Mécanique MC5 Loi du moment cinétique.
Mouvement d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

Produit scalaire w= $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos\alpha$

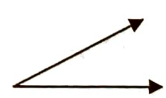
$\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ $\vec{u}.\vec{v} = 0$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont perpendiculaires.

Produit vectoriel $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ tel que :

$\vec{w}$ est perpendiculaire au plan formé par $\vec{u}, \vec{v}$ $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est un trièdre direct.

$\|\vec{w}\| = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.|\sin\alpha|$

$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$ $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

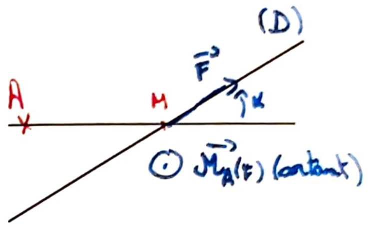


$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ -x_1 z_2 + z_1 x_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix}$$

I Moment d'une force

1.) Point matériel

a) Moment au point A d'une force $\vec{F}$ appliquée au point M : $\vec{M}_A(\vec{F}) = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}$



$\|\vec{M}_A(\vec{F})\| = \|\overrightarrow{AM}\| \|\vec{F}\| |\sin\alpha|$

N.m $= kg.m^2.s^{-2} = J$

$\vec{M}_A(\vec{F}) \perp \overrightarrow{AM}$ et $\vec{M}_A \perp \vec{F}$

$\vec{M}_A \perp$ plan $(\overrightarrow{AM}, \vec{F})$

$\vec{M}_A(\vec{F}) = \vec{0}$ si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{F}$ sont colinéaires ($\sin = 0$)

b) Moment d'une force $\vec{F}$ appliquée au point M, par rapport à un axe Δ :

***

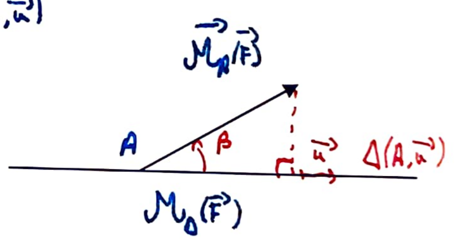
Définition :	Soit un axe Δ passant par A, de vecteur unitaire $\vec{u}$: $M_\Delta(\vec{F}) = \vec{M}_A(\vec{F}).\vec{u} = \| \vec{M}_A(\vec{F}) \|. \cos(\vec{u}, \vec{M}_A)$
Propriétés :	$\vec{M}_A(\vec{F}).\vec{u} = \vec{u}.\vec{M}_A(\vec{F})$ $\quad$ $M_\Delta(\vec{F})$ a même valeur en tout point de l'axe Δ.

$M_\Delta(\vec{F})$ est la project° orthogonale de $\vec{M}_A(\vec{F})$ sur l'axe $\Delta(A, \vec{u})$

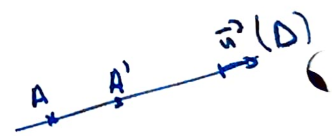
⚠ $\|\vec{u}\| = 1$ car $\vec{u}$ vecteur unitaire.

Le produit scalaire est commutatif.

$\boxed{\text{si } \vec{M}_A(\vec{F}) \perp \vec{u},\ M_\Delta(\vec{F}) = 0}$ car $\cos\beta = 0$



Mq M_Δ a m̂ valeur en tout pt de l'axe Δ.



$\vec{M}_A(\vec{F}) = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}$

$\vec{M}_{A'}(\vec{F}) = \overrightarrow{A'M} \wedge \vec{F}$

$\vec{M}_A(\vec{F}).\vec{u} - \vec{M}_{A'}(\vec{F}).\vec{u} = (\overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}).\vec{u} + (\overrightarrow{MA'} \wedge \vec{F}).\vec{u}$

$= (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MA'}) \wedge \vec{F}.\vec{u}$

$= (\overrightarrow{AA'} \wedge \vec{F}).\vec{u}$

$\overrightarrow{AA'}$ est colinéaire à $\vec{u}$. $\overrightarrow{AA'} = k\vec{u}$

Donc $\vec{M}_A(\vec{F}).\vec{u} - \vec{M}_{A'}(\vec{F}).\vec{u}$

$= \underbrace{(k\vec{u} \wedge \vec{F})}_{\perp k\vec{u}}.\vec{u}$

$= 0$

$\vec{M}_A(\vec{F}).\vec{u} = \vec{M}_{A'}(\vec{F}).\vec{u} = M_\Delta(\vec{F})$

indépendant du pt choisi sur Δ $\quad$ ~~**~~ colle.

