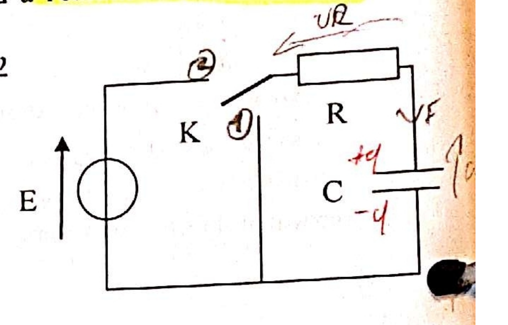
Introduction : les différents régimes

Lors du changement d'alimentation d'un circuit, on observe deux moments :
- Premier moment : le régime transitoire. Il dépend des conditions initiales et s'amortit rapidement.
- Deuxième moment : le régime permanent (ou établi ou forcé). Il est indépendant des conditions initiales et dure jusqu'au prochain changement.

On étudie deux régimes transitoires particuliers :
- le régime libre : c'est le régime que l'on observe lorsqu'on laisse évoluer un circuit ne contenant pas de sources, avec des conditions initiales non nulles.
- la réponse à un échelon de tension ou de courant. Ce régime correspond à l'établissement d'un régime continu.

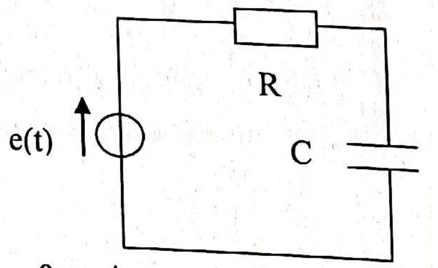
https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Elec/Transitoire/chargeRC_TS.php



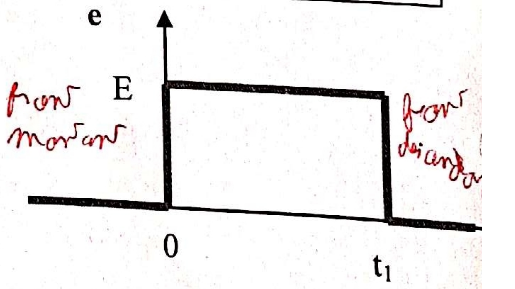
Quand K ① → ② : Charge :
* $U_C(T_q) = E \Rightarrow U_R = 0 \Rightarrow i = 0 \Rightarrow$ le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert.
* le C emmagasine de l'énergie ; u_C ↗.
* $i > 0$

Quand K ② → ① ; décharge : * $i < 0$
* le condensateur se comporte en générateur.
* l'énergie stockée est dissipée par effet Joule dans R

On utilise en général un GBF (générateur basses fréquences) avec un signal créneau, plutôt que d'utiliser un générateur continu avec un interrupteur.



. Quand on passe de $e=0$ à $e=E \Leftrightarrow K$ (① à ②)
quand $e=E$ vers $e=0$; $\Leftrightarrow K$ (② à ①)
$t_1 > 5\tau$



I Circuit RC série

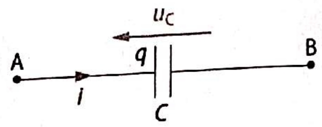
1.) Condensateur idéal.

a) Définition

Pour un condensateur idéal en convention récepteur, la tension et charge sont liés par la loi :
$u_C(t) = \frac{q(t)}{C}$ Coulomb où C est une constante positive appelée capacité du condensateur. en Farad (F)

Volt La tension et l'intensité sont liées par la loi : $i = C\frac{du_C}{dt}$, con rec

$u_C(t) = \frac{q(t)}{C} \Leftrightarrow q(t) = C u_C(t)$



or $i = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{d\, C u_C(t)}{dt} = C\frac{du_C(t)}{dt}$

EN CVR.

Rq : en régime continu : $u_C = Cste$
donc $i = C \times 0 = 0 \Rightarrow$ le courant ne circule pas
donc le condensateur se comporte en interrupteur ouvert.

b) Puissance et énergie reçues : $\boxed{\mathcal{E}_C = \frac{1}{2}Cu_C^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}}$

Propriété : La tension aux bornes d'un condensateur et sa charge sont des fonctions continues du temps (au sens des mathématiques).

$P(t) = u_C \times i = u_C \times C\frac{du_C}{dt} = C \times u_C \times \frac{du_C(t)}{dt}$

Rq $(f^2)' = 2ff'$
donc $\left(\frac{f^2}{2}\right)' = ff'$

Or $P(t) = \frac{d\mathcal{E}}{dt}$.

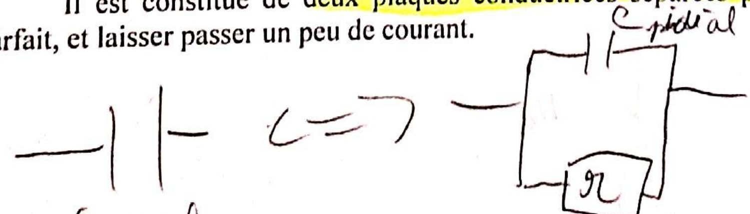
$P(t) = \frac{d\left(\frac{1}{2}Cu_C^2\right)}{dt}$

donc $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{d\left(\frac{1}{2}Cu_C^2\right)}{dt} \Rightarrow \mathcal{E} = \frac{1}{2}Cu_C^2 = \frac{1}{2}C\times\left(\frac{q(t)}{C}\right)^2$

$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$

c) Condensateur réel

Il est constitué de deux plaques conductrices séparées par un isolant. L'isolant peut ne pas être parfait, et laisser passer un peu de courant.



