

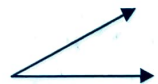
Mécanique MC5 Loi du moment cinétique.
Mouvement d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

Produit scalaire	1
Produit vectoriel.....	1
I Moment d'une force	2
1.) Point matériel.....	2
2.) Système de points matériels Syst = {M _i (m _i)}	4
II Moment cinétique.....	5
1.) Définition.....	5
2.) Théorème du moment cinétique	6
3.) Solide en rotation autour d'un axe fixe Δ = (Oz)	7
III Approche énergétique des solides.....	10
1.) Théorèmes généraux.....	10
2.) Energies	10
3.) Puissance des actions sur un solide.....	10
IV Script python : Pendule pesant. Non isochronisme des oscillations	11
1.) Principe.....	11
2.) Mise en oeuvre.....	11
Conclusion : Tabouret d'inertie.....	12



✖ ✖ Produit scalaire $w = \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \alpha$
 ✖ ✖ $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont perpendiculaires.

✖ ✖ Produit vectoriel $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ tel que :
 ✖ ✖ $\vec{w}$ est perpendiculaire au plan formé par $\vec{u}, \vec{v}$ $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est un trièdre direct.
 $\|\vec{w}\| = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot |\sin \alpha|$
 $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$ $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires



$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ -x_1 z_2 + z_1 x_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix}$$

I Moment d'une force

1.) Point matériel

a) Moment au point A d'une force $\vec{F}$ appliquée au point M :

$$\vec{M}_A(\vec{F}) = \vec{AM} \wedge \vec{F}$$

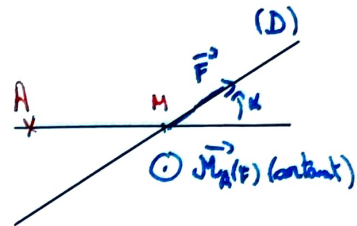
$$\|\vec{M}_A(\vec{F})\| = \|\vec{AM}\| \|\vec{F}\| \sin \alpha$$

$$N.m = kg.m^2.s^{-2} = J$$

$$\vec{M}_A(\vec{F}) \perp \vec{AM} \text{ et } \vec{M}_A \perp \vec{F}$$

$$\vec{M}_A \perp \text{plan}(\vec{AM}, \vec{F})$$

$$\vec{M}_A(\vec{F}) = \vec{0} \text{ si } \vec{AM} \text{ et } \vec{F} \text{ sont colinéaires (sin} = 0)$$



b) Moment d'une force $\vec{F}$ appliquée au point M, par rapport à un axe Δ :

Définition : Soit un axe Δ passant par A, de vecteur unitaire $\vec{u}$: $M_\Delta(\vec{F}) = \vec{M}_A(\vec{F}) \cdot \vec{u} = \|\vec{M}_A(\vec{F})\| \cos(\vec{u}, \vec{M}_A)$

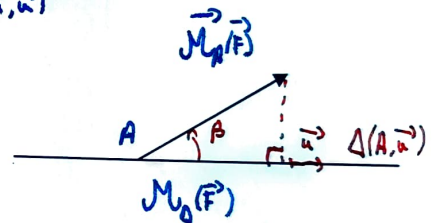
Propriétés : $\vec{M}_A(\vec{F}) \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{M}_A(\vec{F})$ $M_\Delta(\vec{F})$ a même valeur en tout point de l'axe Δ .

$M_\Delta(\vec{F})$ est la projection orthogonale de $\vec{M}_A(\vec{F})$ sur l'axe $\Delta(A, \vec{u})$

• $\|\vec{u}\| = 1$ car $\vec{u}$ vecteur unitaire.

Le produit scalaire est commutatif.

Si $\vec{M}_A(\vec{F}) \perp \vec{u}$, $M_\Delta(\vec{F}) = 0$ car $\cos \beta = 0$



M_Δ a la même valeur en tout pt de l'axe Δ .

$$\vec{M}_A(\vec{F}) = \vec{AM} \wedge \vec{F}$$

$$\vec{M}_{A'}(\vec{F}) = \vec{A'M} \wedge \vec{F}$$

$$\vec{M}_A(\vec{F}) \cdot \vec{u} - \vec{M}_{A'}(\vec{F}) \cdot \vec{u} = (\vec{AM} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u} - (\vec{A'M} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u}$$

$$= (\vec{AM} - \vec{A'M}) \wedge \vec{F} \cdot \vec{u}$$

$$= (\vec{AA'} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u}$$

$$\vec{AA'} \text{ est colinéaire à } \vec{u}. \vec{AA'} = k \vec{u}$$

$$\text{Donc } \vec{M}_A(\vec{F}) \cdot \vec{u} - \vec{M}_{A'}(\vec{F}) \cdot \vec{u}$$

$$= (k \vec{u} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u}$$

$$\perp k \vec{u}$$

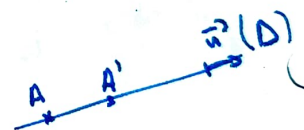
$$= 0$$

$$\vec{M}_A(\vec{F}) \cdot \vec{u} = \vec{M}_{A'}(\vec{F}) \cdot \vec{u} = M_\Delta(\vec{F})$$

indépendant du pt choisi sur Δ

on peut bien parler de moment / axe Δ

~~ce~~ celle.



Propriétés : Si (D) et (Δ) sont coplanaires, alors $M_{\Delta}(\vec{F}) = 0$.

1) Si D (droite support de $\vec{F}$, passant par M), coupe Δ (passant par A, de vecteur unitaire $\vec{u}$) en un point I, alors $M_{\Delta}(\vec{F}) = 0$.

