PROGRAMMES 25 ET 26 .

PROGRAMME 25 : du 05/05 au 09/05

Les colles du jeudi 8 mai doivent être rattrapées.

Matrices

E et F sont deux K-ev de dimension finie.

★ Matrice d'une famille de vecteurs dans une base, d'une application linéaire dans un couple de bases. Application linéaire canoniquement associée à une matrice. Écriture matricielle de l'égalité vectorielle $y = f(x)$. Isomorphisme entre $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(K)$. Application au calcul de la dimension de $\mathcal{L}(E,F)$. Matrice d'une composée. Lien entre matrices inversibles et automorphismes. Une matrice est inversible si et seulement si elle est inversible à droite, si et seulement si elle est inversible à gauche.

★ Matrice de passage d'une base à une autre. Inversibilité et inverse. Effet d'un changement de base sur la matrice d'un vecteur, d'une application linéaire, d'un endomorphisme. Définition de matrices semblables.

★ Noyau, image et rang d'une matrice (définis comme le noyau, l'image, le rang de l'application linéaire canoniquement associée). Les opérations sur les lignes de A conservent le noyau, les opérations sur les colonnes de A conservent l'image de A. Théorème du rang. Caractérisations des matrices inversibles en termes de noyau, d'image, de rang. Correspondance entre les différentes notions de rang (matrice, famille de vecteurs, application linéaire). Conservation du rang par multiplication par une matrice inversible. Conservation du rang par opérations sur les lignes et/ou colonnes. Rang de la transposée. Le rang d'une matrice est égal au rang de ses lignes, le rang d'un système linéaire homogène est égal au rang de sa matrice. Le système $AX = B$ est compatible si et seulement si $B \in \mathrm{Im}(A)$.

Déterminants

★ Définition générale en dimension n : il existe une unique application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ vérifiant les trois propriétés suivantes :
— f est linéaire par rapport à chacune des colonnes de sa variable ;
— f est antisymétrique par rapport aux colonnes de sa variable ;
— $f(I_n) = 1$.
On notera $\det(A)$ le nombre $f(A)$ pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(K)$.

★ Propriétés du déterminant : le déterminant d'une matrice ayant deux colonnes égales est nul. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ pour tout $(\lambda, A) \in K \times \mathcal{M}_n(K)$. Effet d'un échange de colonnes, d'une transvection. Déterminant de la transposée d'une matrice carrée. Le déterminant vérifie les mêmes propriétés vis-à-vis des lignes que des colonnes. Développement par rapport à une colonne ou une ligne. Déterminant d'un produit de matrices carrées. Une matrice carrée A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$. Déterminant de l'inverse. Déterminant d'une matrice triangulaire.

★ Autres notions de déterminant : déterminant d'une famille de vecteurs dans une base. Caractérisation des bases. Déterminant d'un endomorphisme. Traduction sur les déterminants d'endomorphismes des propriétés vues sur les déterminants de matrices.

Dénombrement

- ★ Cardinal d'un ensemble fini. Notation $\mathrm{card}(A)$.
- ★ Propriétés des cardinaux : cardinal d'une partie d'un ensemble fini. Union disjointe ou quelconque de deux ensembles finis, différence d'ensembles, complémentaire et produit cartésien. Cardinal d'une réunion d'ensembles disjoints 2 à 2. La formule du crible est hors programme.
- ★ Nombre de p-listes (p-uplets) d'éléments d'un ensemble fini de cardinal n. Cardinal de l'ensemble des applications d'un ensemble fini dans un ensemble fini.
- ★ Nombre de p-listes (ou p-uplets) d'éléments distincts d'un ensemble de cardinal n (p-arrangements). Nombre d'applications injectives d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal n. Définition d'une permutation, nombre de permutations d'un ensemble de cardinal n.
- ★ Nombre de parties à p éléments (ou p-combinaisons) d'un ensemble de cardinal n. Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.
- ★ Démonstrations combinatoires des formules du triangle de Pascal et du binôme. Calcul de $\mathrm{card}(\mathcal{P}(E))$ où E est un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.
- ★ Principe des tiroirs.

