

DS 6 : Mécanique et Chimie - Samedi 22 mars

PTSI La Martinière Monplaisir

Durée : 4 heures

⇒ Les calculatrices sont interdites ⇐

Veiller à la clarté de la rédaction et à l'homogénéité des équations. Présenter les résultats sous forme littérale avant de faire les applications numériques. Mettre en évidence (encadrer, souligner...) les résultats. La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation.

Le barème est donné à titre indicatif et pourra être légèrement ajusté au moment de la correction.

Les différentes parties sont indépendantes et peuvent être abordées dans l'ordre de votre choix.

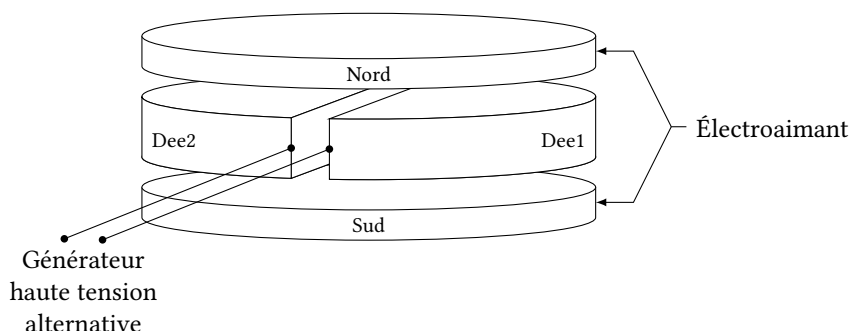
I Mouvement d'un proton dans un cyclotron (18% des points)

Un cyclotron utilise les champs électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{B}$ afin d'accélérer des particules chargées.

La radio-thérapie usuelle est remplacée par la protonthérapie (envoi de protons rapides sur les cellules cancéreuses en vue de les détruire) qui minimise les dégâts occasionnés aux tissus biologiques entourant la tumeur. Les protons à envoyer dans la tumeur sont accélérés à l'aide d'un cyclotron.

On va ici s'intéresser au principe d'un cyclotron qui pourrait être utilisé dans ce cadre. Le cyclotron est constitué de deux demi-cylindres horizontaux de rayon R très légèrement écartés et creux, les « Dees », au sein desquels règne un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme et constant d'intensité $B = 1.67 \text{ T}$.

A l'intérieur des Dees, il règne un vide poussé. Entre ces deux Dees, une tension haute fréquence de valeur maximale $U = 100 \text{ kV}$ crée un champ $\vec{E}$ perpendiculaire aux faces en regard des Dees.



Des protons de masse $m_p = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ et de charge $e = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$, animés d'une vitesse horizontale négligeable, sont injectés au point A_0 de l'espace séparant les deux Dees (voir annexe).

Dans tout ce problème, on admettra que le poids des protons est négligeable devant les forces électriques et magnétiques qu'ils peuvent subir, et que le mouvement des protons se fait dans un plan horizontal dans les Dees.

I.1 Étude du mouvement dans les Dees

On étudie le mouvement d'un proton qui pénètre pour la première fois dans le Dee 1 en A avec la vitesse $\vec{V}_1$, de norme V_1 (voir feuille annexe, schéma 1).

1. Montrer que le mouvement du proton dans un Dee est uniforme. En justifiant, représenter sur le schéma de la feuille annexe les vecteurs vitesse et force magnétique aux points M_1 et M_2 , ainsi que

les vecteurs champ magnétique dans chacun des Dees. (Les flèches indiquent le sens de parcours de la trajectoire).

2. Montrer que la trajectoire du proton dans le Dee 1 est circulaire de rayon R_1 et déterminer l'expression de R_1 en fonction de B, e, m_p et V_1 , en utilisant le repère de Frenet.

Ce résultat se généralise à la n ème traversée : le mouvement lors de la n ème traversée d'un Dee est circulaire uniforme de rayon R_n et de vitesse V_n en remplaçant R_1 par R_n et V_1 par V_n .

3. Exprimer, en fonction des données m_p, e, B et V_n , la distance d_n parcourue dans un Dee lors du n ème demi-tour.

4. Montrer que la durée Δt de parcours de la trajectoire dans un Dee est indépendante de la vitesse du proton et donner son expression en fonction de m_p, e et B .

I.2 Étude du mouvement entre les Dees

Entre les Dees, qui sont très faiblement écartés, le proton décrit une trajectoire rectiligne et est accéléré.

5. Préciser, en justifiant, la direction et le sens que doit avoir le champ électrique $\vec{E}$ entre les Dees quand le proton décrit A_0A , puis BC . Dans chaque cas, quel doit être le signe de la tension u (définie dans l'annexe, schéma 1) pour que les protons soient toujours accélérés quand ils passent entre les Dees ?

