{\partial x}\Big)_{y,z} dx + \frac{\partial E_p}{\partial y}\Big)_{x,z} dy + \frac{\partial E_p}{\partial z}\Big)_{x,y} dz$ |

$\frac{\partial E_p}{\partial x}\Big)_{y,z}$ d rond Ep sur d rond x à y, z constants
→ dérivée partielle de Ep par rapport à x.
on dérive Ep/x, on supposant y, z constant.

on fait varier uniquement x, donc
$y =$ cste $\Rightarrow dy = 0$ $\quad z =$ cste $\Rightarrow dz = 0$

$dE_p = \frac{\partial E_p}{\partial x}\Big)_{y,z} dx \Rightarrow \frac{dE_p}{dx} = \frac{\partial E_p}{\partial x}\Big)_{y,z}$

dEp est obtenu en faisant varier chaque variable séparément et en faisant la somme des variations.

| |
|---|
| En coordonnées cartésiennes, $\overrightarrow{dl} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z$ <br> donc $\overrightarrow{grad}Ep = \frac{\partial E_p}{\partial x}\Big)_{y,z}\vec{e}_x + \frac{\partial E_p}{\partial y}\Big)_{x,z}\vec{e}_y + \frac{\partial E_p}{\partial z}\Big)_{x,y}\vec{e}_z$ |

dém :
$dE_p = \overrightarrow{grad}\ E_p \cdot \vec{dl}$
$= grad\ E_{px}\, dx + grad\ E_{py}\, dy + grad\ E_{pz}\, dz$

on identifie ds (*)

$$\begin{cases} grad\ E_{px} = \frac{\partial E_p}{\partial x}\Big)_{y,z} \\ grad\ E_{py} = \frac{\partial E_p}{\partial y}\Big)_{x,z} \\ grad\ E_{pz} = \frac{\partial E_p}{\partial z}\Big)_{x,y} \end{cases}$$

Remarque : L'expression du gradient sera fournie dans les autres systèmes de coordonnées.

| | |
|---|---|
| En coordonnées cylindriques | $\overrightarrow{grad}Ep = \frac{\partial E_p}{\partial r}\Big)_{\theta,z}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial E_p}{\partial \theta}\Big)_{r,z}\vec{e}_\theta + \frac{\partial E_p}{\partial z}\Big)_{r,\theta}\vec{e}_z$ |
| En coordonnées sphériques | $\overrightarrow{grad}Ep = \frac{\partial E_p}{\partial r}\Big)_{\theta,\varphi}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial E_p}{\partial \theta}\Big)_{r,\varphi}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial E_p}{\partial \varphi}\Big)_{r,\theta}\vec{e}_\varphi$ |

## 2.) Exemples

* Poids : $\vec{P} = m\vec{g}$

$E_{pp} = mgz + cste$ $\quad \uparrow \vec{e}_z$

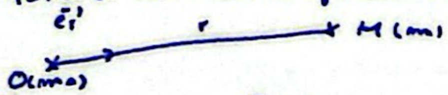
$\overrightarrow{grad}\, E_p = \frac{\partial E_p}{dz}\Big)_{x,y}\vec{e}_z = \frac{dE_p}{dz}\vec{e}_z$

$= mg\,\vec{e}_z$

$\vec{P} = -\overrightarrow{grad}\, E_{pp}$ $\quad \downarrow \vec{g} \quad \uparrow \vec{e}_z$

$= -mg\,\vec{e}_z$

* Force d'interaction gravitationelle




$\vec{F}_{m_0 \to m} = -\frac{G m m_0}{r^2}\vec{e}_r$

$\delta W = \vec{F}_{m_0 \to m} \cdot \vec{dl}$ travail élémentaire

$\vec{dl} = dr.\,\vec{e}_r + \ldots$ coordonnées sphériques.

$\delta W = -\frac{G m_0 m}{r^2}(\vec{e}_r \cdot \vec{dl})$

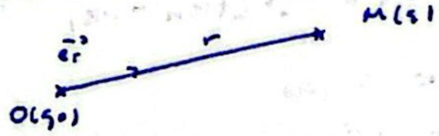
$= -\frac{G m_0 m}{r^2}dr.$ $\quad \int$ intégration de $\frac{dr}{r^2}$

$= d\left(\frac{G m_0 m}{r}\right) = -dE_p$

où $E_p = -\frac{G m_0 m}{r} + cste.$

la energie potentielle d'interaction gravitationelle (MCG)

* Force d'interaction électrostatique




$\vec{F}_{q_0 \to q} = \frac{1}{4\varepsilon_0}\frac{q_0 q}{r^2}\vec{e}_r$

$\Rightarrow E_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0 q}{r} + cste$