2) Si (D) // (Δ) , alors $M_{\Delta}(\vec{F}) = 0$.

démo 1. $M_{\Delta}(\vec{F}) = \vec{M}_A(\vec{F}) \cdot \vec{u}$
 $= (\vec{AM} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u}$

M_{Δ} est indépendant du pt sur Δ

$$M_{\Delta}(\vec{F}) = (\vec{IM} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u}$$

$\vec{F}$ et $\vec{IM}$ sont colinéaires

$$\Rightarrow \vec{IM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow M_{\Delta}(\vec{F}) = 0$$

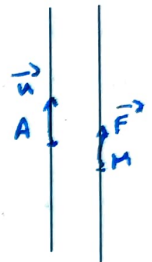
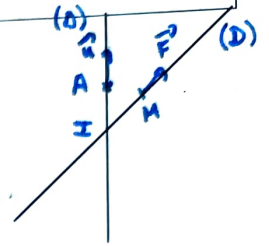
démo 2.

$$M_{\Delta}(\vec{F}) = (\vec{AM} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u}$$

$\perp \vec{F}$ donc $\perp \vec{u}$

car $\vec{u}$ et $\vec{F}$ sont colinéaires

$$\Rightarrow M_{\Delta}(\vec{F}) = 0$$



c) Application

Propriété : $M_{\Delta}(\vec{F}) = \pm d \cdot F$ où d est le bras de levier (distance à l'axe).

$$M_{\Delta}(\vec{F}) = (\vec{AM} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u}$$

H proj orth de A sur (D)

$$M_{\Delta}(\vec{F}) = (\vec{AH} + \vec{HM} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u}$$

$$= (\vec{AH} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u} + \underbrace{(\vec{HM} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u}}_{=0}$$

car $\vec{HM}$ et $\vec{F}$ sont colinéaires.

$$M_{\Delta}(\vec{F}) = (\vec{AH} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u}$$

$$M_{\Delta}(\vec{F}) = \|\vec{AH}\| \|\vec{F}\|$$

car $\vec{M}_A(\vec{F})$ et $\vec{u}$ sont colinéaires

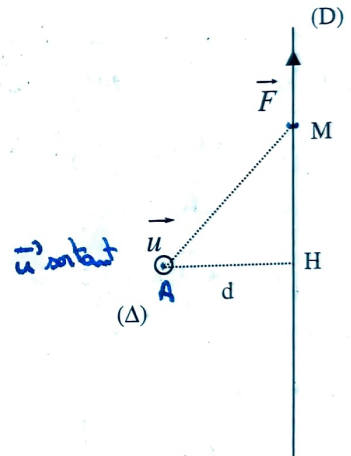
et de même sens (cas du dessin)

de façon générale, $M_{\Delta}(\vec{F}) = \pm \|\vec{AH}\| \|\vec{F}\|$ suivant l'orientation de Δ .

Pour augmenter $|M_{\Delta}(\vec{F})|$, il faut à force égale, augmenter le bras du levier.

Pour augmenter le bras de levier : on utilise 1 grande vis plutôt qu'une petite manivelle, pour augmenter la distance entre l'axe de rotation de la vis et le pt d'application de la force. de même, on place la poignée de la pte la + loin possible de l'axe de rotation.

Ces résultats s'appliquent à une force quelconque en la décomposant en une force coplanaire et une force non coplanaire à Δ : $\vec{F} = \vec{F}_{//} + \vec{F}_{\perp}$. On a alors $M_{\Delta}(\vec{F}) = \pm d \cdot F_{\perp}$.



2.) Système de points matériels Syst = $\{M_i (m_i)\}$

a) Moments intérieurs et extérieurs

Moment résultant des forces intérieures au système au point A : $\vec{M}_{A,int} = \sum_i \vec{M}_A(\vec{f}_{i,int}) = \vec{0}$

Moment résultant des forces extérieures au système au point A : $\vec{M}_{A,ext} = \sum_i \vec{M}_A(\vec{f}_{i,ext})$

Le pt $M_i \in \text{Syst}$ est soumis à des forces int. et ext. exercées par des M_j et M_k

Pour M_i , $\vec{f}_{i,int} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \vec{f}_{ji}$

Moment au pt A de $\vec{f}_{i,int}$.

$$\vec{M}_A(\vec{f}_{i,int}) = \vec{AM}_i \wedge \vec{f}_{i,int}$$

Moment résultant des forces int.

s'exerçant sur (S)

$$\begin{aligned} \vec{M}_{A,int} &= \sum_i \vec{M}_A(\vec{f}_{i,int}) \\ &= \sum_i \vec{AM}_i \wedge \vec{f}_{i,int} \\ &= \sum_i \vec{AM}_i \wedge \sum_{j \neq i} \vec{f}_{ji} \\ &= \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{AM}_i \wedge \vec{f}_{ji} \end{aligned}$$

Dans la somme, les termes s'annulent

$$\begin{aligned} 2 \text{ à } 2: & \vec{AM}_i \wedge \vec{f}_{ji} + \vec{AM}_j \wedge \vec{f}_{ji} \\ &= \vec{AM}_i \wedge \vec{f}_{ji} + \vec{AM}_j \wedge (-\vec{f}_{ji}) \\ &= \vec{AM}_i \wedge \vec{f}_{ji} - \vec{AM}_j \wedge \vec{f}_{ji} \\ &= \vec{AM}_i \wedge \vec{f}_{ji} + \vec{M_j A} \wedge \vec{f}_{ji} \\ &= (\vec{AM}_i + \vec{M_j A}) \wedge \vec{f}_{ji} \\ &= \vec{M_j M_i} \wedge \vec{f}_{ji} \\ &= \vec{0} \quad \text{car ils sont colinéaires} \\ & \quad \text{(principe d'interaction)} \end{aligned}$$

b) Notion de couple

Couple : Action menée sur un système, telle que la force résultante soit nulle;

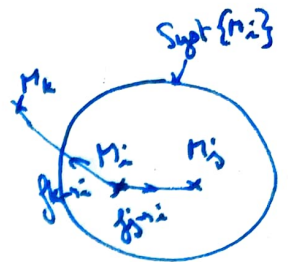
Un couple ne déplace pas le centre d'inertie d'un système, mais tend à le faire tourner.