On néglige pour la suite la durée de passage entre les deux Dees devant la durée Δt du parcours d'un proton dans un Dee.

6. Le schéma 2 de l'annexe fournit le graphe de la tension $u(t)$. Noter sur ce graphe :

- le moment où le proton passe de A_0 à A , puis lorsqu'il passe de B à C ;
- la durée Δt de parcours de la trajectoire dans chacun des Dees.

Vous justifierez vos réponses.

7. Donner la relation entre la période T de la tension $u(t)$ et la durée Δt ; en déduire l'expression de la fréquence f de $u(t)$ en fonction de m_p, e et B . Faire l'application numérique.

II Satellites et moment cinétique (44% des points)

La troisième partie de ce problème est indépendante des deux premières.

On considère dans ce problème que la Terre possède une répartition de masse à symétrie sphérique, de centre O , de masse M_T et de rayon R_T . On pourra donc considérer que le champ gravitationnel créé par la Terre en un point M , extérieur à la Terre, est identique à celui créé par une masse ponctuelle M_T placée en O .

II.1 Préliminaire

1. On se place en un point M de l'espace, extérieur à la Terre et situé à une distance r du centre de celle-ci. On notera $\mathcal{G}$ la constante de gravitation universelle. Rappeler l'expression du champ gravitationnel $\vec{g}(M)$ créé par la Terre en un point M de l'espace.

On exprimera $\vec{g}$ en fonction de $\mathcal{G}, M_T, r$, et d'un vecteur unitaire que l'on précisera.

Représenter le vecteur $\vec{g}(M)$ sur un schéma.

II.2 Première partie : Satellite en mouvement autour de la Terre

On étudie le mouvement autour de la Terre d'un satellite S de masse m placé dans le champ gravitationnel terrestre. On néglige les frottements.

II.2.1 Caractéristiques du mouvement du satellite autour de la Terre

2. On se place dans le référentiel, considéré comme galiléen, qui a pour origine le centre de la Terre et ses trois axes dirigés vers trois "étoiles fixes". Quel est le nom de ce référentiel ? Déterminer l'expression de la force $\vec{f}$ à laquelle le satellite S est soumis. On exprimera $\vec{f}$ en fonction de $m, \mathcal{G}, M_T, r$ et d'un

vecteur unitaire que l'on précisera. Déterminer de même l'expression de la force $\vec{f}'$ à laquelle la Terre est soumise de la part du satellite. Justifier.

3. En appliquant le théorème du moment cinétique, montrer que le mouvement du satellite S est nécessairement plan. Sachant qu'à l'instant $t = 0$ le satellite se trouve au point M_0 et a une vitesse v_0 , préciser le plan dans lequel se fait le mouvement.

Dans la suite de cette partie, on se placera dans le cas d'une trajectoire circulaire de rayon r et d'altitude h autour de la Terre (avec $r = h + R_T$) et on utilisera les coordonnées cylindriques.

L'espace est rapporté à la base cylindrique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$, un point quelconque de l'espace étant repéré par ses coordonnées (r, θ, z) . Le plan dans lequel se fait le mouvement du satellite est le plan du repère cylindrique contenant l'origine O du repère (le point O étant le centre de la Terre) et les vecteurs $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$.

4. En appliquant le principe fondamental de la dynamique, montrer que le module v de la vitesse du satellite est nécessairement constant au cours du mouvement et déterminer son expression en fonction de $\mathcal{G}$, M_T et r .

II.2.2 Deuxième loi de Kepler et conséquences

5. Déterminer l'expression de la période T du mouvement de rotation de S autour de la Terre en fonction de v et de r puis en fonction de $\mathcal{G}$, M_T et r . En déduire la troisième loi de Kepler.

6. Indiquer une méthode pour déterminer la masse de la Terre.

7. Un autre satellite S' , de masse m' , en orbite circulaire autour de la Terre a une trajectoire de rayon r égal au rayon de la trajectoire de S. Les deux satellites tournent dans le même plan. S et S' risquent-ils de se heurter au cours de leur mouvement? On justifiera la réponse apportée.

II.3 Deuxième partie : Étude énergétique

La force à laquelle le satellite S est soumis dérive d'une énergie potentielle E_p qui peut s'écrire sous la forme $E_p = -\frac{\alpha}{r}$ avec α une constante positive. On prendra par convention une énergie potentielle nulle à l'infini.

Dans cette partie on ne se limite pas à un mouvement circulaire, mais on se placera dans le cas d'un mouvement quelconque du satellite S autour de la Terre.

