PROGRAMMES 23 et 24.

PROGRAMME 23 : du 07/04 au 11/04

Espaces vectoriels de dimension finie

K est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

★ Familles remarquables finies de vecteurs : famille génératrice, famille libre, famille liée. Toute famille finie de polynômes non nuls à coefficients dans $\mathbb{K}$ et de degrés échelonnés est libre (la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est dite de degrés échelonnés si $\deg(P_0) < \cdots < \deg(P_n)$). *Corollaire* : Toute famille de polynômes non nuls, à degrés distincts 2 à 2, est libre. Si $(u_1, \dots, u_n)$ est une famille libre d'un K-ev E et $v \notin \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ alors $(u_1, \dots, u_n, v)$ est libre.

★ Base d'un ev. Une famille est une base d'un ev ssi tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de la base. Coordonnées d'un vecteur dans une base. Bases canoniques des espaces K^n, $K_n[X]$ et $\mathcal{M}_{n,p}(K)$.

Si $(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$ est une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E alors $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ et $\mathrm{Vect}(e_{k+1}, \dots, e_n)$ sont supplémentaires dans E.

★ Applications linéaires et bases (dans le cas où l'espace de départ admet une base finie) : caractérisation de $\mathrm{Im}\, f$ (engendré par l'image d'une base), de l'injectivité, de la surjectivité, de la bijectivité pour une application linéaire. Une application linéaire est entièrement caractérisée par la connaissance de l'image d'une base.

★ Un espace vectoriel de dimension finie est un espace admettant une famille génératrice finie. Existence d'une base. Théorème de la base extraite, théorème de la base incomplète. Toute famille libre a moins d'éléments que toute famille génératrice. Définition de la dimension d'un espace vectoriel. Dimensions de $K^n, K_n[X], \mathcal{M}_{n,p}(K)$. Droites et plans vectoriels. Si E est dimension n et $\mathcal{L}$ est une famille de n vecteurs de E, alors $\mathcal{L}$ est une base de E si et seulement si $\mathcal{L}$ est libre, si et seulement si $\mathcal{L}$ est génératrice de E.

★ Matrice d'une famille de vecteurs $(v_1, \dots, v_p)$ d'un K-ev E de dimension finie n dans une base de E. Lorsque $p = n$, la famille est une base de E ssi la matrice est inversible.

★ Relations entre les dimensions : Si F est un sous-espace d'un espace vectoriel E de dimension finie alors F est de dimension finie et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$. De plus, $F = E$ si et seulement si les deux dimensions sont égales. Existence d'un supplémentaire d'un sev d'un K-ev de dimension finie. Espaces isomorphes, caractérisation par la dimension. Sev supplémentaires : lien entre les dimensions, base adaptée. Dimension de la somme de deux sous-espaces (formule de Grassmann). Caractérisation des sev supplémentaires à l'aide des dimensions.

★ Notion de rang :

Rang d'une famille finie de vecteurs $(v_1, \dots, v_p)$ d'un K-espace vectoriel E de dimension quelconque. $\mathrm{rg}(v_1, \dots, v_p) \leq p$ et $\mathrm{rg}(v_1, \dots, v_p) = p$ ssi $(v_1, \dots, v_p)$ est libre.

Si E est de dimension finie, $\mathrm{rg}(v_1, \dots, v_p) \leq \dim(E)$ et $\mathrm{rg}(v_1, \dots, v_p) = \dim(E)$ ssi $(v_1, \dots, v_p)$ est génératrice de E.

Définition du rang d'une application linéaire de E dans F. Si E est de dimension finie, $\mathrm{rg}(f) \leq \dim(E)$ et $\mathrm{rg}(f) = \dim(E)$ ssi f est injective. Si F est de dimension finie, rg(f) $\leq$ dim(F) et rg(f) = dim(F) ssi f est surjective. Si E et F ont même dimension finie alors une application linéaire de E dans F est bijective si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective. Cas particulier des endomorphismes. Un endomorphisme d'un ev de dimension finie est bijectif si et seulement si il est inversible à gauche pour $\circ$, si et seulement si il est inversible à droite pour $\circ$. Théorème du rang. $\mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant \min(\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g))$. Invariance du rang par composition à droite ou à gauche par un isomorphisme.

Remarque pour les colleurs : Les matrices d'applications linéaires seront vues dans le chapitre suivant donc ne sont pas connues des étudiants pour l'instant.