On peut bien parler de moment / axe Δ

<u>Propriétés :</u> Si (D) et (Δ) sont coplanaires, alors $M_\Delta(\vec{F}) = 0$.
1) Si D (droite support de $\vec{F}$, passant par M), coupe Δ (passant par A, de vecteur unitaire $\vec{u}$) en un point I , alors $M_\Delta(\vec{F}) = 0$.
2) Si (D) // (Δ), alors $M_\Delta(\vec{F}) = 0$.

démo 1. $\mathcal{M}_\Delta(\vec F) = \vec{\mathcal{M}}_A(\vec F)\cdot\vec u$

$= (\vec{AM}\wedge\vec F)\cdot\vec u$

$\mathcal{M}_\Delta$ est indépendant du pt sur Δ

$\mathcal{M}_\Delta(\vec F) = (\vec{IM}\wedge\vec F)\cdot\vec u$

$\vec F$ et $\vec{IM}$ sont colinéaires

$\Rightarrow \vec{IM}\wedge\vec F = \vec 0$

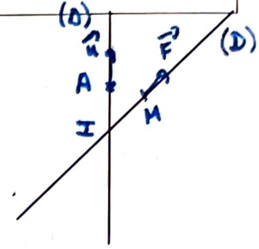
$\Rightarrow \mathcal{M}_\Delta(\vec F) = 0$

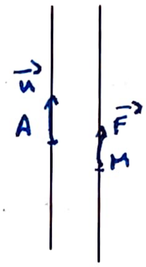
démo 2.

$\mathcal{M}_\Delta(\vec F) = \underbrace{(\vec{AM}\wedge\vec F)}_{\perp \vec F \text{ donc } \perp \vec u}\cdot\vec u$

car $\vec u$ et $\vec F$ sont colinéaires

$\Rightarrow \mathcal{M}_\Delta(\vec F) = 0$





<u>c) Application</u>
<u>Propriété</u> : $M_\Delta(\vec{F}) = \pm d.F$ où d est le bras de levier (distance à l'axe).

$\mathcal{M}_\Delta(\vec F) = (\vec{AM}\wedge\vec F)\cdot\vec u$

H proj orth de A sur (D)

$\mathcal{M}_\Delta(\vec F) = ((\vec{AH}+\vec{HM})\wedge\vec F)\cdot\vec u$

$= (\vec{AH}\wedge\vec F)\cdot\vec u + \underbrace{(\vec{HM}\wedge\vec F)\cdot\vec u}_{=0}$

car $\vec{HM}$ et $\vec F$ sont colinéaires.

$\mathcal{M}_\Delta(\vec F) = (\vec{AH}\wedge\vec F)\cdot\vec u$

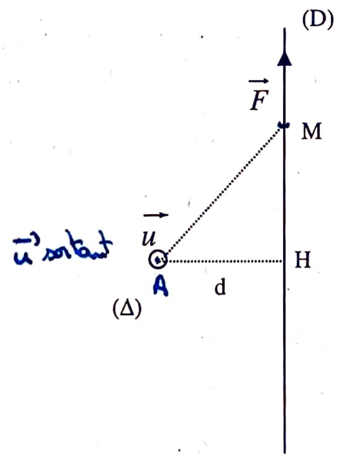
$\mathcal{M}_\Delta(\vec F) = \|\vec{AM}\|\|\vec F\|$

car $\vec{\mathcal{M}}_A(\vec F)$ et $\vec u$ sont colinéaires

et de m sens (cas du dessin)

de façon + générale, $\mathcal{M}_\Delta(\vec F) = \pm\|\vec{AM}\|\|\vec F\|$

suivant l'orientat° de Δ.