Couple de forces $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ tq $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$

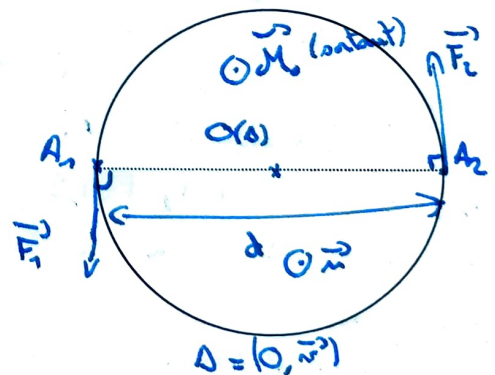
$$\begin{aligned} \vec{M}_O &= \vec{M}_O(\vec{F}_1) + \vec{M}_O(\vec{F}_2) \\ &= \vec{OA}_1 \wedge \vec{F}_1 + \vec{OA}_2 \wedge \vec{F}_2 \\ &= \vec{OA}_1 \wedge \vec{F}_1 - \vec{OA}_2 \wedge \vec{F}_1 \\ &= (\vec{OA}_1 + \vec{A_2 O}) \wedge \vec{F}_1 \\ &= \vec{A_2 A_1} \wedge \vec{F}_1 \end{aligned}$$

$$\vec{M}_O = d \cdot \|\vec{F}_1\| \vec{u} \quad (\text{cas du levier})$$

$\vec{M}_O = \vec{c}$ = Couple indépendant de la position de O sur $[A_1 A_2]$



Le levier :



c) Liaison pivot : Mécanisme ne laissant à un solide qu'un seul degré de liberté en rotation autour d'un axe Δ .

On n'a donc pas de translation suivant Δ .

Liaison pivot idéale : $M_A(\text{liaison}) = 0$. On néglige les frottements (en utilisant des roulements à bille ou à aiguille).

$\vec{R}_N \perp$ surface de contact entre le stator et le rotor

(D) droite support de $\vec{R}_N$.

(Δ) axe de rotation du rotor $\Delta = (O, \vec{z})$

Si (D) et (Δ) ont un pt d'intersection,

$$M_\Delta(\vec{R}_N) = 0$$

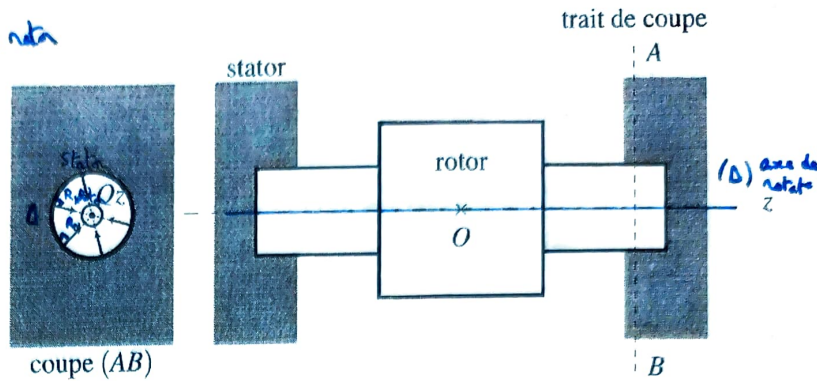


Figure 19.7 – Schéma de principe d'une liaison pivot.

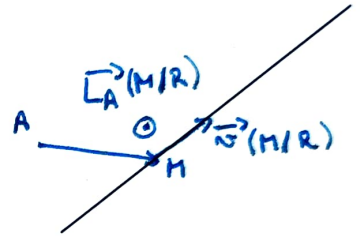
II Moment cinétique

1.) Définition

a) pour un point matériel

Moment cinétique au point A du point matériel M(m) de vitesse $\vec{v}(M/\mathcal{R})$

$$\vec{L}_A(M/\mathcal{R}) = \vec{AM} \wedge m\vec{v}(M/\mathcal{R}) = \vec{AM} \wedge \vec{p}(M/\mathcal{R})$$



Moment cinétique par rapport à l'axe Δ (passant par A, de vecteur unitaire $\vec{u}$) : $L_\Delta(M/\mathcal{R}) = \vec{L}_A(M) \cdot \vec{u}$

Projet de $\vec{L}_A(M)$ sur l'axe $\Delta = (A, \vec{u})$

Propriété : $L_\Delta(M)$ a même valeur en tout point de l'axe Δ . $\hat{M}$ démontre que pour $M_\Delta(\vec{F})$

Propriétés : Si D (droite support de $\vec{v}$, passant par M), passe par A, alors $\vec{L}_A(M) = \vec{0}$.
Si D (droite support de $\vec{v}$ passant par M), coupe Δ (passant par A, de vecteur unitaire $\vec{u}$)
ou si (D) // (Δ), c'est-à-dire si (D) et (Δ) sont coplanaires, alors $L_\Delta(M) = 0$.

