
PROGRAMMES 27 ET 28 .

PROGRAMME 27 : du 19/05 au 23/05

ESPACES PROBABILISÉS FINIS

- ★ Lien entre vocabulaire ensembliste et vocabulaire des probabilités. On se limite aux univers finis. Événement élémentaire, système complet d'événements, événements disjoints ou incompatibles, événement contraire. Une variable aléatoire X est une application définie sur l'univers Ω à valeurs dans un ensemble E .
- ★ Probabilité sur un univers fini. Espace probabilisé (Ω, P) . Propriétés des probabilités : réunion de deux événements, événement contraire, différence, croissance. La formule du crible est hors programme. Notations $P(X \in A, P(X = x), P(X \leq x)$. Une probabilité P sur Ω est déterminée par la distribution de probabilités $(P(\{\omega\}))_{\omega \in \Omega}$ (famille finie d'éléments de $\mathbb{R}_+$ de somme 1). Probabilité uniforme.
- ★ Définition d'une probabilité conditionnelle P_A . Une probabilité conditionnelle est une probabilité. Formule des probabilités composées, des probabilités totales, de Bayes.
- ★ Loi P_X d'une variable aléatoire. La loi de X est déterminée par la connaissance de $X(\omega)$ et des valeurs $P(X = x)$ pour $x \in X(\omega)$. On note $X \sim Y$ la relation $P_X = P_Y$. Variable aléatoire $f(X)$. Loi de $f(X)$. Si $X \sim Y$ alors $f(X) \sim f(Y)$. Loi conditionnelle d'une variable aléatoire sachant un événement A .
- ★ Couple de variables aléatoires : La loi conjointe de X et Y est la loi de (X, Y) , les lois marginales de (X, Y) sont les lois de X et de Y . La loi conjointe permet d'en déduire les lois marginales. Notation $P(X = x, Y = y)$ pour désigner $P((X = x) \cap (Y = y))$. Extension aux n -uplets de variables aléatoires.
- ★ Indépendance de deux événements, de n événements. L'indépendance implique l'indépendance 2 à 2 mais la réciproque est fausse. Si A et B sont indépendants alors A et $\overline{B}$ le sont aussi. Indépendance de 2 variables aléatoires (notation $X \perp\!\!\!\perp Y$), de n variables aléatoires. Si X et Y sont indépendantes alors $f(X)$ et $g(Y)$ le sont. Lemme des coalitions : si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes alors $f(X_1, \dots, X_m), g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.
- ★ Lois usuelles : Loi uniforme sur $\{x_1, \dots, x_n\}$. Loi de Bernoulli de paramètre p dans $[0, 1]$. Notation $X \sim \mathcal{B}(p)$. Lien entre variable aléatoire de Bernoulli et indicatrice d'un événement. Loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$. Notation $X \sim \mathcal{B}(n, p)$. Interprétations des lois. Si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes et suivent la même loi $\mathcal{B}(p)$ alors $X_1 + \dots + X_n$ suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$.

UN RÉSULTAT À ÉNONCER

- ☐ Définition d'un système complet d'événements.
- ☐ Définition d'une probabilité.
- ☐ Propriétés des probabilités (événement contraire, différence d'ensembles, réunion de 2 événements, croissance).
- ☐ Définition de la probabilité uniforme.
- ☐ Définition d'une probabilité conditionnelles.
- ☐ Formule des probabilités composées.
- ☐ Formule des probabilités totales.
- ☐ Formule de Bayes.
- ☐ Loi de $f(X)$ en fonction de X .
- ☐ Définition d'une loi conjointe, des lois marginales.
- ☐ Formule donnant une loi marginale connaissant la loi conjointe.
- ☐ Indépendance de 2 événements, de n événements.
- ☐ Définition d'une loi uniforme, d'une loi de Bernoulli. Interprétations.
- ☐ Définition d'une loi binomiale. Interprétation.

DÉMONSTRATIONS

- ☐ Formule des probabilités totales.
- ☐ *Exercice fait en cours :*

Une urne contient 6 boules numérotées de 1 à 6. On en tire une et on note son numéro X , on la remet ensuite dans l'urne. On retire alors toutes les boules dont le numéro est strictement supérieur à X . On tire une nouvelle boule, dont le numéro est noté Y . Déterminer la loi de X , la loi conjointe de (X, Y) puis la loi de Y .
- ☐ Si A et B sont indépendants alors $\overline{A}$ et B sont indépendants.

Pas de colles la semaine du 26 mai.