C réel, R

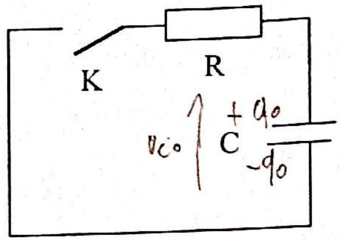
Donc C idéal i.e $R \to +\infty$
(car $i_R = \frac{U_R}{R} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$
donc $\boxed{R}$ se comporte comme →)

2.) Régime libre

Avant fermeture de l'interrupteur K, le condensateur est chargé et aucun courant ne circule dans le circuit.

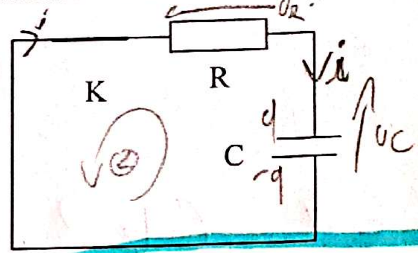
→ Donc pour $t<0$

dans de bonnes condition (environnement isolant, idéal, ...) le condensateur peut rester chargé à q_0.



A t=0, on ferme l'interrupteur. Pour t>0, on cherche à observer l'évolution de la tension aux bornes du condensateur, ainsi que la charge portée par l'armature du condensateur, et l'intensité du courant circulant dans ce circuit.

Condensateur toujours en CVR

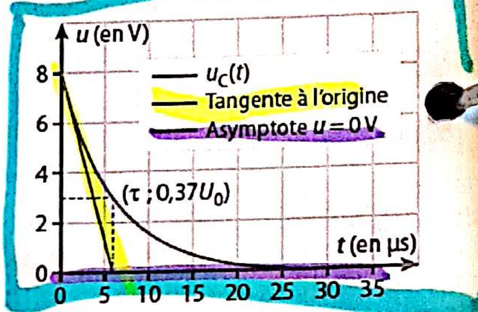


(1) — équation maille : $U_R - U_C = 0$

où $U_R = Ri$; $i = C\frac{dU_C}{dt}$

$$\Rightarrow RC\frac{dU_C}{dt} + U_C = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dU_C}{dt} = -\frac{U_C}{RC} \quad \text{Éq d}$$



(2) : on résout l'équa dif :

$$U_C(t) = A e^{-\frac{1}{RC}\times t} \; ; \; A \in \mathbb{R}, \; A = cst.$$

Démo ; séparation de variable ; $(\text{É}\,;\,d) \Rightarrow \int \frac{dU_C}{U_C} = \int -\frac{1}{RC}\, dt$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int \frac{1}{x}\, dx = \ln(x) + cst_1$$

$$\int -\frac{1}{RC}\, dt = -\frac{1}{RC}\int dt = -\frac{1}{RC}(t + cst) = -\frac{t}{RC} + cst_2$$

$$\text{donc } \ln(U_C) + cst_1 = -\frac{1}{RC}t + cst_2$$

$$\Rightarrow \ln(U_C) = -\frac{1}{RC}t + cst_3 \; ; \text{ où } cst_3 = -cst_1 + cst_2$$

$$\Rightarrow e^{\ln U_C} = e^{\left(-\frac{1}{RC}\times t + cst_3\right)} \Rightarrow U_C = A\, e^{-\frac{1}{RC}t} \; ; \text{ où } A = e^{(cst_3)}$$

(3) : Détermination A.

$E_{el} = \frac{1}{2}CU_C^2$ est continue, donc U_C aussi, donc $U_C(t=0^-) = U_C(t=0^+)$ (les égalités temps avant/après t)

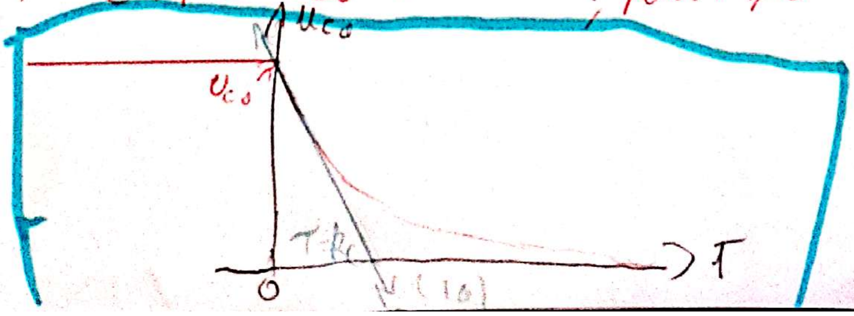
$$\Rightarrow U_{C0} = A\exp(0) \; ; \text{ donc } A = U_{C0}$$

Conclusion : $U_C(t) = U_{C0}\, e^{\left(-\frac{t}{RC}\right)}$, pour $t \geq 0$

Rq : $t = \tau$.

alors $U_C(\tau) = U_{C0}\exp\left(-\frac{RC}{RC}\right)$

$= 0{,}37\, U_{C0}$

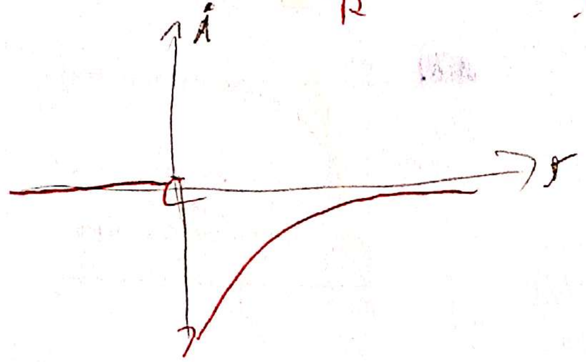


④ grandeurs

$* \ q(t) = C\, u_C(t) \Rightarrow q(t) = C u_{C0}\, e^{\left(\frac{-t}{RC}\right)}, t \geq 0$