On notera C la constante des aires donnée par $C = r^2 \dot{\theta}$.

8. Déterminer l'expression de α en fonction des données du problème.

9. Déterminer l'expression de l'énergie mécanique E_m du satellite S en fonction de m , r , $\dot{r}$, $\dot{\theta}$ et α . En déduire l'expression de l'énergie potentielle effective du satellite en fonction de m , C , r et α . Donner l'allure de la représentation graphique de l'énergie potentielle effective en fonction de r . En exploitant cette courbe, indiquer en fonction de la valeur de l'énergie mécanique le type de trajectoire suivie par le satellite et préciser dans chaque cas s'il s'agit d'un état de diffusion ou d'un état lié.

10. Déterminer l'énergie mécanique E_{mc} associée à une trajectoire circulaire de rayon r_c en fonction de r_c , m , $\mathcal{G}$ et M_T . Déterminer la première vitesse cosmique v_1 , vitesse du satellite sur une orbite basse de rayon R_T autour de la Terre en fonction de R_T , $\mathcal{G}$ et M_T .

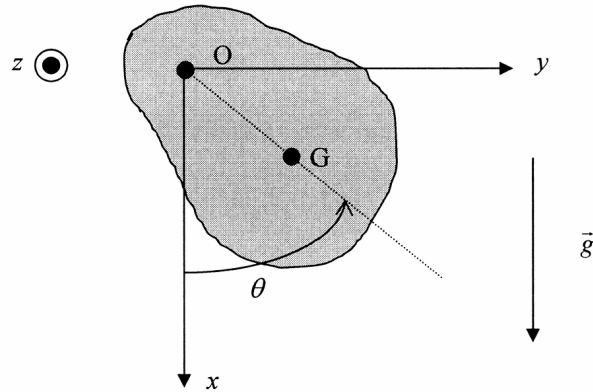
II.4 Troisième partie : Mesure de l'intensité du champ de pesanteur terrestre en un point

Un expérimentateur désire mesurer l'intensité du champ de pesanteur terrestre à la surface de la Terre. Il va pour cela utiliser tour à tour deux types différents de pendule.

II.4.1 Utilisation d'un pendule sans ressort de rappel

Un pendule est composé par un solide de masse m , de centre d'inertie G , mobile autour d'un axe horizontal (Oz) et de moment d'inertie J par rapport à l'axe (Oz) . Il peut effectuer des mouvements de rotation dans le plan vertical (Oxy) , autour de l'axe horizontal (Oz) . La position du pendule est repérée par

l'angle θ entre la droite (OG) et la verticale descendante. On notera a la distance OG . L'étude sera menée dans le référentiel terrestre considéré comme galiléen. Les frottements au niveau de l'axe de rotation et les frottements de l'air seront négligés. Le pendule ainsi décrit se trouve dans le champ de pesanteur terrestre caractérisé par le vecteur $\vec{g}$ tel que $\vec{g} = g\vec{e}_x$.



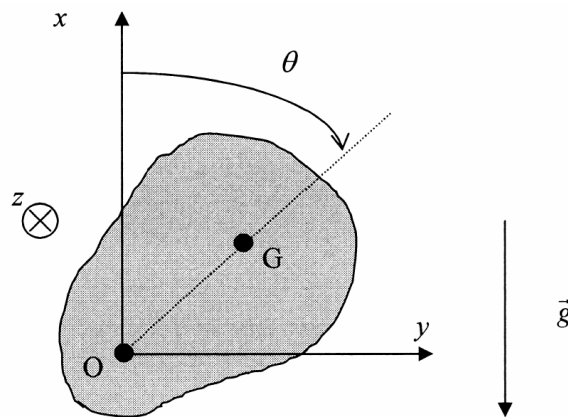
11. En appliquant le théorème du moment cinétique, déterminer l'équation différentielle vérifiée par l'angle θ au cours du temps.

12. Proposer un code python permettant de résoudre l'équation obtenue dans la question précédente à l'aide de la méthode d'Euler.

13. Déterminer la période T des petites oscillations du pendule autour de sa position d'équilibre, repérée par $\theta = 0$. On exprimera T en fonction de J , m , a et g .

II.4.2 Utilisation d'un pendule avec ressort spiral de rappel

Le pendule précédent est maintenant soumis à l'action d'un ressort spiral qui exerce un couple de rappel $M = -K\theta$ sur le pendule, où K est une constante positive. La position du pendule est repérée par l'angle θ entre la droite (OG) et la verticale ascendante.



