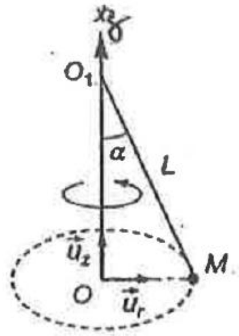
TD MC5 Loi du moment cinétique

Exercice n°1 : Pendule conique



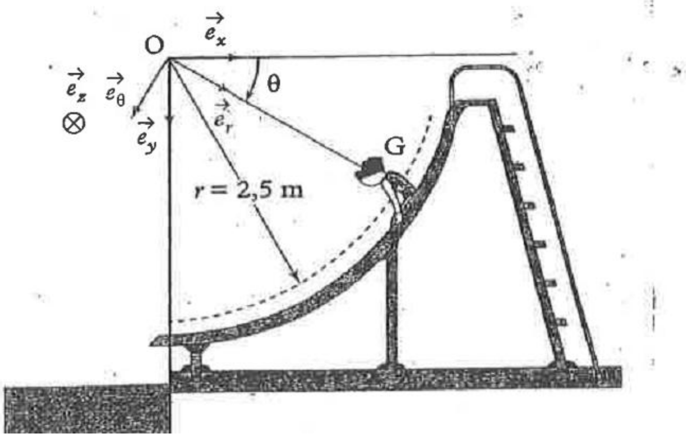
Un point matériel M (de masse m) est suspendu à un fil inextensible (de masse négligeable, de longueur L) attaché à un point O_1 fixe d'un axe Oz. Le point matériel M est astreint à tourner autour d'un axe Oz à la vitesse angulaire constante ω, dans le référentiel galiléen d'étude (Ox, Oy, Oz).

1) Exprimer le moment cinétique $\vec{L}_{O1}$, calculé en O_1, du point M, en utilisant la base cylindrique $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ telle que $\overrightarrow{OM} = R\vec{u}_r$. On suppose R constant.

2) Appliquer le théorème du moment cinétique en O_1 et en déduire l'angle d'inclinaison constant α du pendule avec l'axe Oz en fonction de L, ω et du champ de pesanteur g.

Exercice n°2 : Toboggan

Un enfant assimilé à un point matériel G de masse $m = 40$ kg glisse sur un toboggan décrivant une trajectoire circulaire de rayon $r = 2{,}5$ m (voir figure) depuis la position $\theta = \theta_0 = 15°$ où il possède une vitesse nulle jusqu'à la position $\theta = 90°$ où il quitte le toboggan. On néglige tous les frottements. On suppose que le référentiel lié à la Terre $\mathcal{R}_g(O\ ;\ \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est galiléen.



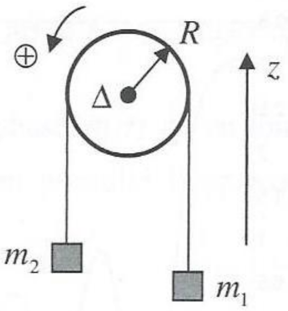
1) Établir l'équation différentielle du mouvement de l'enfant à l'aide du TMC.

2) En déduire l'expression de la vitesse v de l'enfant en fonction de θ.

Calculer la vitesse maximale atteinte par l'enfant. Commenter cette valeur.

Exercice n°3 : Poulie

Deux masses m_1 et m_2 sont reliées par un fil passant sur une poulie dont le moment d'inertie par rapport à son axe Δ est J_Δ ; il s'agit d'étudier le mouvement dans le champ de pesanteur (l'axe z est suivant la verticale ascendante).



a) Examiner soigneusement les conséquences de chaque terme de la phrase « le fil est sans masse, inextensible, sans raideur et ne glisse pas sur la poulie ». Que peut-on déduire en plus si la poulie est « sans masse » ?

Sans faire cette dernière hypothèse, déterminer « l'accélération » du système lâché avec une vitesse initiale nulle : $\frac{d\omega}{dt}$

b) En considérant séparément chacune des masses et la poulie, en introduisant les tensions des fils et en appliquant les lois générales de la mécanique.

c) En considérant l'ensemble du système et en appliquant une méthode énergétique.

Exercice n°4 : Etude d'un moteur

On s'intéresse au fonctionnement d'une machine comportant une pièce tournante (par exemple une perceuse). Le *rotor*, partie tournante du moteur, entraîne la partie tournante utile de la machine grâce à un arbre de transmission. L'axe de rotation est noté $\vec{u}_x$ (Fig. 5). La vitesse angulaire de rotation du rotor autour de $\vec{u}_x$ est notée ω, avec $\omega \geqslant 0$.

Etude dynamique :

La partie fixe du moteur (*stator*) entraîne le rotor en exerçant sur lui un couple (souvent de nature électromagnétique) dont la valeur en projection sur $\vec{u}_x$ est $\mathcal{M}_s > 0$.

a) En déduire le signe du couple $\mathcal{M}_u$ exercé par la partie utile tournante sur le rotor.

b) Souvent, l'ensemble est plongé dans un fluide visqueux (huile) dont l'action sur le rotor se ramène à un couple $\mathcal{M}_f = -\alpha\omega$. On suppose que les actions de contact des différentes pièces entre elles sont parfaites, de telle sorte que leur moment projeté sur $\vec{u}_x$, noté $\mathcal{M}_c$, est nul (c'est ce qu'on appellera une liaison pivot parfaite). On note J le moment d'inertie du rotor autour de l'axe de rotation. En déduire l'équation différentielle satisfaite par $\omega(t)$.

c) En supposant que les couples $\mathcal{M}_s$ et $\mathcal{M}_u$ sont à peu près constants dès la mise en rotation du rotor, trouver l'évolution de $\omega(t)$ sachant qu'on met le moteur en marche à $t = 0$.

d) En déduire la vitesse angulaire de fonctionnement en régime permanent. Dépend-elle des frottements du fluide ? Ces derniers ont-ils une autre influence ? Que dire des valeurs relatives des couples $\mathcal{M}_s$ et $\mathcal{M}_u$?

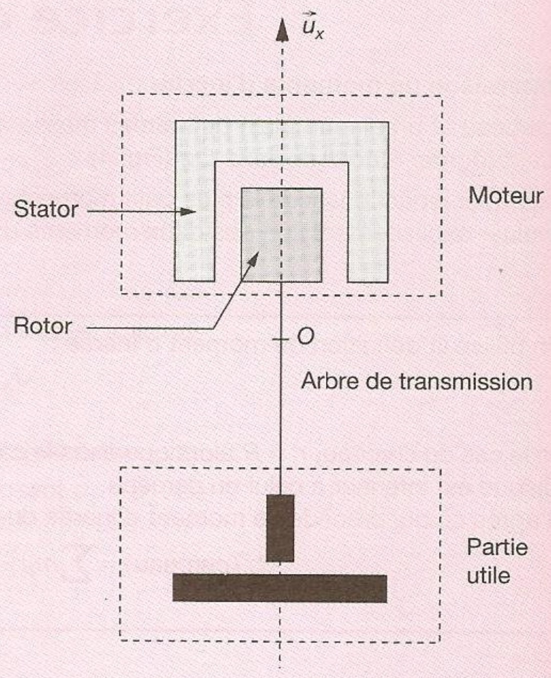


Figure 5

Etude énergétique

e) De combien de variables dépend l'état du système ?

f) En déduire l'équation différentielle satisfaite par ω (t) en appliquant le théorème de la puissance cinétique.

g) Que devient la puissance fournie par le stator en régime permanent ? Définir le rendement du moteur.