$* \ i = C \frac{du_C}{dt}$, or $\frac{d\,u_C(t)}{dt} = \frac{d\left(u_{C0}\, e^{\left(\frac{-t}{RC}\right)}\right)}{dt} = \frac{-U_{C0}}{RC} e^{\left(\frac{-t}{RC}\right)}$

$\Rightarrow i = -\frac{U_{C0}}{R} e^{\left(\frac{-t}{RC}\right)} ; t \geq 0$

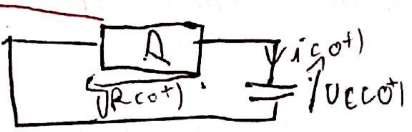


discontinuité THEORIQUE de i à $t=0$.

$\Rightarrow$ EXPERIMENTALEMENT, variation rapide de i.

Remarques : ① valeur initiales $(t=0^+)$ et finales $(t \to +\infty)$

en $t=0^+$



Par continuité : $U_C(0^+) = U_{C0}$

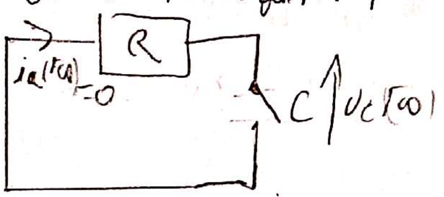
Or : $U_C(0^+) + U_R(0^+) = 0$

$\Rightarrow U_R(0^+) = -U_C(0^+) = -U_{C0}$

$\Rightarrow i(0^+) = \frac{U_R(0^+)}{R} = \frac{-U_{C0}}{R}$

à $t = +\infty$: On est en régime permanent, toutes les grandeurs sont constantes, C est comme à

$\Rightarrow$



Comme $C = \dots$ alors $i(\infty) = 0$

$\Rightarrow U_R(\infty) = R \times 0 = 0$

$\Rightarrow U_C(\infty) = 0 - U_R(\infty) = 0 - 0 = 0$

② Régime permanent à 1% près.

Alors $U_C(t_1) = \frac{U_{C0}}{100} \Rightarrow U_{C0}\, e^{\frac{-t}{RC}} = \frac{U_{C0}}{100} \Rightarrow e^{\frac{-t}{RC}} = \frac{1}{100}$

$\Rightarrow \frac{-t_1}{RC} = -\ln(100) \Rightarrow t_1 = \ln(100)\, RC \approx 4{,}6\, \tau$

On prend $\tau \geq 5$, alors $U_C \simeq 0$

③ Equation de (T_0) pour $U_C(t)$

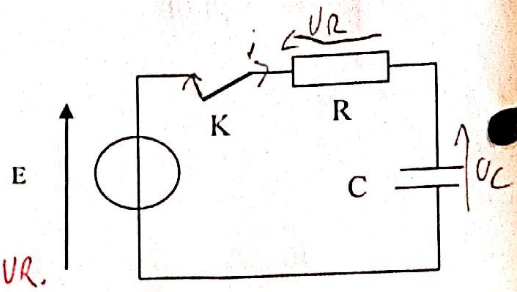
$y = U_C'(0)(t-0) + U_C(0) = \frac{-U_{C0}}{RC} e^0 t + U_{C0} e^0 = U_{C0} - \frac{U_{C0}}{RC} t$

Alors si $t = RC = \tau$, la droite (T_0) coupe l'axe des abscisses.

car $U_{C0} - \frac{U_{C0}}{RC} \times RC = 0$.

on a le point $I(\tau, 0)$ de (T_0)

3.) Réponse à un échelon de tension



A $t < 0$, C est déchargé : $U_C = 0$, $q = 0$

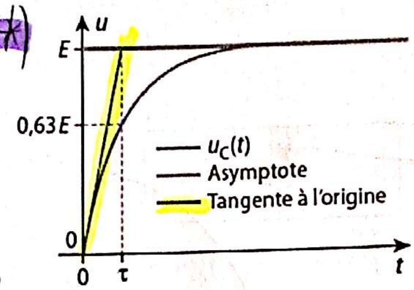
· à $t = 0$, on ferme K.

① · Équation de maille ; $\forall t > 0$: $E = U_R + U_C$; en U_R ; U_C en CVR.

$$\Rightarrow E = Ri + U_C \Rightarrow E = RC\frac{dU_C}{dt} + U_C$$

$$\Rightarrow \frac{dU_C}{dt} + \frac{1}{RC}U_C = \frac{E}{RC}$$

(*)



② Résolution de l'équa dif.

ⓐ solution libre : sans second membre : $\frac{dU_{cl}}{dt} + \frac{U_{cl}}{RC} = 0$

donc $U_{cl}(t) = A\, e^{\left(-\frac{t}{RC}\right)}$

ⓑ solution forcée : solution particulière de l'équation, du même type que le second membre ($U_{cf} = cst$ car $\frac{E}{RC} = cst$)

$$\frac{dU_{cf}}{dt} + \frac{1}{RC}U_{cf} = \frac{E}{RC} \Rightarrow \frac{1}{RC}U_{cf} = \frac{E}{RC} \text{ ; donc } U_{cf} = E.$$

ⓒ solution complète.

$$U_C(t) = U_{cl}(t) + U_{cf}(t) \Rightarrow U_C(t) = A\exp\left(\frac{-t}{RC}\right) + E$$

③ déterminer cst A. $E_c = \frac{1}{2}C u_C^2$; E_c continue donc U_C continue.