On notera a la distance OG . L'étude sera menée dans le référentiel terrestre considéré comme galiléen. Les frottements au niveau de l'axe de rotation et les frottements de l'air seront négligés. Le pendule ainsi décrit se trouve dans le champ de pesanteur terrestre caractérisé par le vecteur $\vec{g}$ tel que $\vec{g} = -g\vec{e}_x$. L'énergie potentielle du ressort spiral ne dépend que de l'angle θ et de la constante K et est donnée par l'expression $E_p(\theta) = \frac{1}{2}K\theta^2$.

14. Exprimer l'énergie mécanique totale E_m du système pendule-ressort en fonction de K , θ , m , a , g , J et $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$. Par une méthode énergétique, trouver l'équation à laquelle obéit l'angle θ .

15. En considérant que l'angle θ reste petit, déterminer la condition à vérifier pour que la position $\theta = 0$ soit une position d'équilibre stable d'un oscillateur harmonique. La relation sera donnée sous la forme d'une relation entre K, g, m et a .

16. On considère que la condition de la question précédente est vérifiée. On souhaite étudier la sensibilité s_1 de ce pendule à une variation Δg du champ de pesanteur. On définit s_1 par le rapport $s_1 = \frac{\Delta T}{T}$ où ΔT représente une variation infiniment petite de la période du pendule engendrée par une variation infiniment petite Δg du champ de pesanteur.

On donne $s_1 = \frac{ma\Delta g}{2(K - mag)}$. Pour le ressort précédent, la sensibilité vaut $s_0 = \frac{\Delta g}{2g}$.

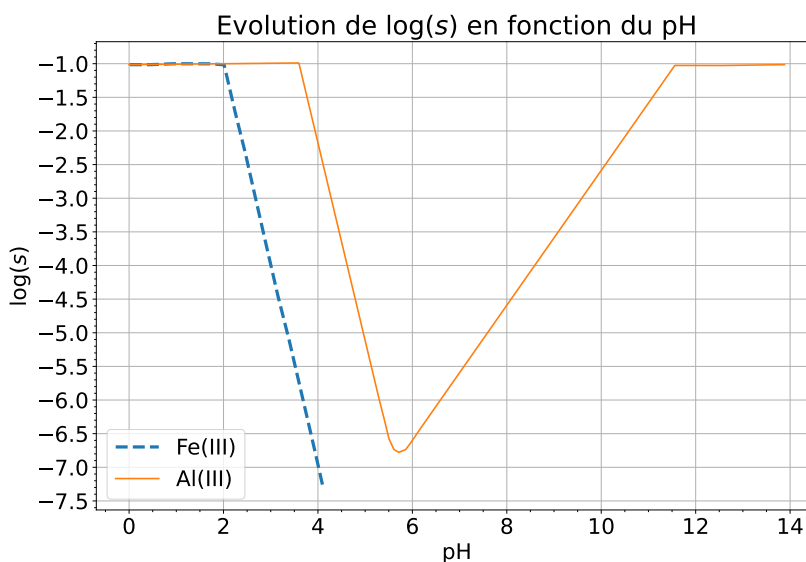
Montrer que l'on peut choisir la constante K de telle sorte que le deuxième pendule soit plus sensible que le premier et permette ainsi de détecter des variations plus faibles de champ de pesanteur terrestre. Exprimer cette condition sous forme d'une relation entre K, g, m et a .

III Précipitation (17% des points)

On supposera que, en fonction du pH de la solution aqueuse, le fer au nombre d'oxydation (+III) peut se trouver sous deux formes $\text{Fe}^{3+}(\text{aq})$ et $\text{Fe}(\text{OH})_3(\text{s})$ (solide rouille). L'aluminium au nombre d'oxydation (+III) peut être sous trois formes différentes : $\text{Al}^{3+}(\text{aq})$, $\text{Al}(\text{OH})_3(\text{s})$ solide blanc, ou $\text{Al}(\text{OH})_4^-(\text{aq})$.

On dispose d'une solution S contenant initialement des ions fer (+III) Fe^{3+} et aluminium (+III) Al^{3+} , à la même concentration $C_0 = 0,10 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$. On désire séparer ces deux ions.

La courbe en traits pleins sur la figure ci-dessous correspond au tracé du logarithme décimal de la solubilité de $\text{Al}(\text{OH})_3(\text{s})$ en fonction du pH (pour une concentration maximale $C_0 = 0,10 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ en $\text{Al}(\text{III})$ en solution) tandis que la courbe en pointillés correspond au tracé du logarithme décimal de la solubilité de $\text{Fe}(\text{OH})_3(\text{s})$ en fonction du pH (pour une concentration maximale $C_0 = 0,10 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ en $\text{Fe}(\text{III})$ en solution).