## VI. Méthode d'Euler appliquée à un oscillateur d'ordre 2

### 1.) Principe

Pour l'équation différentielle du pendule simple : avec frottements

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\alpha}{m}\frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{\ell}sin\theta = 0 \qquad \text{soit} \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\xi\omega_0\frac{d\theta}{dt} + {\omega_0}^2 sin\theta = 0$$

(1) ↳ 3ème forme canonique

$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{\alpha}{m} = 2\xi\omega_0 \Rightarrow Q = \frac{1}{2\xi}$

(1) $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -2\xi\omega_0\frac{d\theta}{dt} - \omega_0^2 \sin\theta$

$\frac{d\theta_k}{dt} = \frac{\theta_{k+1} - \theta_k}{t_{k+1} - t_k}$

$\Rightarrow \theta_{k+1} = \theta_k + \frac{d\theta_k}{dt}(t_{k+1} - t_k)$

$h = t_{k+1} - t_k$ : pas

$\theta_{k+1} = \theta_k + \dot{\theta}_k h$

$\frac{d^2\theta_k}{dt^2} = \frac{\dot{\theta}_{k+1} - \dot{\theta}_k}{t_{k+1} - t_k}$

$\Rightarrow \dot{\theta}_{k+1} = \dot{\theta}_k + h\ddot{\theta}_k$ (1) D

$\Rightarrow \dot{\theta}_{k+1} = \dot{\theta}_k + h(-2\xi\omega_0\dot{\theta}_k - \omega_0^2 \sin\theta_k)$

Pour le script : $\xi$ = ksi

- $\theta$ noté x
- $\dot{\theta}$ noté v
- $\ddot{\theta}$ noté a

$t_{k+1} = h + t_k$

$x_{k+1} = x_k + h v_k$

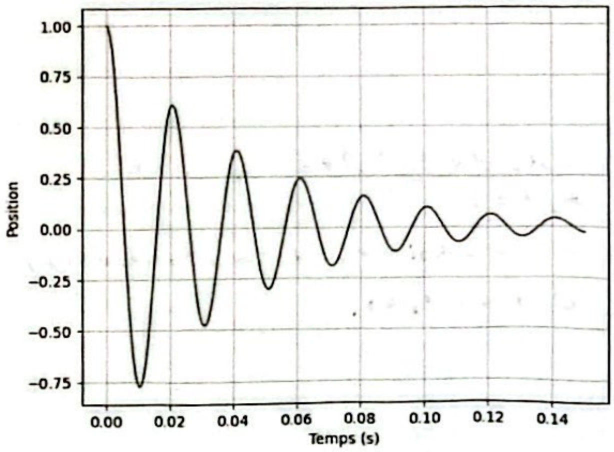
$v_{k+1} = v_k + h a_k$

$= v_k + h(-2\,ksi\,w_0 v_k - w_0^2 \sin x_k)$

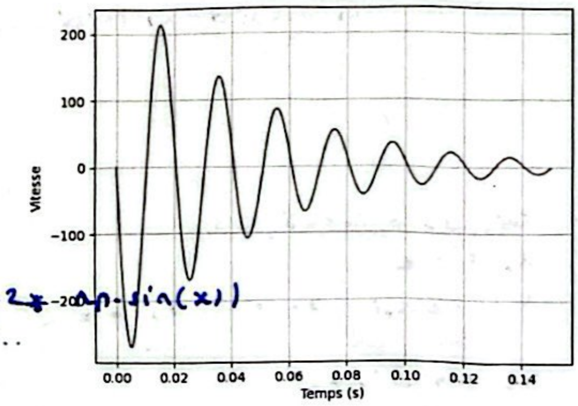
$a_k = F(x_k, v_k) = -2\,ksi\,w_0 v_k - w_0^2 \sin x_k$
obtenue à partir de l'équa diff.