$U_C(t=0^-) = U_C(t=0^+)$. $U_{C0} = 0 = A\, e^{\left(\frac{-0}{RC}\right)} + E \Rightarrow 0 = A + E \Rightarrow A = -E$

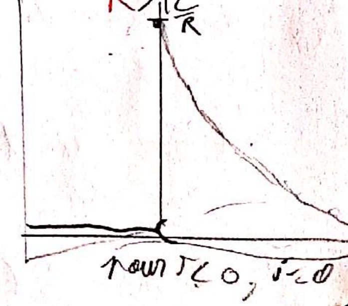
Conclusion : $U_C(t) = E\left(1 - e^{\left(\frac{-t}{RC}\right)}\right)$; pour $t \geq 0$

$\tau = RC$; on peut tracer les caractéristiques fournies (*)

point particulier : $U_C(\tau) = E\left(1 - e^{\left(\frac{-RC}{RC}\right)}\right) = E(1 - e^{-1}) \simeq 0{,}63E$

④ autres grandeurs.

$$i = C\frac{dU_C(t)}{dt} = C\left(E \times \frac{1}{RC}e^{\frac{-t}{RC}}\right) = \frac{E}{R}e^{\frac{-t}{RC}} \Rightarrow i = \frac{E}{R}e^{\frac{-t}{RC}}$$



On vérifie $U_C(0) = E\left(1 - e^{\frac{-0}{RC}}\right) = E(1-1) = 0$

$$\lim_{t \to +\infty} U_C(t) = E\left(1 - e^{\frac{-\infty}{RC}}\right) = E(1-0) = E$$

On a bien une asymptote à E U_C en $+\infty$ d'équation $y = E$.

Remarque :

① Valeur à $t = 0^+$: par continuité, $U_C(0^+) = U_C(0) = U_{C0} = 0$

Donc $\mathcal{E} = R\,i(0^+) + 0 \Rightarrow i(0^+) = \frac{\mathcal{E}}{R}$.

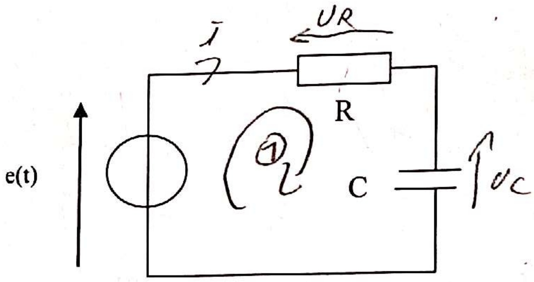
② Valeur à $t = \infty$

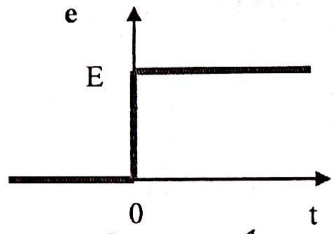
On est en régime continu permanent $\Rightarrow$ Toutes les grandeurs sont des constantes :

donc $U_C = cst \Rightarrow i = C\frac{dU_C}{dt} = C \times 0 = 0 \Rightarrow \boxed{i(\infty) = 0}$

Donc $\mathcal{E} = U_R(\infty) + U_C(\infty) \Rightarrow \mathcal{E} = i(\infty) \times R + U_C(\infty) = 0 \times R + U_C(\infty) \Rightarrow \boxed{U_C(\infty) = \mathcal{E}}$

4.) Aspect énergétique





① équation maille :

$e(t) = U_R + U_C$ ①

$= R\,i(t) + U_C$

$\Rightarrow i(t)\,e(t) = R\,i^2(t) + U_C\,i(t)$

$\Rightarrow i(t)\,e(t) = P_R(t) + P_C(t)$

$(\Leftrightarrow P_{fournie}(t) = P_{reçue\,R}(t) + P_{reçue\,C}(t))$

$\Rightarrow e(t)\,i(t) = R\,i^2(t) + C\,U_C\frac{dU_C}{dt}$

$= R\,i^2(t) + \frac{d\left(\frac{1}{2}C U_C^2\right)}{dt}$ ② donc $\int P_{reçue\,C} = \mathcal{E}_C = \frac{1}{2}C U_C^2$

(②) $\Rightarrow \int_0^t e\,i\,dt = \int_0^t R\,i^2\,dt + \int_0^t \frac{d\left(\frac{1}{2}U_C^2 C\right)}{dt}\,dt$

$\Rightarrow \mathcal{E}_{fournie\ g}$ de 0 à t $= \mathcal{E}$ reçue par R de 0 à t $+ \mathcal{E}_C$ reçue par C de 0 à t ③

(4) En réponse à 1 échelon de tension (voir page 6)

Bilan entre $t = 0^+$ et $t\infty$

① $\mathcal{E}$ reçue par C de 0 à $t\infty$ $= \int_0^t d\left(\frac{1}{2}C U_C^2\right) = \left[\frac{1}{2}C U_C^2\right]_0^{t\infty} = \frac{1}{2}C\left[U_C^2(t\infty) - U_C^2(0)\right]$