1. Sachant qu'on définit la solubilité par $s = [\text{Al}^{3+}] + [\text{Al}(\text{OH})_4^-]$, interpréter qualitativement l'évolution de $\log(s)$ lorsque le pH augmente pour l'aluminium : on donnera les équations des réactions ayant lieu et leur constante d'équilibre. Déterminer la valeur numérique des constantes d'équilibre.

2. En déduire le diagramme de prédominance/existence en pH des espèces de l'aluminium (III). On précisera les valeurs des frontières.

3. Calculer le produit de solubilité K_{S2} de $\text{Fe}(\text{OH})_3(\text{s})$ à l'aide du graphe.

4. Retrouver les expressions des portions de droites du graphe représentant $\log(s) = f(\text{pH})$ pour $\text{Fe}(\text{OH})_3(\text{s})$ dans le domaine de pH allant de 0 à 14. Attention dans cette partie on ne fera pas de relevés sur le graphe.

On considère qu'une espèce est "éliminée" de la solution lorsque sa concentration résiduelle est inférieure à $10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

5. Déterminer, à l'aide du graphe, dans quel(s) domaine(s) de pH on doit se placer pour éliminer les ions fer(III) de la solution tout en conservant les ions aluminium(III).

6. Vérifier par le calcul la valeur minimale de pH obtenue.

IV Acides fumarique et maléique (18% des points)

Les acides maléique (noté $MalH_2$) et fumarique ($FumH_2$) sont deux diacides carboxyliques éthyléniques diastéréoisomères l'un de l'autre (ils ont la même formule semi-développée $HO_2CCH=CHCO_2H$ mais leur arrangement spatial est différent : ils ne sont ni superposables, ni image l'un de l'autre par un miroir).



FIGURE IV.1 – Acides maléique et fumarique.

Préparé par hydrolyse de l'anhydride maléique (lui même obtenu par oxydation du benzène ou du butane), l'acide maléique est utilisé comme monomère pour la synthèse de polyesters insaturés et de copolymères acrylo-maléiques intervenant dans la formulation de certains détergents. Son isomérisation en milieu acide conduit à l'acide fumarique, produit naturellement présent dans les fruits et légumes, utilisé par exemple comme additif alimentaire (E 297) en tant qu'acidifiant et aussi pour la synthèse de polyesters insaturés.

Ce problème est consacrée à l'étude de quelques propriétés de ces deux acides carboxyliques.

Les données numériques utiles sont regroupées à la fin du sujet.

IV.1 Propriétés acido-basiques des deux diastéréoisomères

IV.1.1 Titrage de l'acide maléique seul

Le titrage d'une solution aqueuse d'acide maléique $MalH_2$ de concentration molaire C_0 inconnue à l'aide de soude de concentration molaire $C = 0,100 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ est simulé. La courbe donnant l'évolution du pH lors de l'addition de soude dans un bécher contenant initialement un volume d'essai $V_0 = 0,100 \text{ L}$ d'acide maléique est représentée figure IV.2.

1. Interpréter qualitativement cette courbe et en déduire la valeur de la concentration molaire C_0 .
2. Évaluer très simplement $pK_{A2}(MalH^- / Mal^{2-})$ à l'aide de cette courbe.
3. On donne $pK_{A1}(MalH_2 / MalH^-) = 1,8$. Peut-on retrouver cette valeur de manière analogue à celle du $pK_{A2}(MalH^- / Mal^{2-})$? Justifier.

IV.1.2 Titrage de l'acide fumarique seul

La simulation du titrage d'une solution aqueuse d'acide fumarique $FumH_2$ de concentration molaire C'_0 inconnue est réalisée dans les mêmes conditions que pour l'acide maléique. La courbe obtenue est représentée figure IV.3.

Les valeurs des pK_A de l'acide fumarique sont $pK_{A1}(FumH_2 / FumH^-) = 3,0$ et $pK_{A2}(FumH^- / Fum^{2-}) = 4,5$.