Pour augmenter $|\mathcal{M}_\Delta(\vec F)|$, il faut à force égale, augmenter le bras du leviers

Pour augmenter le bras de levier : on utilise 1 grande croix plutôt qu'1 petite manivelle, pour augmenter la distance entre l'axe de rotat° de la vis et le pt d'applicat° de la force.
de m, on place la poignée de la porte le + loin possible de l'axe de rotat°

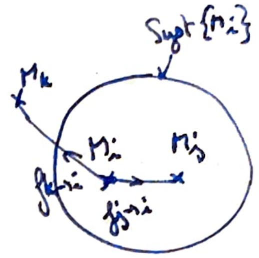
Ces résultats s'appliquent à une force quelconque en la décomposant en une force coplanaire et une force non coplanaire à Δ : $\vec{F} = \vec{F}_{//} + \vec{F}_\perp$. On a alors $M_\Delta(\vec{F}) = \pm d.F_\perp$.

2.) Système de points matériels Syst = {M_i (m_i)}

a) Moments intérieurs et extérieurs

Moment résultant des forces intérieures au système au point A : $\vec{M}_{A,int} = \sum_i \vec{M}_A(\vec{f}_{i,int}) = \vec{0}$

Moment résultant des forces extérieures au système au point A : $\vec{M}_{A,ext} = \sum_i \vec{M}_A(\vec{f}_{i,ext})$



Le pt $M_i \in$ Syst est soumis à des forces int. étant exercées par des M_j et M_k

Pour M_i, $\vec{f}_{i\,int} = \sum_{\substack{M_j \in S \\ j \neq i}} \vec{f}_{j\to i}$

Moment au pt A de $\vec{f}_{i\,int}$.

$\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{f}_{i\,int}) = \vec{AM_i} \wedge \vec{f}_{i\,int}$.

Moment résultant des forces int s'exerçant sur (S)

$$\vec{\mathcal{M}}_{A\,int} = \sum_i \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{f}_{i\,int})$$
$$= \sum_i \vec{AM_i} \wedge \vec{f}_{i\,int}$$
$$= \sum_i \vec{AM_i} \wedge \sum_{j\neq i} \vec{f}_{j\to i}$$
$$= \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{AM_i} \wedge \vec{f}_{j\to i}$$

Dans la somme, les termes s'annulent 2 à 2 : $\vec{AM_i} \wedge \vec{f}_{j\to i} + \vec{AM_j} \wedge \vec{f}_{i\to j}$

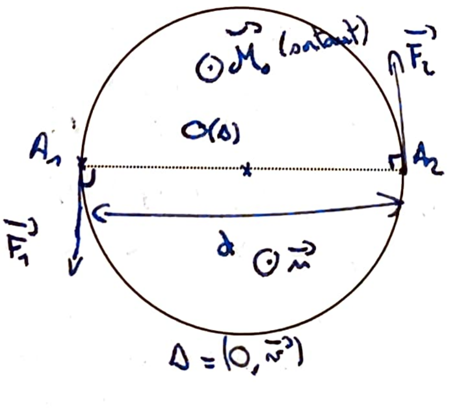
$$= \vec{AM_i} \wedge \vec{f}_{j\to i} + \vec{AM_j} \wedge (-\vec{f}_{j\to i})$$
$$= \vec{AM_i} \wedge \vec{f}_{j\to i} - \vec{AM_j} \wedge \vec{f}_{j\to i}$$
$$= \vec{AM_i} \wedge \vec{f}_{j\to i} + \vec{M_jA} \wedge \vec{f}_{j\to i}$$
$$= (\vec{AM_i} + \vec{M_jA}) \wedge \vec{f}_{j\to i}$$
$$= \vec{M_jM_i} \wedge \vec{f}_{j\to i}$$
$$= \vec{0}$$

car ils sont colinéaires (principe d'interact°)

b) Notion de couple

Couple : Action menée sur un système, telle que la force résultante soit nulle;
Un couple ne déplace pas le centre d'inertie d'un système, mais tend à le faire tourner.