$\mathcal{E}$ reçue par C de 0 à $t\infty$ $= \frac{1}{2}\mathcal{E}^2 C$ (pour les valeurs $U_C(t\infty)$, $U_C(0^+)$: cf juste avant)

8 $\mathcal{E}_{\substack{\text{fournie par } q \\ \text{de } 0 \to +\infty}} = \int_{0^+}^{+\infty} E\, i\, dt = E \int_{0^+}^{+\infty} i\, dt$

$$= E\, C \int_0^{+\infty} \frac{du_C}{dt}\, dt$$

$$= C\, E\, [U_C]_0^{+\infty}$$

$\mathcal{E}_{\substack{\text{fournie par } q \\ \text{de } 0 \to +\infty}} = C E^2$ (cf valeur avant)

Or ③ : $\mathcal{E}_{\substack{\text{reçue de } R \\ 0 \to +\infty}} = \mathcal{E}_{\substack{q \\ 0 \to +\infty}} - \mathcal{E}_{\substack{C \\ 0 \to +\infty}} = C E^2 - \frac{1}{2} C E^2$

$\mathcal{E}_{\substack{\text{reçue de } R \\ 0 \to +\infty}} = \frac{1}{2} C E^2$ (dissipée par effet Joule en énergie thermique)

On remarque que $\mathcal{E}_{\substack{R \\ 0 \to +\infty}} = \mathcal{E}_{\substack{C \\ 0 \to +\infty}}$: l'énergie de q est répartie équitablement.

B) décharge du condensateur (cas $p = 4$)

(initialement chargé $U_C(0^+) = U_{C0}$

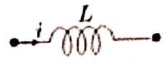
① $e = 0$ ③ $\Rightarrow$ $0 = \mathcal{E}_{\substack{R \\ 0 \to +\infty}} + \mathcal{E}_{\substack{C \\ 0 \to +\infty}}$

④ $\Rightarrow$ $\mathcal{E}_{\substack{C \\ 0 \to +\infty}} = \left[\frac{1}{2} C U_C^2\right] = \frac{1}{2} C \left(U_{C(+\infty)}^2 - U_{C(0^+)}^2\right) = \frac{1}{2} C \left(0^2 - U_{C0}^2\right)$

$\mathcal{E}_{\substack{C \\ 0 \to +\infty}} = -\frac{1}{2} C U_{C0}^2$

donc $\mathcal{E}_{\substack{R \\ 0 \to +\infty}} = -\left(-\frac{1}{2}\right) C U_{C0}^2 = \frac{1}{2} C U_{C0}^2$

II Circuit RL série



1.) Bobine idéale.

a) Définition

Pour une bobine idéale en convention récepteur, la tension et l'intensité sont liés par la loi : $\boxed{u_L = L\frac{di}{dt}}$ où L est une constante positive appelée inductance propre de la bobine. en Henry (H)

Ordres de grandeur de l'inductance :
L varie de quelques µH (1 spire) à quelques mH (1000 spires sans noyau de fer)
L ≅ 1H pour une bobine de 1000 spires avec noyau de fer en TP : $L = 0,1$ H
L ≅ 10 H à 100 H pour les électroaimants

En régime continu permanent : Toutes les grandeurs sont cst ; $i = cst$; donc $U_L = L\frac{di(t)}{dt} = 0$
⟺ La bobine se comporte comme un fil en régime continu.

b) Puissance et énergie reçues : $\boxed{\mathcal{E}_L = \frac{1}{2}Li^2}$

Propriété : L'intensité dans une bobine est une fonction continue du temps (au sens des mathématiques).

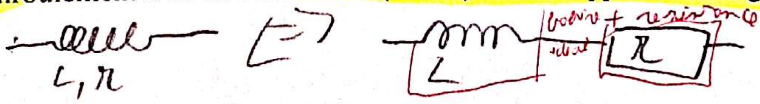
$P(t) = U_L(t) \times i(t) = L\frac{di(t)}{dt} \times i(t) \Rightarrow P(t) = \frac{d(\frac{1}{2}Li^2(t))}{dt}$; car $(\frac{1}{2}f^2)' = 2 \times \frac{1}{2}ff' = ff'$.

Or $\mathcal{E} = \int P(t)\,dt = \frac{1}{2}Li^2$

comme $\mathcal{E}$ est continue dans le temps, et que $\mathcal{E} = \frac{1}{2}Li^2$, alors l'intensité sera continue dans le temps. (ds la bobine)

c) Bobine réelle

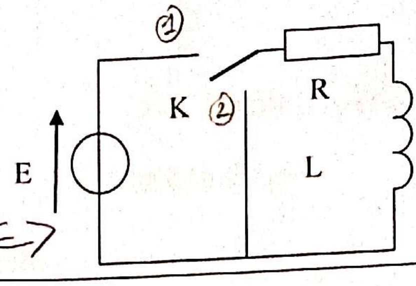
Enroulement d'un fil conducteur (cuivre) sur un support non magnétique, ou sans support.



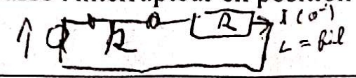
En TP : la résistance r n'est pas négligeable.

(bobine idéale : $r \to 0$; on la remplace par un fil)

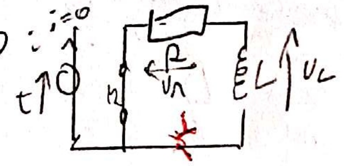
2.) Régime libre



Pour $t < 0$, l'interrupteur est en position 1 depuis très longtemps.
A t=0, on passe l'interrupteur en position 2.