2.) Mise en œuvre à connaître

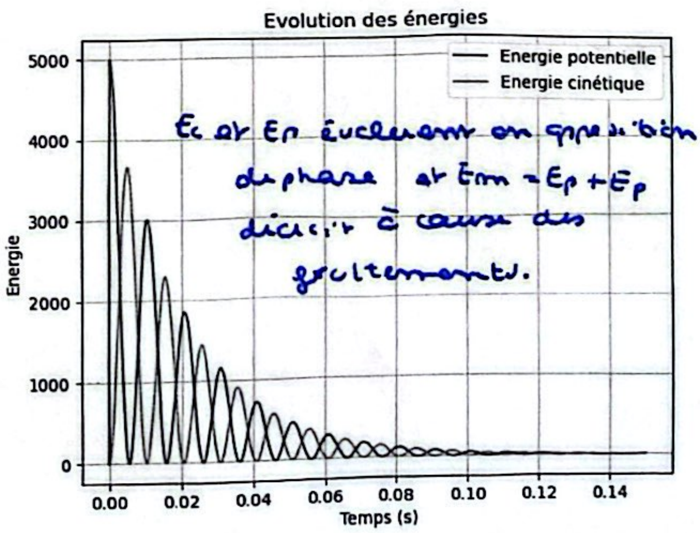
Dans le script, Θ est noté x, $\dot{\theta}$ est noté v.



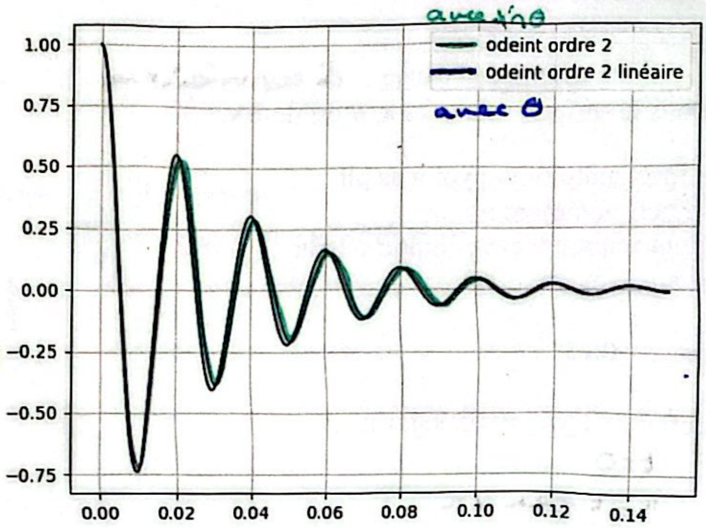

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
from scipy import fftpack

tmax = 0.15

def ordre2_euler(w0, ksi, n):
    t=0
    h=tmax/n
    x=1
    v=0

    les_t=[]
    les_v=[]
    les_x=[]
    for i in range(n):
        t=t+h
        x=x+h*v
        v=v+h*(-2*ksi*w0*v-w0**2*np.sin(x))
    # à faire en triple affectation t, x, v = .....
        les_t.append(t)
        les_x.append(x)
        les_v.append(v)
    return(les_t, les_x, les_v).
```




```
n = 1000
les_t, les_x, les_v = ordre2_euler(316,0.095,n) #valeur des coefficients#
  plt.plot(les_t, les_x )
plt.xlabel("Temps (s)")
plt.ylabel("Position")
plt.grid(True)

plt.figure()
plt.plot(les_t, les_v,)
plt.xlabel("Temps (s)")
plt.ylabel("Vitesse")
plt.grid(True)
les_Ep = [0.5*x**2/1e-4 for x in les_x]
les_Ec= [0.5*v**2*0.1 for v in les_v]

plt.figure()
plt.title("Evolution des énergies")
plt.plot(les_t, les_Ep,label="Energie potentielle" )
plt.xlabel("Temps (s)")
plt.ylabel("Energie")

plt.plot(les_t, les_Ec,label="Energie cinétique" )
plt.xlabel("Temps (s)")
plt.grid(True)
```




Ec et Ep évoluent en opposition de phase et Em = Ep + Ep décroit à cause des frottements.




```
plt.legend()

##Résolution avec odeint

def F(z, t):
    ksi, wo = 0.095 , 316
    x, v = z        #affectation des CI
    a = -2ksi wo v - wo 2.np.sin(x)
    return (v, a).

les_t = np.linspace(0, tmax, 1000)
sol = odeint(F, (1,0), les_t)
                  les conditions initiales
#sol donne un tableau numpy.
#un element du tableau est formée d'une liste comprenant une position et une vitesse
#c'est la premiere colonne qui nous intéresse, on la recupere via la commande sol[:, 0]

def F1(z, t):
    ksi, wo = 0.095, 316
    x, v = z
    a = -2ksi wo v - wo **2 *x
    # pour de petites oscillations
    return (v, a)


sol1 = odeint(F1, (1,0), les_t)

plt.figure()
les_x = sol[:, 0]
plt.plot(les_t, les_x, 'r', label = 'odeint ordre 2')

les_x1 = sol1[:, 0]
plt.plot(les_t, les_x1, 'b', label = 'odeint ordre 2 linéaire')
plt.grid()
plt.legend()
plt.show()
```