# PROGRAMME 29 .

## PROGRAMME 29 : du 17/06 au 21/06

## Reprise de l'espérance et de la variance

## Reprise de l'analyse asymptotique

## Intégration

- ★ Fonctions en escalier : Subdivision d'un segment. Fonctions en escalier définies sur un segment à valeurs réelles. Intégrale.
- ★ Intégrale d'une fonction continue sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ : Aucune construction n'est imposée. Les fonctions continues par morceaux sont hors programme. Il convient d'interpréter graphiquement l'intégrale d'une fonction continue à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ en terme d'aire mais tout développement théorique sur ce sujet est hors programme. Valeur moyenne. Notations $\displaystyle\int_{[a,b]} f$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_a^b f$. Linéarité, positivité et croissance de l'intégrale. Inégalité : $\displaystyle\left|\int_{[a,b]} f\right| \leqslant \int_{[a,b]} |f|$. Relation de Chasles. Extension de la notation $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ au cas où $b \leqslant a$. Propriétés correspondantes. L'intégrale sur un segment d'une fonction continue de signe constant est nulle si et seulement si la fonction est nulle.
- ★ Sommes de Riemann. Interprétation géométrique.
- ★ Calcul intégral : Si $f$ est une fonction continue sur l'intervalle $I$ et si $a$ est un point de $I$, alors $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de $f$ sur $I$ s'annulant en $x_0$. Toute fonction continue sur $I$ admet des primitives sur $I$. Calcul d'une intégrale au moyen d'une primitive. En particulier, pour $f$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, $\displaystyle\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = f(b) - f(a)$. Intégration par parties. Changement de variable.
- ★ Inégalité de Taylor-Lagrange.
- ★ Brève extension au cas des fonctions à valeurs complexes : Intégrale d'une fonction continue sur un segment, linéarité, majoration du module de l'intégrale, intégration par parties et changement de variable, inégalité de Taylor-Lagrange.

## Un résultat à énoncer

*Lorsque l'on énonce un résultat, bien définir tout ce dont on a besoin.*

- ❒ Définition de l'espérance et propriétés.
- ❒ Formule du transfert.
- ❒ Définition de la variance et autre formule ($V(X) = E(X^2) - E(X)^2$). Relation $V(aX + b)$.
- ❒ Espérance et variance d'une variable de Bernoulli, d'une variable binomiale.
- ❒ Définition de la covariance et autre formulation.
- ❒ Variance d'une somme de 2 variables, de $n$ variables.
- ❒ Inégalité de Markov.
- ❒ Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
- ❒ Formule de Taylor-Young.
- ❒ Primitivation d'un $DL$.
- ❒ 3 DL usuels.
- ❒ Définition d'un $o$ ou d'un équivalent (suite ou fonction).
- ❒ Opérations possibles sur les équivalents.
- ❒ Conservation locale du signe pour des suites ou fonctions équivalentes.
- ❒ Condition suffisante pour avoir un extremum local en $x_0 \in I$ pour $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $C^2$.
- ❒ Somme de Riemann associée à une fonction $f$ continue et résultat de convergence.
- ❒ Positivité, croissance, résultat avec la valeur absolue, linéarité de l'intégrale.
- ❒ Théorème fondamental de l'analyse.
- ❒ Inégalité de Taylor-Lagrange.

## Démonstrations

- ❒ Calcul de la variance d'une variable suivant une loi binomiale (connaissant l'espérance).
- ❒ Déterminer le $DL_{2n+1}(0)$ de Arctan.
- ❒ **Exercice fait en cours :**
  Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t$.
  Déterminer le domaine de définition de $F$, sa dérivabilité et préciser sa dérivée.