Un résultat à énoncer

- ❒ Définition d'une famille génératrice, d'une famille libre dans un ev E.
- ❒ Définition d'une base, coordonnées.
- ❒ Image d'une base par une application linéaire : résultats d'injectivité, surjectivité, bijectivité.
- ❒ Définition de la dimension. Exemples de dimensions (ev usuels).
- ❒ Caractérisation d'une base d'un ev E de dimension finie n (3 énoncés équivalents : libre à n vecteurs, génératrice à n vecteurs, la matrice dans une base de E est inversible).
- ❒ Dimension d'une somme de sev.
- ❒ Caractérisation des sev supplémentaires en dimension finie.
- ❒ Définition d'une matrice d'une famille de vecteurs dans une base.
- ❒ Définition du rang d'une famille de vecteurs, d'une application linéaire. Résultats d'inégalités et d'égalités sur le rang.
- ❒ Caractérisation des isomorphismes en dimension finie.
- ❒ Théorème du rang.
- ❒ Invariance du rang par composition à droite ou à gauche par un isomorphisme.

Démonstrations

- ❒ Si A est triangulaire supérieure d'ordre n, inversible alors A^{-1} est triangulaire supérieure (on utilise la fonction $\varphi : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ M & \mapsto & AM \end{array}$ où E est l'espace des matrices triangulaires supérieures d'ordre n).
- ❒ Soit E et F des K-ev et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Si Ker(f) admet un supplémentaire G dans E alors $g : \begin{array}{ccc} G & \to & \mathrm{Im}(f) \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$ est un isomorphisme. En déduire le théorème du rang.
- ❒ Soit E, F, G des K-ev de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F), g \in \mathcal{L}(F, G)$.
  Alors, $\mathrm{rg}(g \circ f) \leq \mathrm{rg}(g)$ et $\mathrm{rg}(g \circ f) \leq \mathrm{rg}(f)$.

PROGRAMME 24 : du 14/04 au 18/04

Reprise des espaces vectoriels de dimension finie

Matrices

E et F sont deux K-ev de dimension finie.

- ★ Matrice d'une famille de vecteurs dans une base, d'une application linéaire dans un couple de bases. Application linéaire canoniquement associée à une matrice. Écriture matricielle de l'égalité vectorielle $y = f(x)$. Isomorphisme entre $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(K)$. Application au calcul de la dimension de $\mathcal{L}(E, F)$. Matrice d'une composée. Lien entre matrices inversibles et automorphismes. Une matrice est inversible si et seulement si elle est inversible à droite, si et seulement si elle est inversible à gauche.
- ★ Matrice de passage d'une base à une autre. Inversibilité et inverse. Effet d'un changement de base sur la matrice d'un vecteur, d'une application linéaire, d'un endomorphisme. Définition de matrices semblables.

Un énoncé au choix à demander

- ❒ Définition d'une famille génératrice, d'une famille libre dans un ev E.
- ❒ Image d'une base par une application linéaire : résultats d'injectivité, surjectivité, bijectivité.
- ❒ Définition de la dimension. Exemples de dimensions (ev usuels).
- ❒ Caractérisation d'une base d'un ev en dimension finie.
- ❒ Dimension d'une somme de sev.
- ❒ Caractérisation des sev supplémentaires en dimension finie.
- ❒ Définition du rang d'une famille de vecteurs, d'une application linéaire. Résultats d'inégalités et d'égalités sur le rang.
- ❒ Caractérisation des isomorphismes en dimension finie.
- ❒ Théorème du rang.
- ❒ Invariance du rang par composition à droite ou à gauche par un isomorphisme.
- ❒ Définition d'une matrice de vecteurs, d'une application linéaire.
- ❒ Interprétation de $y = f(x)$.
- ❒ Définition d'une matrice de passage.
- ❒ Formules de changements de bases.

Démonstrations

- ❒ Soit E et F des K-ev et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Si $\mathrm{Ker}(f)$ admet un supplémentaire G dans E alors $g: \begin{array}{ccc} G & \to & \mathrm{Im}(f) \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$ est un isomorphisme. En déduire le théorème du rang.
- ❒ Soit E, F, G des K-ev de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F), g \in \mathcal{L}(F,G)$.
  Alors, $\mathrm{rg}(g \circ f) \leq \mathrm{rg}(g)$ et $\mathrm{rg}(g \circ f) \leq \mathrm{rg}(f)$.
- ❒ Soit E et F des K-ev de dimension finie. Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ des bases respectives de E et F. Soit $(f,g) \in \mathcal{L}(E,F)^2, \lambda \in K$. Alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{BC}}(\lambda f + g) = \lambda \mathrm{Mat}_{\mathcal{BC}}(f) + \mathrm{Mat}_{\mathcal{BC}}(g)$.