$t = 0^-$  $i(0^-) = \frac{E}{R} = i_0$ (par maille ; $E = R\,i(0^-)$) $\Longleftrightarrow$

Méthode :
1. Equation de maille, qui permette de trouver une équation différentielle sur la grandeur qui nous intéresse.
2. Résolution de l'équation : solution complète = solution libre + solution forcée.
3. Détermination des constantes, en utilisant la continuité du courant dans une bobine (et de la tension aux bornes d'un condensateur.) → dans la cas de ... par exemple.

① à $t > 0$:  maille : $U_L + U_R = 0 \Rightarrow L\frac{di(t)}{dt} + iR = 0$

$\Rightarrow \frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = 0$

②. Donc on trouve $\frac{di}{dt} = -i\frac{R}{L} \Rightarrow i(t) = A\exp\left(-\frac{Rt}{L}\right)$

③. $\mathcal{E}_L = \frac{1}{2}Li^2$, donc comme $\mathcal{E}_L$ est continue, i est continue.

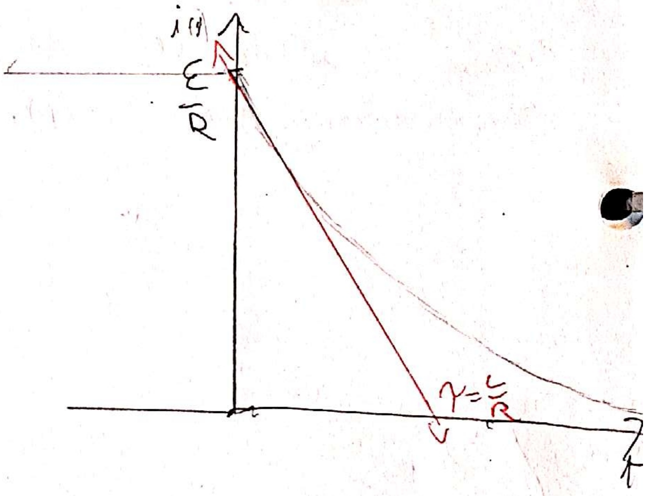
donc $i(0^-) = i(0^+) = i(0) = \frac{E}{R}$

donc $i(0) = A\,e^{\left(-\frac{R\,0}{L}\right)} = A = \frac{E}{R}$; donc $A = \frac{E}{R}$

donc $i(t) = \frac{E}{R}\,e^{-\frac{Rt}{L}}$, $t > 0$

$\lim_{t\to+\infty} i(t) = \frac{E}{R} * e^{-\infty \times \frac{R}{L}} = 0$

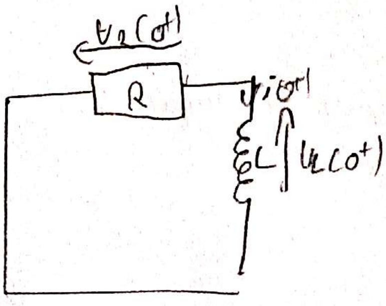
On note $\tau = \frac{L}{R} \Rightarrow i(t) = \frac{E}{R}\,e^{-\frac{t}{\tau}}$



④ autre grandeur :

$U_L = L\frac{di(t)}{dt} = L\frac{E}{R}\left(-\frac{R}{L}\right)e^{-\frac{tR}{L}}$

$U_L = -E\,e^{-\frac{tR}{L}}$

Remarque :
① à $t = 0^+$; 

Par continuité,
$i(0^+) = i(0) = i_0 = \frac{E}{R}$

$U_L(0^+) + U_R(0^+) = 0$

$\Rightarrow U_L(0^+) = -U_R(0^+) = -R\,i(0^+)$

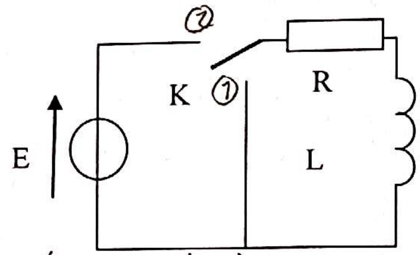
$\Rightarrow U_L(0^+) = -E$

② à t_∞, on est en régime continu permanent. Toutes les grandeurs sont cst. $i = cst \Rightarrow \frac{di}{dt} = 0 \Rightarrow u_L = L\times 0 = 0$

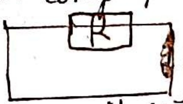
$\Rightarrow$ bobine idéale $\simeq$ fil

Equation de maille : $u_R(t_\infty) + u_L(t_\infty) = 0$
donc $u_R(t_\infty) + 0 = 0$; donc $R\,i(t_\infty) = 0$;
donc $i(t_\infty) = 0$

3.) Réponse à un échelon de tension



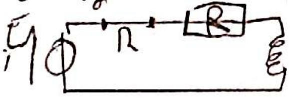
Pour $t<0$, K en ① depuis longtemps (t_∞)
donc on a la bobine = fils.