Le volant :



Couple de forces $(\vec{F_1}, \vec{F_2})$ tq $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} = \vec{0}$

$$\vec{\mathcal{M}}_0 = \vec{\mathcal{M}}_0(\vec{F_1}) + \vec{\mathcal{M}}_0(\vec{F_2})$$
$$= \vec{OA_1} \wedge \vec{F_1} + \vec{OA_2} \wedge \vec{F_2}$$
$$= \vec{OA_1} \wedge \vec{F_1} - \vec{OA_2} \wedge \vec{F_1}$$
$$= (\vec{OA_1} + \vec{A_2O}) \wedge \vec{F_1}$$
$$= \vec{A_2A_1} \wedge \vec{F_1}$$

$\vec{\mathcal{M}}_0 = d . \|\vec{F_1}\| \vec{u}$ (cas du dessin)

$\boxed{\vec{\mathcal{M}}_0 = \vec{\Gamma}}$ = Couple indépendant de la position de O sur $[A_1A_2]$

c) Liaison pivot : Mécanisme ne laissant à un solide qu'un seul degré de liberté en rotation autour d'un axe Δ. On n'a donc pas de translation suivant Δ.

Liaison pivot idéale : M_Δ(liaison) = 0. On néglige les frottements (en utilisant des roulements à bille ou à aiguille).

$\vec{R_N} \perp$ surface de contact entre le stator et le rotor

(D) droite support de $\vec{R_N}$.

(Δ) axe de rotat° du rotor $\Delta = (Oz)$

Si (D) et (Δ) ont un pt d'intersect°, $\mathcal{M}_\Delta(\vec{R_N}) = 0$

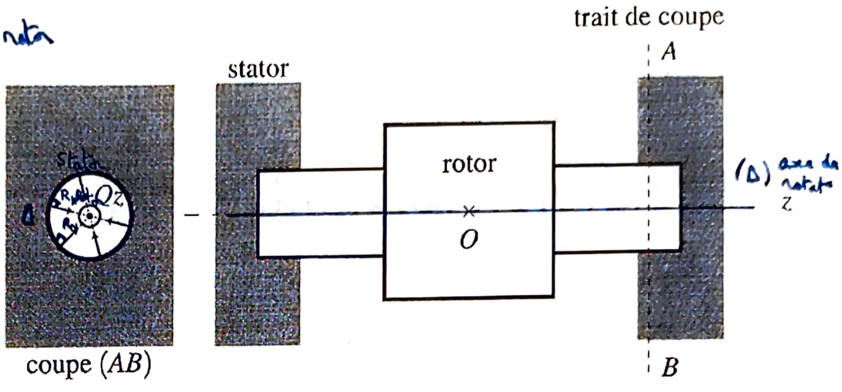


Figure 19.7 – Schéma de principe d'une liaison pivot.

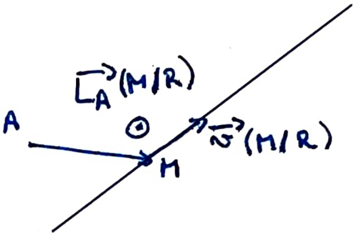
II Moment cinétique

1.) Définition

a) pour un point matériel

Moment cinétique au point A du point matériel M(m) de vitesse $\vec{v}(M\ /\mathfrak{R})$

$\vec{L}_A(M/\mathfrak{R}) = \overrightarrow{AM} \wedge m\vec{v}(M/\mathfrak{R})$ $= \vec{AM} \wedge \vec{p}(M/R)$



Moment cinétique par rapport à l'axe Δ (passant par A, de vecteur unitaire) $\vec{u}$: $L_\Delta(M/\mathfrak{R}) = \vec{L}_A(M).\vec{u}$

Projecte° de $\vec{L_A}(M)$ sur l'axe $\Delta = (A, \vec{u})$

Propriété : $L_\Delta(M)$ a même valeur en tout point de l'axe Δ. Même démo que pour $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F})$

Propriétés :	Si D (droite support de $\vec{v}$, passant par M), passe par A, alors $\vec{L}_A(M) = \vec{0}$. Si D (droite support de $\vec{v}$ passant par M), coupe Δ (passant par A, de vecteur unitaire $\vec{u}$) ou si (D) // (Δ), c'est-à-dire si (D) et (Δ) sont coplanaires, alors $L_\Delta(M) = 0$.

b) pour un système de points matériels Syst = {M_i (m_i)}:

$$\vec{L}_A(Syst/\mathfrak{R}) = \sum_i \vec{L}_A(M_i/\mathfrak{R}) = \sum_i \overrightarrow{AM}_i \wedge m_i\vec{v}(M_i/\mathfrak{R})$$