DS 5 : Mécanique et Chimie - Samedi 08 février

PTSI La Martinière Monplaisir

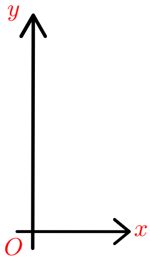
Durée : 4 heures
⇒ Les calculatrices sont interdites ⇐
Veiller à la clarté de la rédaction et à l'homogénéité des équations. Présenter les résultats sous forme littérale avant de faire les applications numériques. Mettre en évidence (encadrer, souligner…) les résultats. La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation.
Le barème est donné à titre indicatif et pourra être légèrement ajusté au moment de la correction.
Les différentes parties sont indépendantes et peuvent être abordées dans l'ordre de votre choix.

I Le jet d'eau de Genève (19% des points)

Le célèbre jet d'eau de Genève culmine à une hauteur de près de 140 m. On fournit ci-dessous des informations techniques issues du site internet de l'exploitant.

Vitesse d'éjection	$200\,\mathrm{km\,h^{-1}}$
Débit	$500\,\mathrm{L\,s^{-1}}$
Puissance des pompes	1 MW
Puissance de l'éclairage	9 kW

On assimile la trajectoire du jet à celle des gouttes d'eau (sphériques) qui le composent. Celles-ci ont un rayon moyen valant $R = 2\,mm$. On rappelle que la masse volumique de l'eau vaut $\rho_{\mathrm{eau}} = 1\cdot 10^3\,kg\cdot m^{-3}$. On donne $g = 9{,}81\,m\cdot s^{-2}$.



On se place dans un repère $(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y})$ avec O l'origine du repère correspondant à la buse de laquelle sortent les gouttes. On supposera que cette buse est à la même hauteur que le lac.

1. Au vu de la photo ci-dessus, que peut-on supposer quant à l'angle α que fait la vitesse initiale d'une goutte avec l'horizontale ?

2. En l'absence de frottements, à quelle équation différentielle obéit la vitesse $\vec{v}$ des gouttes d'eau ?

3. Avec les données ci-dessus, retrouver la hauteur maximale du jet.

4. On estime qu'une goutte d'eau , une fois sortie de la buse qui la projette en l'air, met environ 16 s à retomber dans le lac. Confronter cette observation aux résultats obtenus avec les données ci-dessus.

Avec un jet vertical, pour expliquer la forme du jet ci-dessus, on suppose que chacune des gouttes est soumise à l'action d'un vent horizontal constant de vitesse $\vec{V_h}$. Celui-ci agit sur les gouttes à travers une force qui s'écrit $\vec{f}_{vent} = \frac{1}{2}\varrho_{air}\pi R^2 C_x V_h^2 \overrightarrow{e_x}$. On posera $\gamma = \frac{\varrho_{air}\pi R^2 C_x V_h^2}{2m}$.

5. Déterminer l'équation différentielle à laquelle obéit la vitesse $\vec{v}$ d'une goutte d'eau.

$\boxed{\textbf{6.}}$ Calculer alors les composantes v_x et v_y de la vitesse. En déduire l'expression de $x(t)$ et $y(t)$. Enfin, déterminer l'équation de la trajectoire sous la forme $y(x)$.

$\boxed{\textbf{7.}}$ L'altitude maximale de la trajectoire est-elle modifiée ?

$\boxed{\textbf{8.}}$ Donner l'allure de la trajectoire.

$\boxed{\textbf{9.}}$ Calculer la distance d à laquelle les gouttes d'eau atteignent la surface du lac.