(Régime continu permanent ; $u_L(0^-)=0$; $u_R(0^-)=0$, $i(0^-)=0$

① à $t=0$, on passe en ② ; maille : $u_L+u_R=E$, donc $L\frac{di(t)}{dt} + iR = E$

pour $t>0$



② ⓐ solution libre : $\frac{di_l(t)}{dt} + \frac{i_l R}{L} = 0 \Rightarrow$ ... : $i_l(t) = A e^{-\frac{Rt}{L}}$

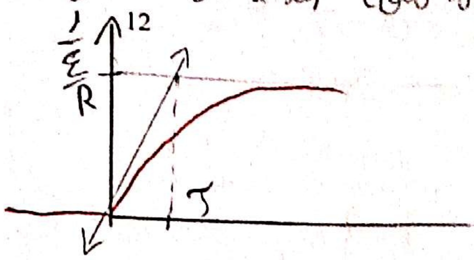
ⓑ solution forcée. De même type que $E = cst$, donc $i_f(t) = cst$
donc $L\cdot 0 + \frac{i_f R}{L} = \frac{E}{L}$, donc $E = i_f R$, donc $i_f = \frac{E}{R}$

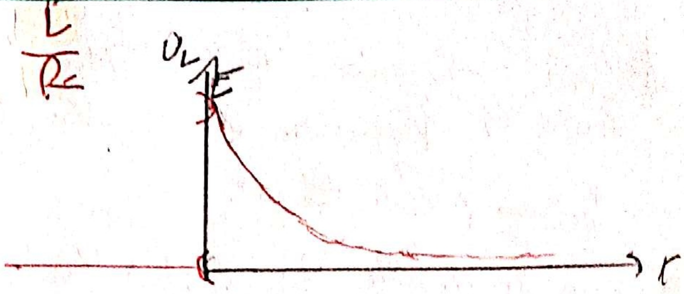
ⓒ complète, $i(t) = i_l(t) + i_f = A e^{\left(-\frac{Rt}{L}\right)} + \frac{E}{R}$

③ On détermine A. Comme $\mathcal{E}_L = \frac{1}{2} L i^2$, donc i est continue.
donc $i(0^+) = i(0^-) = i(0) = 0$, donc $A e^{-\frac{R0}{L}} + \frac{E}{R} = 0$; donc $A = -\frac{E}{R}$
donc $i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right)$

④ autre grandeur :
$u_L(t) = L\frac{di(t)}{dt} = L\times\frac{E}{R}\times\left(+\frac{R}{L}e^{-\frac{Rt}{L}}\right) = E\,e^{-\frac{Rt}{L}}$
donc $u_L(t) = +E\,e^{-\frac{R}{L}t}$

On a les courbes : On pose $\tau = \frac{L}{R}$





Remarque.

① à $t = 0^+$, par continuité de i ; $i(0^+) = i(0^-) = 0$

$\Rightarrow U_R(0^+) = R \times 0 = 0$.

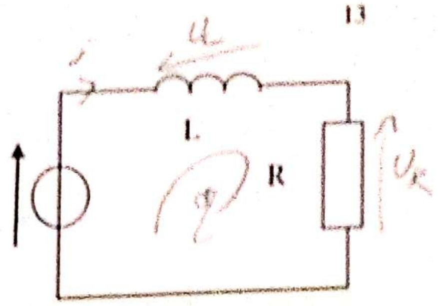
maille : $E = U_R + U_L \Rightarrow \underline{E = U_L(0^+)}$

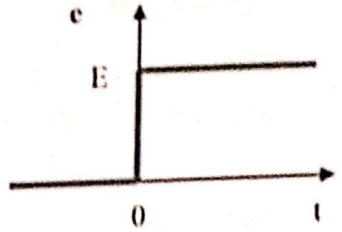
② à $t \to \infty$, on est en régime continu permanent, donc $i = cst$.

$\underline{U_L = L\frac{di}{dt} = 0}$, car $i = cst$ → bobine ≃ fil

Or $E = R\,i(t\to\infty) + U_L = R\,i(t\to\infty) \Rightarrow i(t\to\infty) = \frac{E}{R}$

4.) Aspect énergétique





① équation de maille :

$$e(t) = u_L + u_R$$

$$i(t)\,e(t) = L\frac{di(t)}{dt}i(t) + R\,i^2(t)$$

$$P_{\text{fournie}}(t) = P_{\text{reçue}\,L} + P_{\text{reçue}\,R}$$

donc $\displaystyle\int_0^t i(t)\,e(t) = \int_0^t L\frac{di(t)}{dt}i(t)\,dt + \int_0^t R\,i^2(t)$

$$\Rightarrow \mathcal{E}_{\substack{eg\\0\to t}} = \mathcal{E}_{\substack{r.L\\0\to t}} + \mathcal{E}_{\substack{r.R\\0\to t}}$$

② cas particulier : réponse à un échelon de tension. entre $t=0$ et $t\infty$.

$$\mathcal{E}_{\substack{r.L\\0\to t\infty}} = \int_0^{t\infty} L\frac{di(t)}{dt}\times i(t)\,dt = L\int_0^{t\infty}\frac{1}{2}\,i^2(t) = \frac{1}{2}L\left[i^2(t)\right]_0^{t\infty}$$ ③.

$$\mathcal{E}_{\substack{r.L\\0\to t\infty}} = \frac{1}{2}L\frac{E^2}{R^2}$$ (car $i^2(0) = 0$ $i^2(\infty)$; 4 ...)

$$\mathcal{E}_{\substack{eg\\0\to t}} = \int_0^{+\infty} e(t)\,i(t)\,dt = E\int_0^{\infty} i(t)\,dt \text{ . or } i(t) = \frac{E}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

$$\text{donc } \mathcal{E}_{\substack{eg\\0\to t}} = \frac{E^2}{R}\int_0^{+\infty}\left(1-e^{\left(-\frac{R}{L}t\right)}\right)dt = \frac{E^2}{R}\left[t+\frac{L}{R}e^{\left(-\frac{R}{L}t\right)}\right]_0^{+\infty}$$

donc $\mathcal{E}_{\substack{eg\\0\to+\infty}} \longrightarrow +\infty$ → On calcule pour $t_? = 5\tau$