b) pour un système de points matériels $\text{Syst} = \{M_i(m_i)\}$:

$$\vec{L}_A(\text{Syst}/\mathcal{R}) = \sum_i \vec{L}_A(M_i/\mathcal{R}) = \sum_i \vec{AM}_i \wedge m_i \vec{v}(M_i/\mathcal{R})$$

2.) Théorème du moment cinétique

a) pour un point matériel $M(m)$ Théorème du moment cinétique en un point fixe Δ , dans un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen

$$\frac{d\vec{L}_A(M/\mathcal{R})}{dt} = \vec{M}_A(\vec{F})$$

où $\vec{F}$ est la résultante des forces appliquées

démo: $\vec{L}_A(M/\mathcal{R}) = \vec{AM} \wedge \vec{p}(M/\mathcal{R})$
 $= \vec{AM} \wedge m \vec{v}(M/\mathcal{R})$

$$\frac{d\vec{L}_A(M/\mathcal{R})}{dt} = \frac{d(\vec{AM})}{dt} \wedge \vec{p}(M/\mathcal{R}) + \vec{AM} \wedge \frac{d\vec{p}(M/\mathcal{R})}{dt}$$

$$\vec{AM} = \vec{AO} + \vec{OM}$$

$$\frac{d\vec{AM}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} = \frac{d\vec{AO}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} + \frac{d\vec{OM}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}}$$

A et O fixes (O origine du repère)

$$\Rightarrow \frac{d\vec{AO}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} = \vec{0} \text{ et } \frac{d\vec{OM}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} = \vec{v}(M/\mathcal{R})$$

$$\frac{d\vec{AM}}{dt} \wedge \vec{p}(M/\mathcal{R}) = \vec{v}(M/\mathcal{R}) \wedge m \vec{v}(M/\mathcal{R}) = \vec{0}$$

LFD du ref gal:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} = \vec{F} \text{ résultante des forces appliquées.}$$

$$\textcircled{2} \frac{d\vec{L}_A(M/\mathcal{R})}{dt} = \vec{AM} \wedge \vec{F} = \vec{M}_A(\vec{F}) \text{ démo à connaître}$$

Théorème du moment cinétique par rapport à un axe fixe Δ , dans un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen

$$\frac{dL_{\Delta}(M/\mathcal{R})}{dt} = M_{\Delta}(\vec{F})$$

où $\vec{F}$ est la résultante des forces appliquéesTHC / A fixe de $\mathcal{R}$ gal

$$\Rightarrow \frac{d(\vec{L}_A(M/\mathcal{R}) \cdot \vec{u})}{dt} = M_{\Delta}(\vec{F})$$

$$\frac{d\vec{L}_A(M/\mathcal{R})}{dt} \cdot \vec{u} = \vec{M}_A(\vec{F}) \cdot \vec{u}$$

où $\Delta = (A, \vec{u})$ fixe: A fixe $\vec{u}$ est

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dL_{\Delta}(M/\mathcal{R})}{dt} = M_{\Delta}(\vec{F})} \quad \Delta \text{ fixe } \mathcal{R} \text{ gal}$$

b) pour un système de points matériels Syst = $\{M_i (m_i)\}$:Théorème du moment cinétique en A point fixe, dans un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen

$$\frac{d\vec{L}_A(\text{Syst}/\mathcal{R})}{dt} = \vec{M}_{A\text{ext}} \quad (\text{moment résultant des forces extérieures au système au point A})$$

Syst $\{M_i (m_i)\}$ démo: THC à $M_i \in \text{Système}$

$$\frac{d\vec{L}_A(M_i/\mathcal{R})}{dt} = \vec{M}_A(\vec{f}_i)$$

$$\text{où } \vec{f}_i = \vec{f}_i^{\text{int}} + \vec{f}_i^{\text{ext}}$$

$$\vec{L}_A(\text{Syst}/\mathcal{R}) = \sum_i \vec{L}_A(M_i/\mathcal{R})$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}_A(\text{Syst}/\mathcal{R})}{dt} = \frac{d(\sum_i \vec{L}_A(M_i/\mathcal{R}))}{dt}$$

$$= \sum_i \frac{d\vec{L}_A(M_i/\mathcal{R})}{dt}$$

$$= \sum_i \vec{M}_A(\vec{f}_i)$$

$$= \sum_i \vec{AM}_i \wedge (\vec{f}_i^{\text{int}} + \vec{f}_i^{\text{ext}})$$

$$= \underbrace{\sum_i \vec{AM}_i \wedge \vec{f}_i^{\text{int}}}_{=\vec{0}} + \sum_i \vec{AM}_i \wedge \vec{f}_i^{\text{ext}}$$

$$= \frac{d\vec{L}_A(\text{Syst}/\mathcal{R})}{dt} = \vec{M}_{A\text{ext}}$$

$$\text{où } \boxed{\vec{M}_{A\text{ext}} = \sum_i \vec{AM}_i \wedge \vec{f}_i^{\text{ext}}}$$

Théorème du moment cinétique par rapport à Δ axe fixe, dans un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen

$$\frac{dL_{\Delta}(\text{Syst}/\mathcal{R})}{dt} = M_{\Delta\text{ext}} \quad (\text{moment résultant des forces extérieures au système par rapport à l'axe})$$

démo identique à celle pour 1 pt THC, $\vec{u}$

c) Application au pendule simple

Système $\{M(m)\}$

Référentiel terrestre supposé galiléen.