4. Interpréter qualitativement cette courbe de titrage.

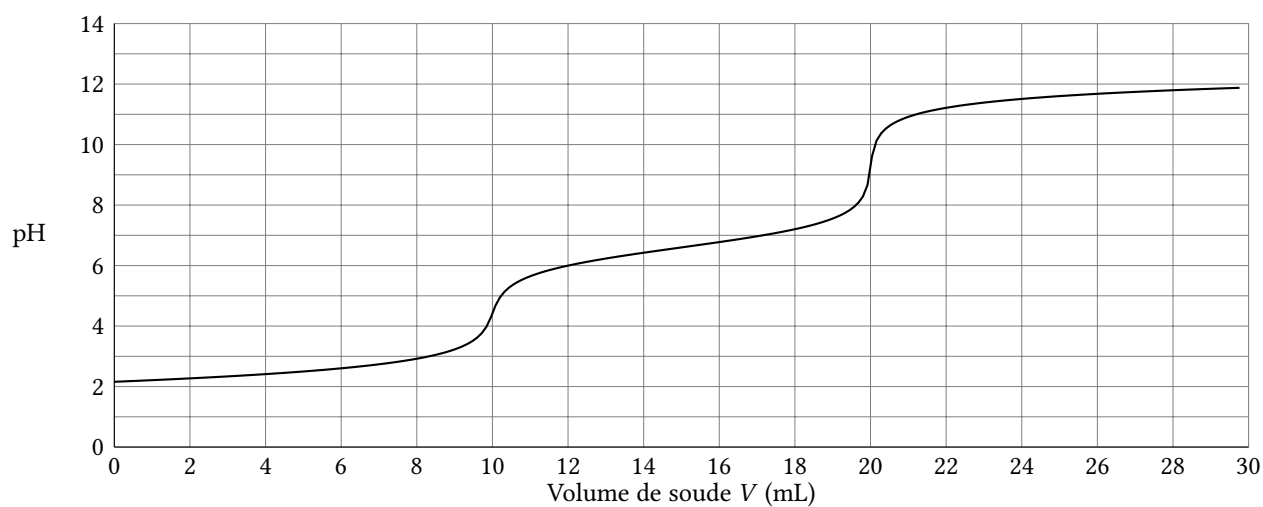


FIGURE IV.2 – Courbe simulée du titrage de l'acide maléique par la soude suivi par pH-métrie

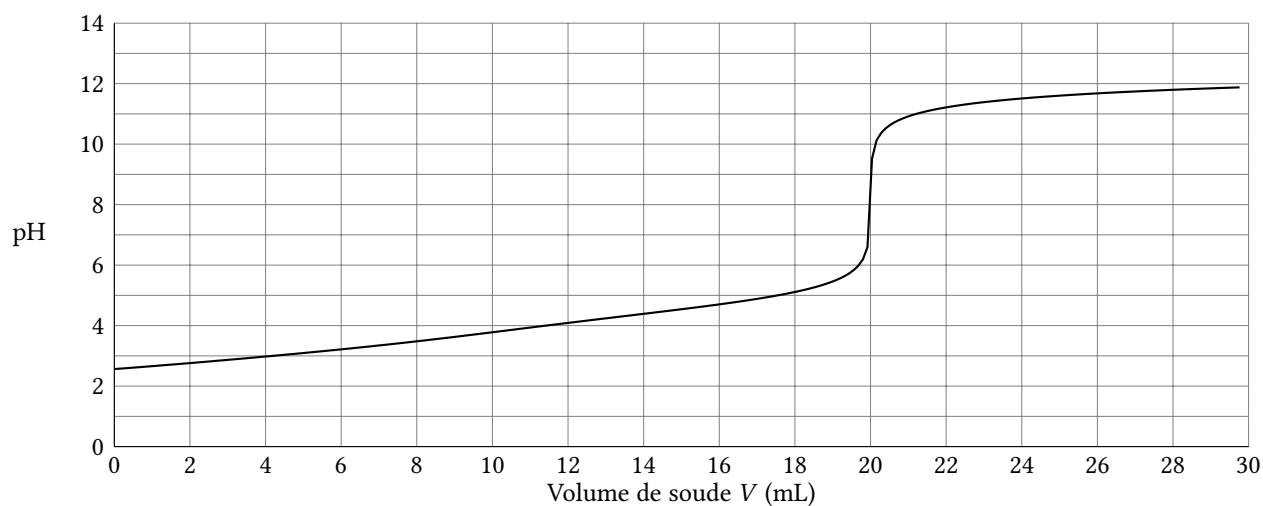


FIGURE IV.3 – Courbe simulée du titrage de l'acide fumarique par la soude suivi par pH-métrie.