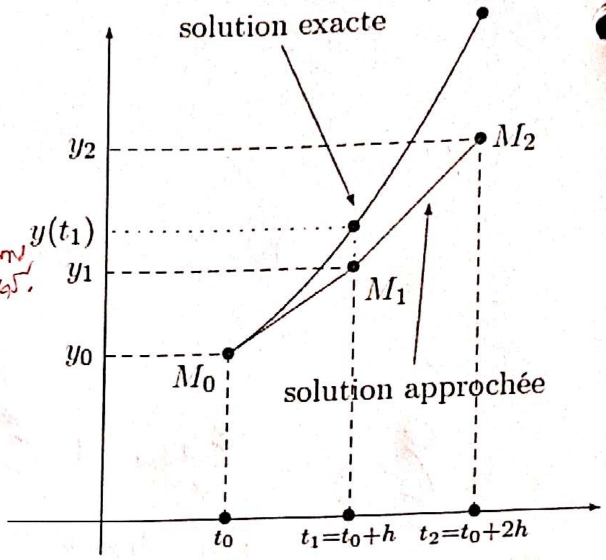
$$③ \Rightarrow \mathcal{E}_{\substack{r.R\\0\to 5\tau}} = \mathcal{E}_{\substack{eg\\0\to 5\tau}} - \mathcal{E}_{\substack{c\\0\to 5\tau}} = \frac{E^2}{R}\left[t+\frac{L}{R}e^{-\frac{R}{L}t}\right]_0^{5\tau} - \frac{1}{2}L\frac{E^2}{R^2}$$

III Méthode d'Euler

1.) Principe

→ l'équation différentielle

Soit y définie par $\boxed{y'(t) = F(y(t), t)}$ et $y(t_0)=y_0$ avec t_0 et y_0 fixés.



On souhaite obtenir une approximation de la fonction y sur l'intervalle [a,b] :

→ 1ère dérivation : plus pour moins d'écart.

- On subdivise l'intervalle [a,b] en n petits segments de longueur $h = \frac{b-a}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. On pose alors $t_0 = a$, $t_1 = t_0+h$, $t_2 = t_0 + 2h \ldots t_k = t_0+kh$, $t_n = t_0 +nh=b$

- On part de t_0. On approche le petit morceau de courbe entre t_0 et t_1 par la tangente à la courbe au point d'abscisse t_0.

↳ On crée une suite arithmético-géométrique.

On a $\underbrace{\frac{y_1-y_0}{h}}_{\text{pente}} = y'(t_0)$ d'où $y_1 = \underbrace{y_0 + hy'(t_0)}_{\text{tangente en } t_0}$ ou $y_1 = \underbrace{y_0 + hF(y_0, t_0)}_{\text{équa diff}}$

De manière générale, on pose pour tout k : $\frac{y_{k+1}-y_k}{h} = y'(t_k)$ d'où $y_{k+1} = y_k + hy'(t_k) = y_k + hF(y_k, t_k)$

Pour l'équation différentielle de la charge du circuit RC :

$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC}u_C = \frac{E}{RC}$ ⇒ On peut programmer : $\frac{du_C}{dt} = \frac{E-u_C}{RC}$ (1)

On pose $\tau = RC$. ⇒ $\frac{du_C}{dt} = \frac{E-u_C}{\tau}$

On cherche la dérivée à t_k : $\frac{du_C}{dt}(t_k) \approx \frac{u_C(t_{k+1}) - u_C(t_k)}{t_{k+1}-t_k}$ (3) ; or $h = t_{k+1} - t_k$; ch[illegible] dérivée ori[illegible]

⇒ $u_C(t_{k+1}) - u_C(t_k) = h\,\frac{du_C}{dt}(t_k)$

⇒ $u_C(t_{k+1}) = h\left(\frac{du_C}{dt}(t_k)\right) + u_C(t_k)$

par (1) ; $u_C(t_{k+1}) = h\left(\frac{E-u_C(t_k)}{\tau}\right) + u_C(t_k)$ (2)

2.) Mise en œuvre

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint


#l'équadiff s'écrit: u'(t)=f(u(t),t) avec f:(u,t)->(E - u)/tau
#la relation de récurrence s'écrit: u_{k+1} = u_k + h*f(u_k, t_k)

def ordre1_euler(tau, E, n):
    t = 0
    u = U0
    les_t = [0]          # liste des temps.
    les_u = [U0]         # liste des u.
    h = tmax / n         # pas / Raison
    for i in range(n):
        #les_t contient [t0,...,ti] et les_u contient [u0,...,ui]
        u = u + h * (E - u) / tau    # ②
        t = t + h  # ①
        les_u.append(u)
        les_t.append(t)
    return(les_t, les_u)    # ensemble des points (t; u)
##Tracé de la solution de la méthode d'Euler
E=5
U0=0
tau=1
tmax=6*tau
n = 10  #MODIFIER LE NOMBRE DE POINTS #(on aura 10 points, pas suffisant), # n=100 good.

les_t, les_u = ordre1_euler( tau, E, n)   # on récupère les [(t; u)]
plt.plot(les_t, les_u, color='b',label='euler')  # on trace la courbe
```

Pour une courbe + précise, on ↗ n.