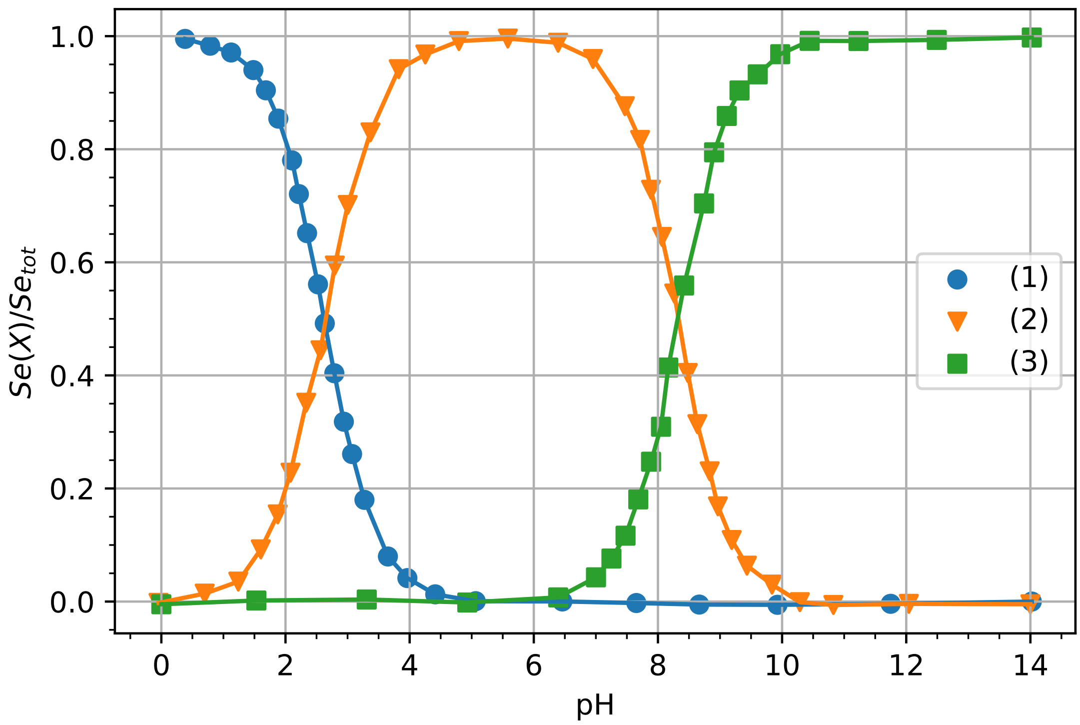
$\boxed{\textbf{10.}}$ On constate que le jet retombe sur l'eau à une distance $d \simeq 10\,m$ de la buse. En déduire la vitesse V_h du vent.

Données : $\varrho_{air} \simeq 1.23\,kg \cdot m^{-3}$ et $C_x \simeq 0.4$. On donne $\sqrt{2/3} \simeq 0.8$, $\sqrt{4/3} \simeq 1,2$ et $\sqrt{8/3} \simeq 1,6$.

II Propriétés acido-basiques des ions sélénite (18% des points)

Le sélénium, dont l'isotope (de période $\simeq 65000$ ans) est un des produits de fission de l'uranium, contribue à la radioactivité de longue durée de certains déchets radioactifs. On trouve le sélénium dans l'environnement, sous forme d'ions séléniure Se^{2-}, d'ions sénénite SeO_3^{2-} ou d'ions sélénate SeO_4^{2-}, c'est-à-dire essentiellement sous forme anionique. On ne s'intéresse par la suite qu'aux ions sélénite.

Les ions sélénite SeO_3^{2-} présentent des propriétés acido-basiques en solution aqueuse. Le graphe ci-dessous donne les courbes de distribution des espèces SeO_3^{2-}, $HSeO_3^-$ et $H2SeO_3$ en fonction du pH de la solution :



On donne $K_e = 10^{-14}$.

$\boxed{\textbf{1.}}$ Quel est le comportement acido-basique des ions sélénite SeO_3^{2-} en solution aqueuse ? Écrire les équations des réactions traduisant ce comportement.

$\boxed{\textbf{2.}}$ Identifier chacune de ces courbes de distribution, numérotées sur le graphe ci-dessus de (1) à (3), à une espèce dérivant des ions sélénite $S_2O_3^{2-}$. Justifier votre réponse succintement.

$\boxed{\textbf{3.}}$ Déterminer, à partir des 3 courbes de distribution, les valeurs numériques des constantes d'acidité associées aux couples acido-basiques $H_iSeO_3^{i-2}/H_{i-1}SeO_3^{i-3}$ avec $i = 1$ ou 2.

On considère une solution aqueuse de sélénite de sodium, Na_2SeO_3, de concentration $C_0 = 0.0010 mol \cdot L^{-1}$.

4. Une analyse rapide avec du papier pH montre que le pH de la solution est compris entre 8 et 10. Que peut-on en déduire, au vu du diagramme de distribution ?