$$\text{forces: } \vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{e}_z$$

 $\vec{T}$ tension du fil

$$\text{TMC Appliqué en } O \text{ fixe } M(R) \\ \frac{d\vec{L}_O(M/R)}{dt} = \vec{M}_O(\vec{P}) + \vec{M}_O(\vec{T})$$

$$\vec{M}_O(\vec{T}) = \vec{OM} \wedge \vec{T} = \vec{0} \text{ car } \vec{OM} \text{ et } \vec{T} \text{ colinéaires}$$

$$\vec{M}_O(\vec{P}) = \vec{OM} \wedge \vec{P} = l\vec{e}_r \wedge mg\vec{e}_z = -lmg\sin\theta\vec{e}_\theta$$

$$\vec{L}_O(M/R) = \vec{OM} \wedge \vec{p}(M/R)$$

$$\vec{OM} = l\vec{e}_r \quad \text{mvt circulaire} \\ \vec{v} = l\dot{\theta}\vec{e}_\theta \quad l = \text{cte}$$

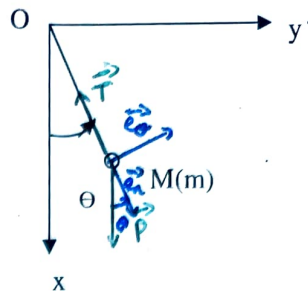
$$\vec{L}_O(M/R) = l\vec{e}_r \wedge ml\dot{\theta}\vec{e}_\theta \\ = ml^2\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$$\frac{d\vec{L}_O(M/R)}{dt} = ml^2\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$$\text{TMC: } ml^2\ddot{\theta} = -mgl\sin\theta$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

$$\sin\theta \approx \theta \text{ petites oscillations} \\ \ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \text{ pulsation propre}$$

3.) Solide en rotation autour d'un axe fixe $\Delta = (Oz)$

a) Moment cinétique scalaire d'un solide

$$L_\Delta(S/R) = \sum_i L_\Delta(M_i) = J_\Delta\omega \quad \text{où } J_\Delta = \sum_i m_i r_i^2 \text{ est le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe } \Delta$$

$$\vec{L}_O(M_i/R) = \vec{OM}_i \wedge \vec{p}(M_i/R) \\ = \vec{OM}_i \wedge m_i \vec{v}(M_i/R)$$

Solide en rotation autour d'un axe fixe $\Delta = (Oz)$
 $\Rightarrow M_i$ décrit un cercle de centre H, projeté de M_i sur Δ . $\vec{OM}_i = \vec{OH} + \vec{HM}_i = \vec{OH} + r_i \vec{e}_r$ où $r_i = HM_i$

$$\vec{v}(M_i/R) = \frac{d\vec{OM}_i}{dt} = \frac{d\vec{OH}}{dt} + \frac{d(r_i \vec{e}_r)}{dt} \quad \text{car } \vec{OH} \text{ est constant} \\ = r_i \dot{\theta} \vec{e}_\theta \quad \text{car } r_i \text{ est constant (mvt circulaire)}$$

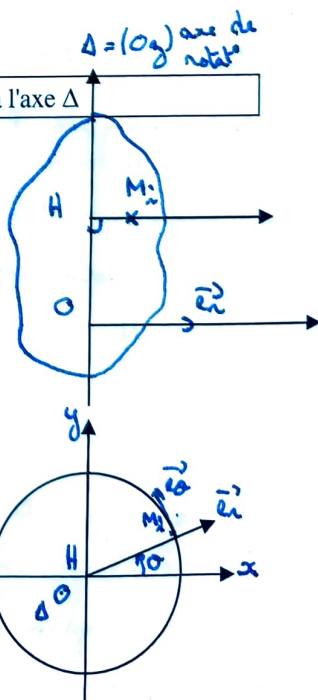
$$\vec{L}_O(M_i/R) = (\vec{OH} + r_i \vec{e}_r) \wedge m_i r_i \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

$$\vec{L}_O(M_i/R) = (r_i \vec{e}_r + r_i \vec{e}_r) \wedge m_i r_i \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

$$\vec{L}_O(M_i/R) = -r_i m_i r_i \dot{\theta} \vec{e}_\theta + r_i^2 m_i \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

$$L_\Delta(M_i/R) = \vec{L}_O(M_i/R) \cdot \vec{e}_z$$

$$L_\Delta(M_i/R) = m_i r_i^2 \dot{\theta} \\ \text{car } \vec{e}_r \cdot \vec{e}_z = 0 \\ \vec{e}_r \cdot \vec{e}_\theta = 0 \\ \forall M_i: \dot{\theta} = \omega \text{ vitesse angulaire du solide / } \Delta$$



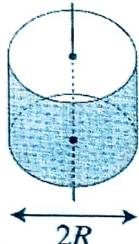
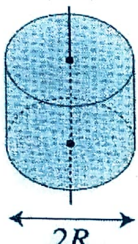
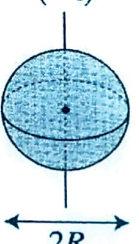
$$\begin{aligned}
 8 \quad L_{\Delta}(\text{Solide}/R) &= \sum_i L_{\Delta}(M_i/R) \\
 &= \sum_i (m_i r_i^2 \omega) \\
 &= \omega \times \underbrace{\sum_i m_i r_i^2}_{J_{\Delta}}
 \end{aligned}$$

$$L_{\Delta}(\text{Sol}/R) = J_{\Delta} \omega$$

où $J_{\Delta} = \sum_i m_i r_i^2$ moment d'inertie du solide axe Δ

Caractérise la répartition de la masse autour de Δ
dém. à connaître

Exemples :

cylindre vide de rayon R	cylindre plein de rayon R	boule de rayon R	barre de longueur L
mR^2	$\frac{1}{2}mR^2$	$\frac{2}{5}mR^2$	$\frac{1}{12}mL^2$
			

b) Théorème du moment cinétique pour un solide S en rotation autour d'un axe fixe