Un résultat à énoncer

- ❒ Définition d'une matrice de vecteurs, d'une application linéaire.
- ❒ Interprétation de $y = f(x)$.
- ❒ Définition d'une matrice de passage.
- ❒ Formules de changements de bases.
- ❒ Définition de la fonction det (fonction n-linéaire et antisymétrique par rapport aux colonnes de sa variables et telle que $\det(I_n) = 1$).
- ❒ Propriétés calculatoires du det (échange colonnes (ou lignes), invariance par transvection, $\det(\lambda A)$, det d'un produit, det de la transposée).
- ❒ Formule de développement d'un déterminant par rapport à une ligne ou une colonne.
- ❒ Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base.
- ❒ Déterminant d'un endomorphisme. Indépendance par rapport à la base.
- ❒ Propriétés des cardinaux (réunion disjointe ou pas, différence d'ensembles, complémentaire, produit cartésien).
- ❒ Définition d'une p-liste, d'un p-arrangement, d'une permutation, d'une p-combinaison.

Démonstrations

- ❒ Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. A est inversible ssi $\det A \neq 0$. Dans ce cas, $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$.
- ❒ Calcul du déterminant de Vandermonde : $V(a,b,c) = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$ où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.
- ❒ Démonstration combinatoire :
  Soit $n \geq 2$ et $1 \leq p \leq n-1$. $p\dbinom{n}{p} = n\dbinom{n-1}{p-1}$ (« Formule du capitaine »)

PROGRAMME 26 : du 12/05 au 16/05

Reprise des matrices, déterminants et dénombrement

Espaces probabilisés finis : début

- ★ Lien entre vocabulaire ensembliste et vocabulaire des probabilités. On se limite aux univers finis. Événement élémentaire, système complet d'événements, événements disjoints ou incompatibles, événement contraire. Une variable aléatoire X est une application définie sur l'univers Ω à valeurs dans un ensemble E.
- ★ Probabilité sur un univers fini. Espace probabilisé (Ω, P). Propriétés des probabilités : réunion de deux événements, événement contraire, différence, croissance. La formule du crible est hors programme. Notations $P(X \in A), P(X = x), P(X \leq x)$. Une probabilité P sur Ω est déterminée par la distribution de probabilités $(P(\{\omega\})_{\omega\in\Omega}$ (famille finie d'éléments de $\mathbb{R}_+$ de somme 1). Probabilité uniforme.
- ★ Définition d'une probabilité conditionnelle P_A. Une probabilité conditionnelle est une probabilité. Formule des probabilités composées, des probabilités totales, de Bayes.

Un résultat à énoncer

- ❒ Définition d'une matrice de vecteurs, d'une application linéaire.
- ❒ Interprétation de $y = f(x)$.
- ❒ Définition d'une matrice de passage.
- ❒ Formules de changements de bases.
- ❒ Définition de la fonction det (fonction n-linéaire et antisymétrique par rapport aux colonnes de sa variables et telle que $\det(I_n) = 1$).
- ❒ Propriétés calculatoires du det (échange colonnes (ou lignes), invariance par transvection, $\det(\lambda A)$, det d'un produit, det de la transposée).
- ❒ Formule de développement d'un déterminant par rapport à une ligne ou une colonne.
- ❒ Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base.
- ❒ Déterminant d'un endomorphisme. Indépendance par rapport à la base.
- ❒ Propriétés des cardinaux (réunion disjointe ou pas, différence d'ensembles, complémentaire, produit cartésien).
- ❒ Définition d'une p-liste, d'un p-arrangement, d'une permutation, d'une p-combinaison.
- ❒ Définition d'un système complet d'événements.
- ❒ Définition d'une probabilité.
- ❒ Propriétés des probabilités (événement contraire, différence d'ensembles, réunion de 2 événements, croissance).
- ❒ Définition de la probabilité uniforme.
- ❒ Définition d'une probabilité conditionnelle.
- ❒ Formule des probabilités composées.
- ❒ Formule des probabilités totales.
- ❒ Formule de Bayes.

Démonstrations

- ❐ Calcul du déterminant de Vandermonde : $V(a,b,c)=\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{vmatrix}$ où $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$.
- ❐ Démonstration combinatoire :
  Soit $n\geq 2$ et $p\leq 1\leq n-1$. $p\binom{n}{p}=n\binom{n-1}{p-1}$ (« Formule du capitaine »)
- ❐ Formule des probabilités totales.