5. En prenant en compte le fait que certaines espèces sont négligeables, en déduire, par le calcul le plus simple possible, la concentration de toutes les espèces en solution et donner la valeur du pH de la solution. On justifiera les approximations faites.

À cette solution on ajoute une solution d'acide nitrique à hauteur de $c_1 = 10^{-4}$ mol/L.

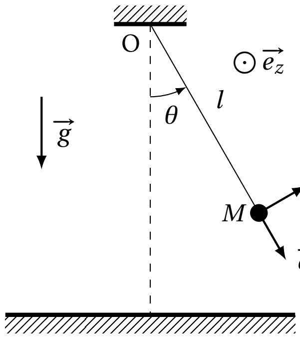
6. Quelle est la nouvelle valeur du pH ?

III Mouvement d'un enfant sur une balançoire (14% des points)

Un enfant faisant de la balançoire est modélisé par une masse ponctuelle m située en M et suspendue en O par une tige rigide, de masse négligeable et de longueur l. Le champ de pesanteur $\overrightarrow{g}$, de norme g, est supposé uniforme. L'angle que fait la tige de suspension avec la verticale est noté θ (voir ci-dessous). Les vecteurs unitaires $\overrightarrow{e_r}$, $\overrightarrow{e_\theta}$ et $\overrightarrow{e_z}$, tels que définis sur la figure ci-dessous, définissent un trièdre orthonormé direct lié à la balançoire.

L'enfant subit de la part de l'air une force de frottement de la forme $\overrightarrow{f} = -\alpha \overrightarrow{v}$.

On s'intéresse dans tout le problème à de petites oscillations de la balançoire, c'est-à-dire à des oscillations telles que $\theta \ll 1$.



1. Établir l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$. On introduira la pulsation propre ω_0 de l'oscillateur et son facteur de qualité Q tel que $Q = \dfrac{m\omega_0}{\alpha}$.

2. À quelle inégalité doit satisfaire α pour que le mouvement de l'enfant puisse être considéré comme un mouvement oscillatoire dont l'amplitude décroît avec le temps (mouvement pseudo-périodique) ?

Pour compenser l'atténuation du mouvement, l'enfant sur la balançoire demande à un deuxième enfant de le pousser. En plus de la force de frottement, on suppose maintenant que l'enfant sur la balançoire est soumis à une force sinusoïdale de la forme $\overrightarrow{F_e} = F_e \cos(\omega t)\overrightarrow{e_\theta}$.

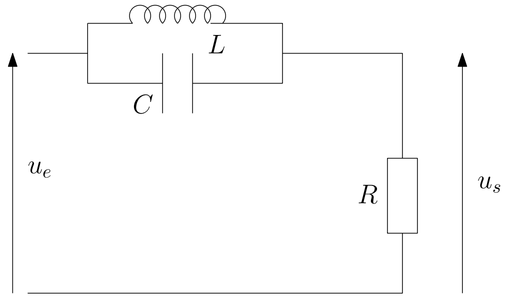
3. Le choix d'une force excitatrice sinusoïdale semble peu réaliste. Expliquer succinctement l'intérêt d'étudier la réponse du système à une telle force pour l'étude d'un mouvement quelconque.

4. Établir la nouvelle équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$.

5. On s'intéresse aux solutions en régime forcé de la forme $\theta(t) = \theta_m \cos(\omega t + \varphi)$. En utilisant la représentation complexe, déterminer l'expression de θ_m en fonction de F_e, m, l, ω, ω_0, et Q.

6. Donner l'expression approchée de la pulsation de résonance ω_r dans le cas où le facteur de qualité Q est grand ($Q \gg 1$). En déduire l'expression de θ_m à la résonance en fonction de F_e, m, l, ω_0 et Q.

7. Tracer l'allure de θ_m en fonction de ω dans le cas où $Q \gg 1$. Commenter.



IV Filtre (26% des points)

On considère le filtre suivant, alimenté en régime sinusoïdal forcé, avec $u_e(t) = U_{em}\cos(\omega t)$. La bobine et le condensateur sont considérés comme parfaits.

On s'intéresse à la tension de sortie, que l'on étudie sous la forme $u_s(t) = U_{sm}\cos(\omega t + \phi)$.