Hypothèse : Δ axe fixe, dans un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen

$$\frac{dL_{\Delta}(S/\mathcal{R})}{dt} = J_{\Delta} \frac{d\omega}{dt} = M_{\Delta \text{ ext}}$$

où $M_{\Delta \text{ ext}}$ est le moment résultant des forces extérieures au solide par rapport à l'axe

$L_{\Delta}(S/\mathcal{R}) = J_{\Delta} \omega$ et $J_{\Delta} = \sum_i m_i r_i^2$ est le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe Δ

$$\frac{dL_{\Delta}(S)}{dt} = \frac{d(J_{\Delta} \omega)}{dt} = J_{\Delta} \frac{d\omega}{dt} \text{ si } J_{\Delta} = \text{cst (solide)}$$

c) Application au pendule pesant

Syst {solide} en rotat° autour d'un axe fixe Δ de masse m
de moment d'inertie J_{Δ}

soumis à : son poids $\vec{P}$
la résultante des act° de liaison au pt O

Hyp: liaison (pivot) parfaite $M_O(\text{liaison}) = 0$

THC pour 1 solide en rotat° autour d'un axe fixe.

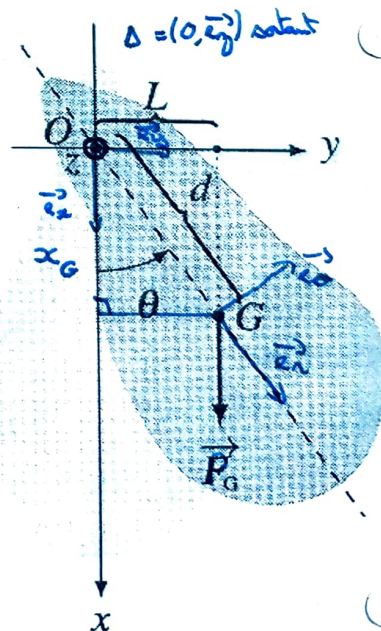
$$\frac{dL_{\Delta}(\text{solide}/R)}{dt} = J_{\Delta} \frac{d\omega}{dt} = M_{\Delta \text{ ext}}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{M}_O(\vec{P}) &= \vec{OG} \wedge \vec{P} \\
 &= d \vec{e}_n \wedge mg \vec{e}_z \\
 &= -mgd \sin \theta \vec{e}_\theta
 \end{aligned}$$

$$M_{\Delta}(\vec{P}) = \vec{M}_O(\vec{P}) \cdot \vec{e}_\theta$$

$$M_{\Delta}(\vec{P}) = -mgd \sin \theta$$

$$\text{THC : } J_{\Delta} \frac{d\omega}{dt} = -mgd \sin \theta \quad \text{où } \omega = \dot{\theta} \quad \frac{d\omega}{dt} = \ddot{\theta}$$



$$\Rightarrow J_D \ddot{\theta} = -mg \sin \theta \quad (1)$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{mgd}{J_D} \sin \theta = 0 \text{ équ. diff du mt}$$

$$\omega_0^2 = \frac{mgd}{J_D} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{J_D}} \text{ pulsation propre}$$

petites oscillations $\sin \theta \approx \theta$

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \text{ autour d'un point d'éq stable}$$

$$\theta = k \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{J_D}{mgd}}$$

T_0 indépendant des CI = Isochronisme des petites oscillations.

CI : $\theta = 0$ à $t = 0 \neq \dot{\theta}_0$ qui correspond à la demi-tangente à l'origine.
À part pour les $\dot{\theta}_0$ les + petites, T dépend des CI.

Rq1: Intégrale première du mt.

$$(1) J_D \ddot{\theta} = -mg \sin \theta \times \dot{\theta}$$

on cherche 1 primitive

$$\Rightarrow \frac{1}{2} J_D \dot{\theta}^2 = mg \cos \theta + \text{cte}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} J_D \dot{\theta}^2 - mg \cos \theta = \text{cte}$$

expression dépendant de θ et $\dot{\theta}$,
qui se conservent au cours du tps.

$$(E_{pp} = mg x_G + \text{cte} \quad \vec{r}_{G/0})$$

$$E_{pp} = -mg x_G + \text{cte}_1 \quad \vec{r}_{G/0}$$

$$\text{où } x_G = d \cos \theta$$

$$\Rightarrow E_{pp} = -mg d \cos \theta + \text{cte}_1$$

$$E_c = \frac{1}{2} J_D \dot{\theta}^2$$

$$\Rightarrow E_m = E_c + E_{pp} = \text{cte}$$

Rq2: Pendule simple: tige de masse négligeable

avec 1 boule de masse m à son extrémité
assimilée à 1 pt matériel

Solide: tige rigide

Moment d'inertie $I_D = (I_G + m d^2)$



$$J_D = \sum m_i r_i^2 = (\sum m_i r_i)^2 = m l^2$$

$$\text{équ. diff } \ddot{\theta} + \frac{mgd}{J_D} \sin \theta = 0$$

$$\text{où } d = OG = OM = l$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{mg}{ml} \sin \theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + g \sin \theta = 0$$

on retrouve le résultat
du pendule simple.