5. Déduire de cette courbe la valeur de la concentration molaire C'_0 .

IV.1.3 Titration d'un mélange d'acides maléique et fumarique

La courbe simulée du titrage d'une solution aqueuse comportant un mélange d'acide maléique de concentration molaire C_M et d'acide fumarique de concentration molaire C_F est donnée figure IV.4. La dérivée de la courbe simulée $\text{pH} = f(V)$ est aussi tracée ; elle présente un léger maximum pour un volume versé de 14,5 mL et un maximum très prononcé pour 21,0 mL. Ces courbes ont été obtenues à partir d'un volume de prise d'essai du mélange titré de $V'_0 = 50,0$ mL et d'une solution titrante de soude de concentration molaire $C = 0,100 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

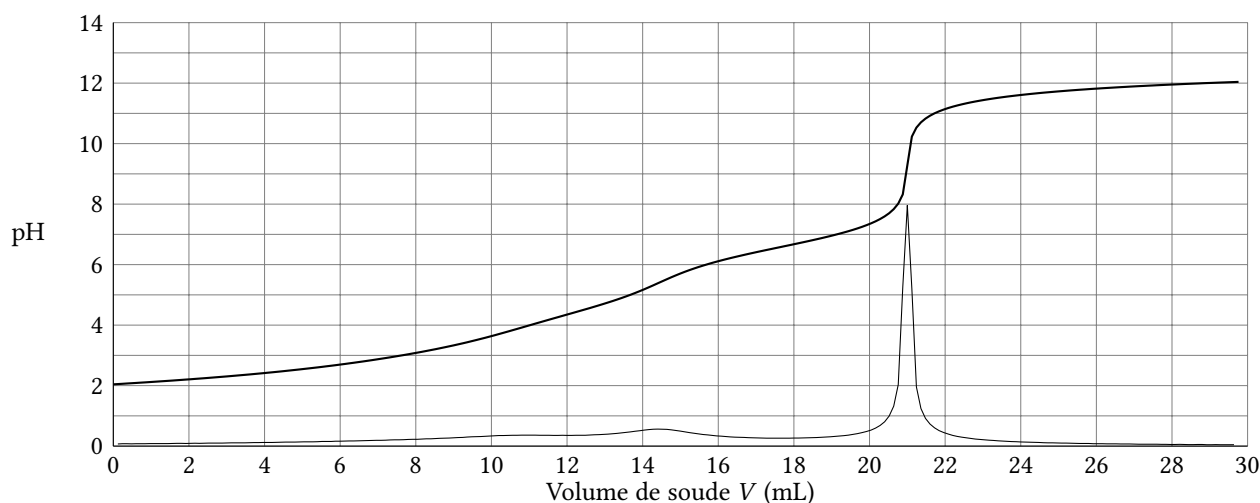


FIGURE IV.4 – Courbe simulée du titrage d'un mélange d'acide maléique et fumarique suivi par pH-métrie

6. Déterminer les valeurs des concentrations molaires C_M et C_F , en justifiant la méthode mise en œuvre.
7. Cette méthode vous semble-t-elle précise pour déterminer simultanément C_M et C_F ? Justifier.

IV.2 Propriétés physico-chimiques des deux diastéréoisomères

Les solubilités massiques dans l'eau de l'acide maléique, de l'acide fumarique et de l'acide benzoïque sont fournies dans les données à la fin de l'énoncé. Ces solubilités seront considérées comme indépendantes de la présence éventuelles d'autres espèces dissoutes.

8. Quels paramètres sont à considérer pour rendre compte de la solubilité d'une espèce chimique dans l'eau ? Quels sont ceux qui diffèrent entre l'acide maléique et l'acide fumarique ? Permettent-ils de prévoir quel est l'acide le plus soluble ?
9. Comment expliquer que l'acide fumarique et l'acide maléique aient des températures de fusion différentes ? Déterminer lequel a la température de fusion la plus élevée.

Données numériques

Solubilités, exprimées en grammes d'espèce chimique par litre d'eau pure.

	Acide maléique	Acide fumarique	Acide benzoïque
25 °C	790	7,0	2,4

ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE (Exercice 1)

NOM :

Prénom :