$\boxed{\textbf{1.}}$ Sans calcul, prévoir la valeur de l'amplitude U_{sm} en très basse et très haute fréquence à l'aide de schémas équivalents.

$\boxed{\textbf{2.}}$ Montrer que l'amplitude complexe $\underline{U_{sm}}$ peut se mettre sous la forme :

$$\underline{U_{sm}} = \frac{1 - x^2}{1 - x^2 + jx/Q} U_{em},$$

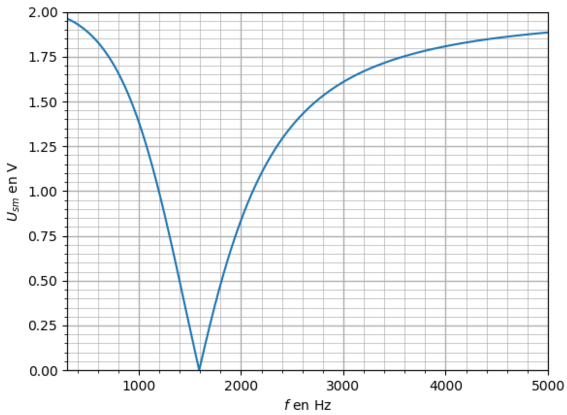
avec $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$, où Q et ω_0 sont à déterminer.

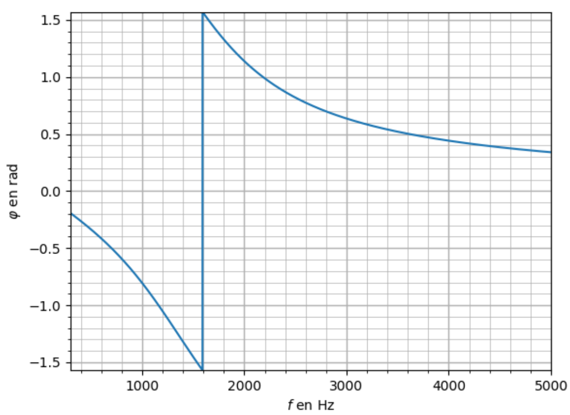
$\boxed{\textbf{3.}}$ Montrer que l'amplitude de u_s passe par un minimum pour une pulsation ω_a à déterminer. On parle de phénomène d'antirésonance. Cette antirésonance dépend-elle de Q ?

$\boxed{\textbf{4.}}$ On s'intéresse à la largeur $\Delta\omega$ en pulsation de l'anti résonance, c'est-à-dire on cherche les pulsations ω pour lesquelles $U_{sm}(\omega) \leq \dfrac{U_{sm,max}}{\sqrt{2}}$. Montrer que

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}.$$

Les relevés expérimentaux de U_{sm} et ϕ, correspondant à une amplitude $U_{em} = 2\,V$, sont donnés ci-dessous :





$\boxed{\textbf{5.}}$ Déterminer ϕ pour $\omega \to 0$, $\omega \to \infty$ et $\omega \to \omega_0$ par valeurs inférieures et $\omega \to \omega_0$ par valeurs supérieures. Est-ce cohérent avec le tracé ci-dessus ?

$\boxed{\textbf{6.}}$ À partir de ces relevés, déterminer f_0 et Q. On donne $\sqrt{2} = 1.41$.

$\boxed{\textbf{7.}}$ Sachant que $C = 0,1\,\mu F$, déterminer R et L.

On prend maintenant comme entrée un signal créneau de fréquence $f_c = 1600\,Hz$, et de valeur moyenne nulle. On souhaite éliminer sa composante fondamentale.

On rappelle la décomposition en série de Fourier d'un signal créneau d'amplitude (constante) A :

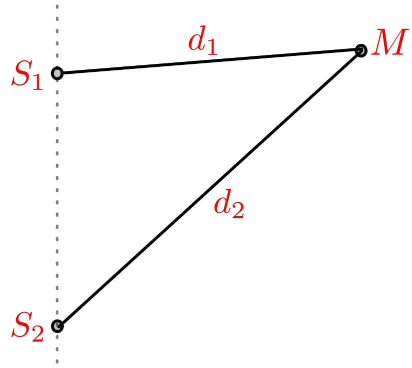
$$c(t) = \frac{4A}{3\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin\left[(2k+1)2\pi f_c t\right]}{2k+1}.$$

$\boxed{\textbf{8.}}$ Montrer que le filtre étudié ci-dessus permet de réaliser l'élimination demandée.