REPRISE DES ESPACES PROBABILISÉS FINIS

ESPÉRANCE ET VARIANCE

★ Espérance $E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$. Variable aléatoire centrée.

★ Linéarité, croissance, inégalité triangulaire ($|E(X)| \leq E(|X|)$).

★ Espérance d'une variable constante, uniforme, de Bernoulli, binomiale.

★ Formule du transfert : $E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)P(X = x)$.

La formule s'applique aux couples.

Si X et Y sont indépendantes alors $E(XY) = E(X)E(Y)$. La réciproque est fausse.

★ Variance et écart-type : $V(X) = E((X - E(X))^2)$. Variable réduite, centrée réduite. Relation $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$, relation $V(aX + b) = a^2V(X)$.

Variance d'une variable de Bernoulli, d'une variable binomiale.

★ Covariance de 2 variables aléatoires : $\text{Cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$.

Deux variables dont la covariance est nulle sont décorrélées.

Relation $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$. Cas de 2 variables indépendantes.

★ Variance d'une somme, cas de variables décorrélées. On retrouve la variance d'une variable binomiale.

★ Inégalité de Markov, inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

ANALYSE ASYMPTOTIQUE

★ Compléments sur les DL : Formule de Taylor-Young (développement limité à l'ordre n au voisinage d'un point a de I d'une application de classe $\mathcal{C}^n$ sur I). Primitivation des DL. Les étudiants doivent connaître les développements limités à tout ordre au voisinage de 0 de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$, $\exp$, $\sin$, $\cos$, $\text{ch } x$, $\text{sh } x$, $x \mapsto (1+x)^\alpha$, $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto \text{Arctan } x$ et de $\tan$ à l'ordre 3.

★ Relations de domination : cas des suites

□ Notations $u_n = O(v_n)$, $u_n = o(v_n)$, $u_n \sim v_n$.

□ Liens entre les relations de comparaison. Équivalence entre les relations $u_n \sim v_n$ et $u_n - v_n = o(v_n)$. Opérations sur les équivalents : produit, quotient, puissances. Équivalents classiques. Propriétés conservées par équivalence : signe (localement), limite. On ne somme pas, on ne fait pas la composée d'équivalent de manière générale (à part par la valeur absolue et la puissance α , indépendante de la variable).

★ Relations de comparaison : cas des fonctions. Adaptation aux fonctions des définitions et résultats du paragraphe précédent (en un point ou à l'infini).

★ Applications : Calcul d'équivalents et de limites. Étude locale d'une fonction : tangente, position relative de la courbe et de la tangente. Détermination d'asymptotes et études des positions relatives. Condition suffisante à l'ordre 2 pour un extremum local.

UN RÉSULTAT À ÉNONCER

Lorsque l'on énonce un résultat, bien définir tout ce dont on a besoin.

- ❑ Loi de $f(X)$ en fonction de X .
- ❑ Définition d'une loi conjointe, des lois marginales.
- ❑ Formule donnant une loi marginale connaissant la loi conjointe.
- ❑ Indépendance de 2 événements, de n événements.
- ❑ Définition d'une loi uniforme, d'une loi de Bernoulli. Interprétations.
- ❑ Définition d'une loi binomiale. Interprétation.
- ❑ Définition de l'espérance et propriétés.
- ❑ Formule du transfert.
- ❑ Définition de la variance et autre formule ($V(X) = E(X^2) - E(X)^2$). Relation $V(aX + b)$.
- ❑ Espérance et variance d'une variable de Bernoulli, d'une variable binomiale.
- ❑ Définition de la covariance et autre formulation.
- ❑ Variance d'une somme de 2 variables, de n variables.
- ❑ Inégalité de Markov.
- ❑ Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
- ❑ Formule de Taylor-Young.
- ❑ Primitivation d'un DL .
- ❑ 3 DL usuels.
- ❑ Définition d'un o ou d'un équivalent (suite ou fonction).
- ❑ Opérations possibles sur les équivalents.
- ❑ Conservation locale du signe pour des suites ou fonctions équivalentes.
- ❑ Condition suffisante pour avoir un extremum local en $x_0 \in I$ pour $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 .

DÉMONSTRATIONS

- ❑ Calcul de la variance d'une variable suivant une loi binomiale (connaissant l'espérance).
- ❑ *Loi faible des grands nombres* :
Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles, indépendantes et de même loi, d'espérance m et d'écart-type σ . On pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.
Pour tout $\varepsilon > 0$, $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$
- ❑ Déterminer le $DL_{2n+1}(0)$ de Arctan.