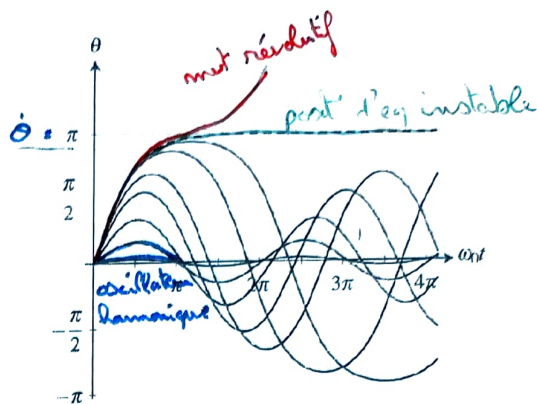


Figure 19.11 — Évolution temporelle de l'angle θ : en trait continu noir, les mouvements sont pendulaires ; en trait continu gris, il est révolitif. Les pointillés correspondent à la transition entre ces deux régimes.

III Approche énergétique des solides

1.) Théorèmes généraux

Pour un système quelconque :

Théorème de l'énergie cinétique dans $\mathcal{R}$ galiléen $E_c(t_2) - E_c(t_1) = W(\vec{F}_{int}) + W(\vec{F}_{ext})$

Théorème de la puissance cinétique dans $\mathcal{R}$ galiléen $\frac{dE_c}{dt} = P(\vec{F}_{int}) + P(\vec{F}_{ext})$

Théorème de l'énergie mécanique dans $\mathcal{R}$ galiléen

$$E_m(t_2) - E_m(t_1) = W(\vec{F}_{nc int}) + W(\vec{F}_{nc ext}) \quad (\vec{F}_{nc} \text{ forces non conservatives})$$

Théorème de la puissance mécanique dans $\mathcal{R}$ galiléen

$$\frac{dE_m}{dt} = P(\vec{F}_{nc int}) + P(\vec{F}_{nc ext})$$

Pour un solide :

$$P_{int} = 0 \text{ et } W_{int} = 0$$

2.) Energies

a) Energie cinétique

Pour un système de points

$$E_c(\text{Syst}/\mathcal{R}) = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Pour un solide en translation

$$E_c(S/\mathcal{R}) = \frac{1}{2} m v_G^2$$

to les pt ont la m même $\vec{v}_G$
 $E_c = \sum \frac{1}{2} m_i v_G^2 = \frac{1}{2} v_G^2 \sum m_i = \frac{m v_G^2}{2}$ où $m = \sum m_i$
 Pour un solide en rotation autour d'un axe fixe
 $(P?) \quad \vec{v}_i = \vec{r}_i \omega \text{ où } \omega = \dot{\theta}$
 $E_c = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2$
 $= \frac{1}{2} \omega^2 \sum m_i r_i^2 = \frac{1}{2} J_D \omega^2$
 $E_c(S/\mathcal{R}) = \frac{1}{2} J_D \omega^2$

b) Energie potentielle de pesanteur

$$E_{pp}(S) = mgz_G + cste$$

$$E_{pp} = \sum m_i g z_i + cste$$

$$= g \sum m_i z_i + cste$$

Def centre d'inertie : $\vec{OG} = \frac{\sum m_i \vec{OM}_i}{\sum m_i}$

$$\Rightarrow z_G = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i z_i}{m}$$

$$\Rightarrow \sum m_i z_i = m z_G$$

$$\Rightarrow E_{pp} = m g z_G + cste$$

3.) Puissance des actions sur un solide

a) Solide en translation

$$P_{ext} = \vec{F}_{ext} \cdot \vec{v}_G$$

b) Solide en rotation autour d'un axe fixe

Théorème de la puissance cinétique : dans $\mathcal{R}$ galiléen, $\frac{dE_c}{dt} = P_{ext} = M_{\Delta ext} \cdot \omega$

THC pour 1 solide en rotation autour d'un axe fixe.

$$\frac{dL_D}{dt} = J_D \frac{d\omega}{dt} = M_{\Delta ext}$$

$$\Rightarrow J_D \omega \frac{d\omega}{dt} = M_{\Delta ext} \cdot \omega$$

$$J_D cste \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} J_D \omega^2 \right) = M_{\Delta ext} \cdot \omega$$

$$\boxed{\frac{dE_c}{dt} = P_{ext}}$$

IV Script python : Pendule pesant. Non isochronisme des oscillations

1.) Principe

Pour l'équation différentielle du pendule pesant en l'absence de frottements :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \sin\theta = 0$$

$$t_{k+n} = t_k + h$$

$$\frac{d\theta_k}{dt} = \frac{\theta_{k+n} - \theta_k}{t_{k+n} - t_k} \Rightarrow \theta_{k+n} = \theta_k + h \dot{\theta}_k$$

$$\frac{d\dot{\theta}_k}{dt} = \frac{\dot{\theta}_{k+n} - \dot{\theta}_k}{h} = -\omega_0^2 \sin\theta$$

$$\dot{\theta}_{k+n} = \dot{\theta}_k - h \omega_0^2 \sin\theta_k$$

2.) Mise en oeuvre

MC5 étude du pendule pesant : non isochronisme des oscillations

résolution par la méthode d'Euler

#importation des bibliothèques

import numpy as np

import matplotlib.pyplot as plt

#définition de la fonction pendule pesant

#on veut résoudre l'équation différentielle du pendule pesant en l'absence de frottements

#t varie entre a et b

#x=theta et v=x'=theta'

#wo=sqrt(mgd/J)=1rad/s=omega

def pendulepesant(a,b,xo,vo,omega,n):

t = a

x = xo

v = vo

h = (b-a)/n

les_t = [t]

les_x = [x]

les_v = [v]

for k in range(n):

t = t + h

x = x + h*v

v = v - h*omega**2*x*np.sin(x)

les_t.append(t)

les_v.append(v)

les_x.append(x)