$\boxed{\textbf{9.}}$ Quels harmoniques sont également affectés par le filtrage ? Comment pourrait-on modifier le circuit pour limiter cet inconvénient ?

V Ondes à la surface de l'eau (23% des points)

On considère deux ondes progressives sinusoïdales de même pulsation ω se déplaçant à la même célérité c à la surface d'un plan d'eau horizontal et issues de deux sources situées respectivement en S_1 et en S_2. Les deux sources sont synchrones.
Soit $z_1(S_1,t) = A_0\cos(\omega t)$ et $z_2(S_2,t) = A_0\cos(\omega t)$ les deux signaux vibratoires, altitudes respectives en S_1 et en S_2 de la surface de l'eau. L'altitude nulle correspond à la surface de l'eau au repos.



$\boxed{\textbf{1.}}$ Donner les expressions de $z_1(M,t)$ et $z_2(M,t)$ des signaux provenant respectivement de la sources S_1 et de la source S_2 lorsque les ondes arrivent en M situé à d_1 de S_1 et à d_2 de S_2.

$\boxed{\textbf{2.}}$ Déterminer l'expression du signal de l'onde $z(M,t)$ résultant de la superposition des deux ondes en M. Montrer que ce signal se met sous la forme :

$$z(M,t) = A(M)\cdot\cos\left(\omega t + \phi(M)\right).$$

Donner les expressions de $A(M)$ et de $\phi(M)$ en fonction de d_1 et de d_2.

$\boxed{\textbf{3.}}$ Etablir les relations entre d_1 et d_2 pour que les interférences entre les deux ondes soient constructives ou destructives.

$\boxed{\textbf{4.}}$ Sur le schéma V.1 ci-dessous, chaque cercle foncé représente un front d'onde correspondant à une "crête" (hauteur maximale de la surface de l'eau si la source était seule) et chaque cercle en pointillé représente un front d'onde correspondant à un "creux" (hauteur minimale de la surface de l'eau si la source était seule).

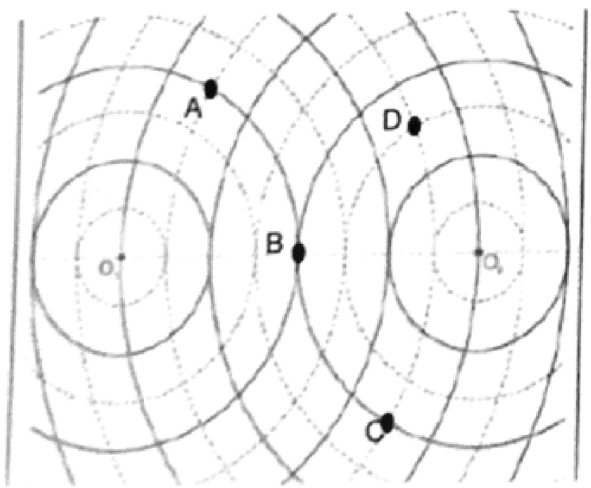


FIGURE V.1 – Interférences à deux ondes à la surface de l'eau

Dire en justifiant brièvement la réponse s'il y a interférences constructives ou destructives aux points A, B, C et D.

On donne à un instant t sur la figure V.2 ci-dessous la simulation de la superposition de deux ondes sinusoïdales précédentes à la surface de l'eau. Les zones sombres correspondent à des altitudes minimales de la surface de l'eau, les zones claires aux altitudes maximales et les zones grises aux points d'altitude nulle.

5. Indiquer sur le schéma où se situent les interférences constructives et les interférences destructives. On justifiera.

6. Soit un point M de l'axe $(x'x)$. Comment sont les interférences sur cet axe ? Justifier. Quelle est la phase $\phi(M)$ de $z(M,t)$ en fonction de la distance à l'une des sources. En déduire une méthode pour mesurer la longueur d'onde et donner sa valeur approximative.

7. Soit un point M de l'axe $(y'y)$ en dehors du segment S_1S_2. Exprimer la phase $\phi(M)$ en fonction de y. En déduire une méthode pour mesurer la longueur d'onde et donner sa valeur approximative.

