PROGRAMMES 19 et 20.

PROGRAMME 19 : du 10/03 au 14/03

Reprise du calcul matriciel

Espaces vectoriels

Dans tout le chapitre, K est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- ★ Structure de K-espace vectoriel. Premiers exemples de référence : K^n, $K^X = \mathcal{F}(X,K)$ (cas particulier des suites) et $\mathcal{M}_{n,p}(K)$. Combinaisons linéaires d'un nombre fini de vecteurs. Règles de calcul.
- ★ Sous-espace F d'un K-espace vectoriel E ($F \subset E, F \neq \varnothing$, F stable par combinaison linéaire). L'ensemble des combinaisons linéaires de n vecteurs $u_1, \ldots, u_n$ est un sev de E et est appelé sous-espace engendré par $u_1, \ldots, u_n$. Notation $\text{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$. Intersection de sous-espaces vectoriels.
- ★ Somme de deux sous-espaces vectoriels. Notation $F+G$. Somme directe (la somme est dite directe lorsque la décomposition selon $F+G$ est unique). Notation $F \oplus G$. Caractérisation par $F \cap G = \{0_E\}$. Sous-espaces supplémentaires. $E = F \oplus G \iff \forall u \in E, \exists\,!(v,w) \in F \times G, u = v + w$.
- ★ Applications linéaires : définition, endomorphismes, formes linéaires, isomorphismes, automorphismes. Opérations et règles de calcul sur les applications linéaires : combinaison linéaire, composée. Notations $\mathcal{L}(E,F)$, $\mathcal{L}(E)$, $\text{GL}(E)$. La réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme. Composée d'isomorphismes. Puissances d'endomorphismes. Notation f^n pour $n \in \mathbb{N}$. Si $f \in GL(E)$, notation f^{-n} pour $n \in \mathbb{N}^*$ (désigne indifféremment $(f^{-1})^n$ et $(f^n)^{-1}$). Formule du binôme dans $\mathcal{L}(E)$.

Un énoncé au choix à demander

- ❒ Interprétation matricielle d'une opération élémentaire sur les lignes ou sur les colonnes.
- ❒ Définition d'une matrice inversible.
- ❒ Résultat sur le produit de matrices inversibles et sur la transposée d'une matrice inversible.
- ❒ Caractérisation des matrices inversibles en utilisant un système linéaire.
- ❒ Condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice diagonale ou triangulaire soit inversible. Que peut-on dire des inverses ?
- ❒ Donner des exemples de référence de K-ev.
- ❒ Définition d'un sev d'un K-ev E. Donner des exemples de sev d'ev de référence.
- ❒ Définition du sev engendré par des vecteurs.
- ❒ Définition d'une somme de sev, d'une somme directe.
- ❒ Traductions de $E = F \oplus G$ (1 : $E = F + G$ et $F \cap G = \{0_E\}$, 2 : $\forall u \in E, \exists!(v,w) \in F \times G, u = v + w$). L'unicité dans la décomposition correspond à $F \cap G = \{0_E\}$.
- ❒ Définition d'une application linéaire, d'un endomorphisme, d'un isomorphisme, d'un automorphisme.
- ❒ Formule du binôme dans $\mathcal{L}(E)$.

Démonstrations

- ❒ Soit F et G deux sev de E. L'ensemble $\{u+v/u \in F \text{ et } v \in G\}$ est un sev de E et c'est le plus petit contenant à la fois F et G.
- ❒ *Exemple fait en cours* : Dans $\mathbb{R}^3$ usuel, on note $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/x+2y+z=0\}$, $G = \text{Vect}(\,(1,0,1)\,)$. F et G sont des sev supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
- ❒ F et G sont en somme directe ssi $F \cap G = \{0_E\}$.

  Remarque aux colleurs : Dans le programme, la somme est dite directe lorsque la décomposition selon $F+G$ est unique.

✷ ✷

PROGRAMME 20 : du 17/03 au 21/03

Reprise des espaces vectoriels

Espaces vectoriels : fin

- ★ Image directe d'un sous-espace vectoriel, tiré en arrière d'un sev. Image et noyau. Caractérisation de l'injectivité d'une application linéaire à l'aide de son noyau. Savoir traduire $f \circ g = 0_{\mathcal{L}(E)}$ à l'aide d'un noyau et d'une image. Cas particulier : $f \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Famille génératrice de $\text{Im}(f)$ quand l'espace de départ admet une famille génératrice $(u_1, \ldots, u_n)$.
- ★ Projecteurs et symétries associés à deux sev supplémentaires. Caractérisations par $p \circ p = p$ et $s \circ s = \text{id}_E$ et p et s sont des endomorphismes de E.

Un énoncé au choix à demander

- ❒ Donner des exemples de référence de K-ev.
- ❒ Définition d'un sev d'un K-ev E. Donner des exemples de sev d'ev de référence.
- ❒ Définition du sev engendré par des vecteurs.
- ❒ Définition d'une somme de sev, d'une somme directe.
- ❒ Caractérisations des sev supplémentaires (1 : $E = F \oplus G$ et $F \cap G = \{0_E\}$, 2 : $\forall u \in E, \exists!(v,w) \in F \times G, u = v + w$).
- ❒ Définition d'une application linéaire, d'un endomorphisme, d'un isomorphisme, d'un automorphisme.
- ❒ Formule du binôme dans $\mathcal{L}(E)$.
- ❒ Définition du noyau, d'une image.
- ❒ Caractérisation de l'injectivité pour une application linéaire
- ❒ Signification de $f \circ g = 0$ si f et g endomorphismes d'un ev.
  Cas particulier : $f \circ f = 0$.
- ❒ Famille génératrice de $\text{Im}(f)$ quand l'espace de départ admet une famille génératrice $(u_1, \ldots, u_n)$.
- ❒ Définition d'une projection, d'une symétrie.
- ❒ Caractérisations d'une projection, d'une symétrie.

Démonstrations

- ❒ *Exemple fait en cours* : Dans $\mathbb{R}^3$ usuel, on note $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/x+2y+z=0\}$, $G = \text{Vect}(\,(1,0,1)\,)$. F et G sont des sev supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
- ❒ Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. f est injective ssi $\text{Ker}\, f = \{0_E\}$.
- ❒ Une projection de E est un endomorphisme de E.