← return(les_t,les_x,les_v)

#tracé des courbes :

#tracer les courbes theta(t) superposées pour 10 valeurs de vo comprises 0 et 3 rad/s

n = 1000

les_vo = np.linspace(0,3,10)

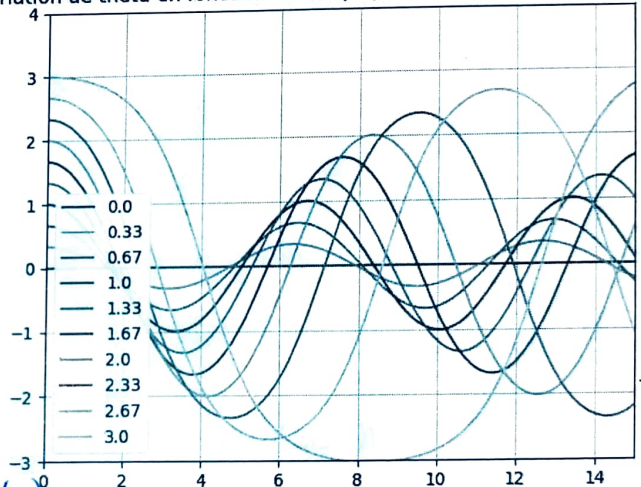
for k in range(10):

les_t, les_x, les_v = pendulepesant(0,15,0,les_vo[k],1,n)

plt.plot(les_t, les_x, label = str(round(les_vo[k],2)))

plt.axis([0,15,-3,10])

Variation de theta en fonction du temps pour différentes valeurs de theta0



```
plt.legend()
plt.grid()
plt.title("Variation de theta en fonction du temps pour différentes valeurs de (dtheta/dt)0")
plt.figure()
```

#tracer sur un nouveau graphe les courbes theta(t) superposées pour 10 valeurs de x0 comprises 0 et 3 rad

```
les_theta0 = np.linspace(0, 3, 10)
```

```
for k in range(10):
```

```
    les_t, les_x, les_w = pendule_pesant(0, 15, 0, les_theta[k], 0, 1, n)
```

```
    plt.plot(les_t, les_x, label = str(round(les_theta0[k], 2)))
```

↓
chaîne de caractère ↑
demande de la valeur

```
plt.axis([0, 15, -3, 4])
```

```
plt.legend()
```

```
plt.grid()
```

```
plt.title("Variation de theta en fonction du temps pour différentes valeurs de theta0")
```

```
plt.show()
```

Conclusion : Tabouret d'inertie

Syst {personne + partie tournante du siège}

Ref ter. gal.

commiss à son poids $\vec{P}$
- action de liaison

TMC au système / axe de rotat fixe (Δ)

$$\frac{dL_{\Delta}(\text{Syst}/R)}{dt} = M_{\Delta \text{ ext}}$$

$$= M_{\Delta}(\vec{P}) + M_{\Delta}(\text{liaison})$$

liaison parfaite $\Rightarrow M_{\Delta}(\text{liaison}) = 0$

$$M_{\Delta}(\vec{P}) = \vec{M}_O(\vec{P}) \cdot \vec{e}_3$$

$$= (\vec{OG} \wedge \vec{P}) \cdot \vec{e}_3 = 0$$

LP donc $\perp \vec{e}_3$

$$\frac{dL_{\Delta}(\text{Syst}/R)}{dt} = 0$$

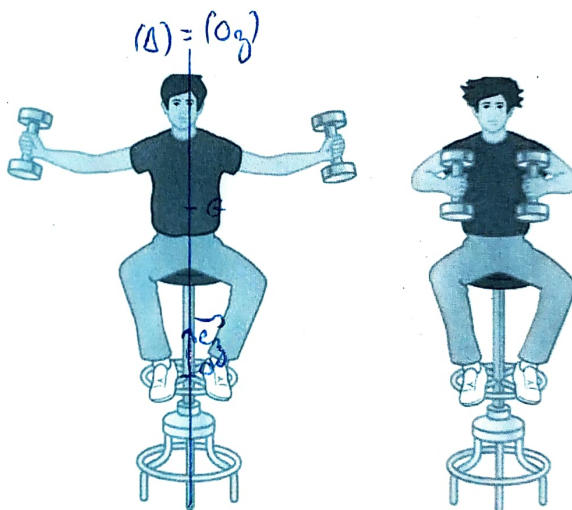
$$\Rightarrow L_{\Delta}(\text{Syst}/R) = \text{cste}$$

$$\text{Or } L_{\Delta}(\text{Syst}/R) = J_{\Delta} \omega$$

$$\underbrace{J_{\Delta e}}_{\text{bras écarté}} \omega_e = \underbrace{J_{\Delta s}}_{\text{bras séries}} \omega_s$$

$$\Rightarrow \omega_s = \frac{J_{\Delta e}}{J_{\Delta s}} \omega_e$$

$$J_{\Delta} = \sum m_i r_i^2 \text{ où } r_i \text{ la distance à l'axe de rotation}$$



La masse globale du syst n'a pas changé.
Par contre, on augmente la distance à l'axe Δ quand on écarte les bras donc $J_{\Delta e} > J_{\Delta s}$
On a donc $\boxed{\omega_s > \omega_e}$

bras séries, la vitesse angulaire de rotation est + grande

Rq: Δ Syst déformable
 $\Delta E_c = W_{int}$