8. La fréquence des excitations étant de $80\,Hz$, en déduire la valeur de la célérité des ondes.

Cette feuille est à rendre avec la copie

NOM :

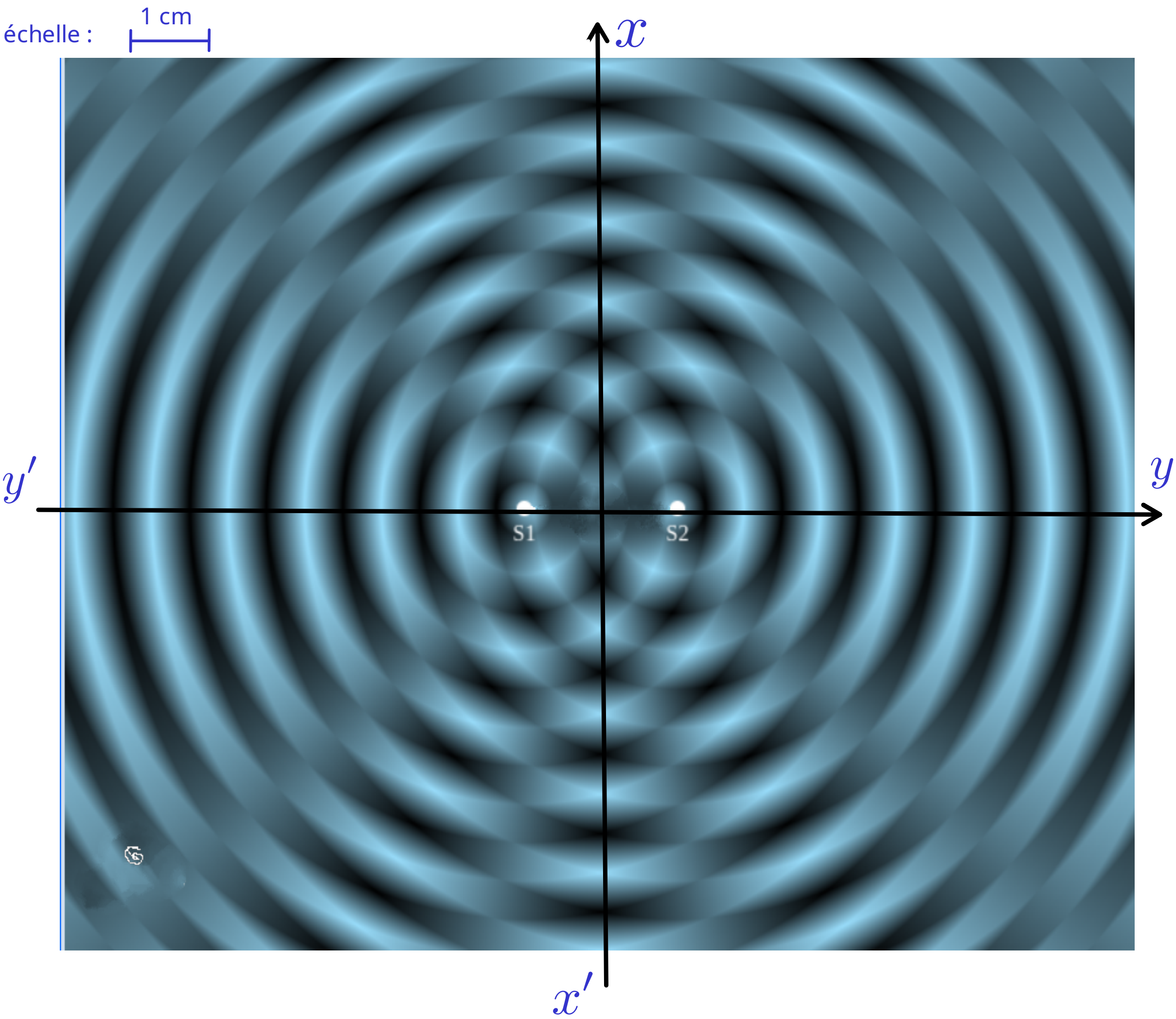


FIGURE V.2 – Simulation d'interférences à deux ondes à la surface de l'eau.