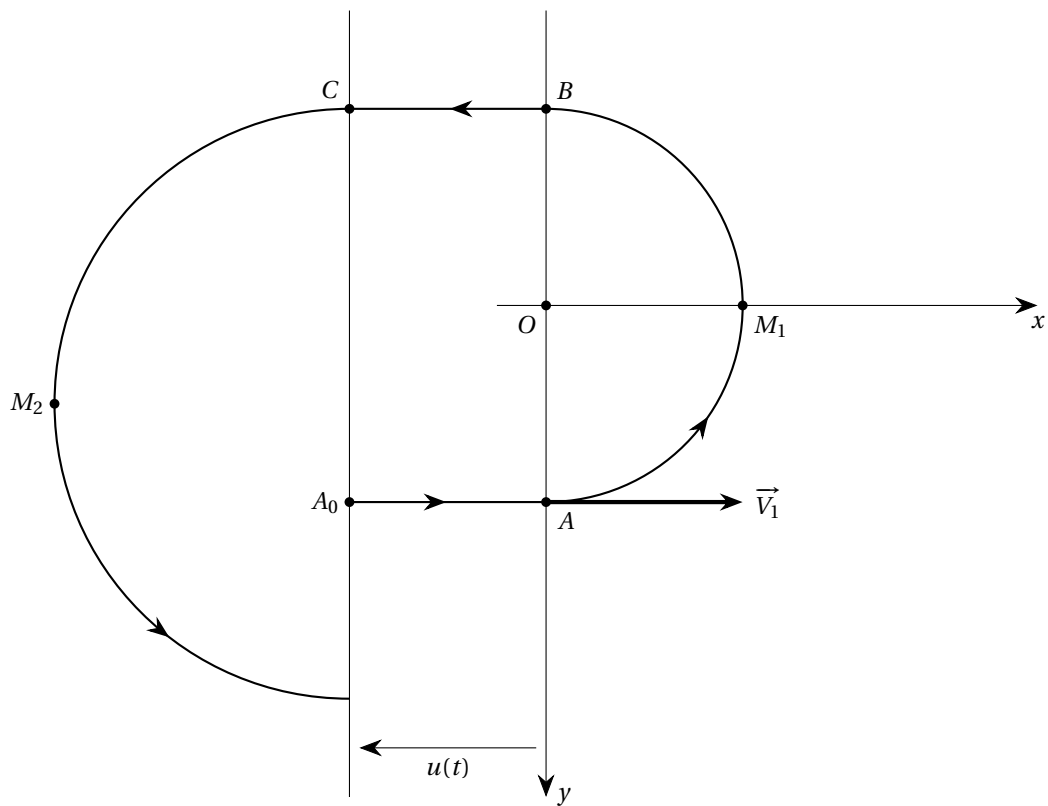


Schéma 1

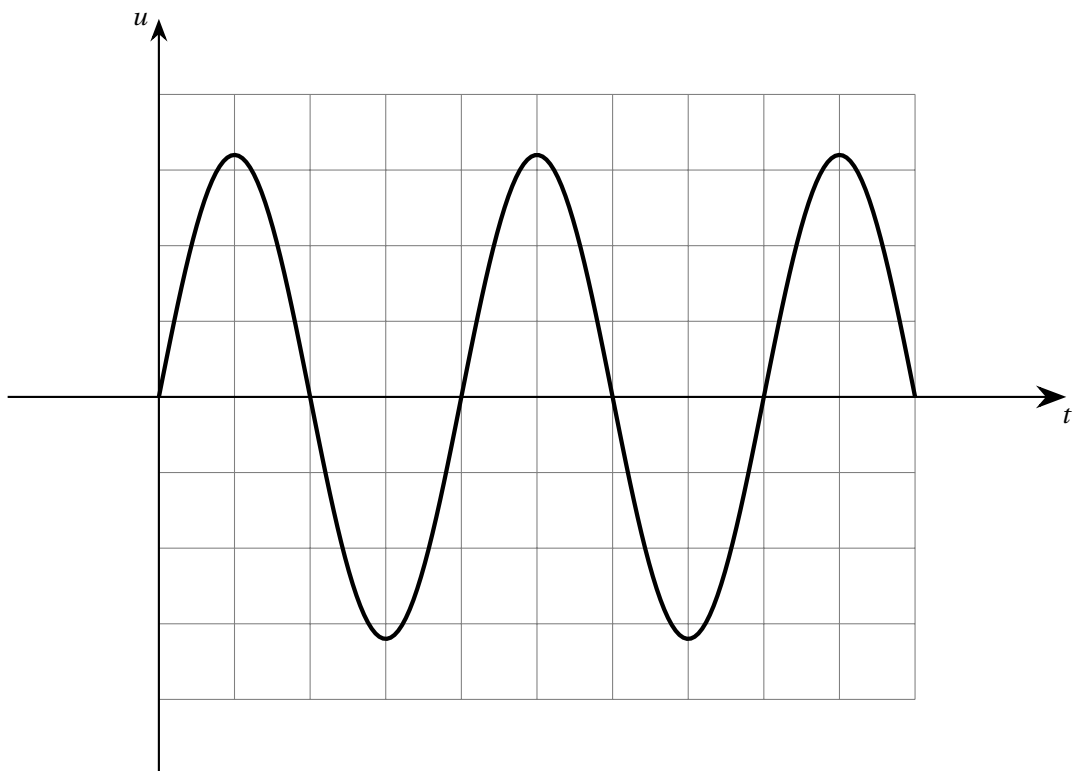


Schéma 2