# PROGRAMMES 5 et 6.

## PROGRAMME 5 : du 13/10 au 17/10

## Reprise des sommes

## Nouvelles fonctions usuelles

- ❒ Résultat sur la dérivabilité d'une fonction réciproque.
- ❒ Définition de Arcsin, dérivabilité et dérivée
- ❒ Définition de Arccos, dérivabilité et dérivée
- ❒ Définition de Arctan, dérivabilité et dérivée
- ❒ Définition de $\mathrm{ch}, \mathrm{sh}$, écriture de $\exp(x)$ en fonction de $\mathrm{ch}(x)$ et $\mathrm{sh}(x)$, formule reliant $\mathrm{ch}^2(x)$ et $\mathrm{sh}^2(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. Dérivées, variations et graphe.

*Remarque aux colleurs* : La seule formule de trigonométrie hyperbolique à connaître est $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$ pour $x \in \mathbb{R}$. La fonction tangente hyperbolique et les fonctions hyperboliques réciproques sont hors programme.

## Complexes : début

- ★ Parties réelle et imaginaire. Opérations sur les nombres complexes.
  Conjugaison, compatibilité avec les opérations.
- ★ Module d'un nombre complexe. Relation $|z|^2 = z\,\overline{z}$, module d'un produit, d'un quotient.
  Inégalité triangulaire, cas d'égalité.
- ★ Nombres complexes de module 1 : Notation $\mathbb{U}$. Définition de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$ pour $\theta$ réel. Si $\theta$ et $\theta'$ sont deux réels, alors : $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta'}$.
  Formules d'Euler : $\cos(\theta) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}}{2}$, $\sin(\theta) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}}{2i}$
  Formule de Moivre.
  Applications à la trigonométrie : Linéarisation, opération inverse.

*Remarque aux colleurs* : Pas de forme trigonométrique cette semaine.

## Question de savoir-faire

On demandera à chaque étudiant, en plus de la preuve et de l'énoncé, une linéaristation ou une « dé-linéarisation » par passage en complexes.

## Un énoncé au choix à demander

- ❒ Sommes usuelles : $\sum_{k=0}^{n} k, \sum_{k=0}^{n} k^2, \sum_{k=0}^{n} k^3$ où $n \in \mathbb{N}$
- ❒ $\sum_{k=0}^{n} q^k$ où $n \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{R}$ puis $\sum_{k=p}^{n} q^k$ pour $0 \leq p \leq n$
- ❒ Factorisation de $a^n - b^n$, $a^3 - b^3, a^3 + b^3$
- ❒ Formule du binôme de Newton
- ❒ Écrire de deux manières $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j}$
- ❒ Définition de Arcsin, dérivabilité et dérivée
- ❒ Définition de Arccos, dérivabilité et dérivée
- ❒ Définition de Arctan, dérivabilité et dérivée
- ❒ Définition de $\mathrm{ch}, \mathrm{sh}$, écriture de $\exp(x)$ en fonction de $\mathrm{ch}(x)$ et $\mathrm{sh}(x)$, formule reliant $\mathrm{ch}^2(x)$ et $\mathrm{sh}^2(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$
- ❒ Définition du module de $z \in \mathbb{C}$ (2 expressions à donner)
- ❒ Donner 2 caractérisations pour $z \in \mathbb{R}$, 2 caractérisations pour $z \in i\mathbb{R}$
- ❒ Propriétés de la conjugaison (somme, différence, produit, quotient)
- ❒ Propriétés du module (produit, quotient)
- ❒ Traduire $|z| = 1$ de trois manières :
  $x^2 + y^2 = 1$ si $x = \mathrm{Re}(z), y = \mathrm{Im}(z)$ ; $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$ ; $\exists \theta \in \mathbb{R}, z = e^{i\theta}$
- ❒ Inégalité triangulaire
- ❒ Formules d'Euler
- ❒ Propriétés algébrique des $e^{i\theta}$, formule de Moivre

## Démonstrations

- ❒ Formule du binôme de Newton.
- ❒ Dérivabilité de Arcsin et dérivée.
- ❒ Pour tous complexes $z_1$ et $z_2$, $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

## PROGRAMME 6 : du 03/11 au 07/11

# Reprise des nouvelles fonctions usuelles

# Reprise du début des complexes

# Complexes : suite et fin

- ★ Écriture d'un nombre complexe non nul sous la forme $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
  Arguments d'un nombre complexe non nul. Notation $\mathrm{Arg}(z) \equiv \theta(2\pi)$.
  Factorisation de $e^{ip} \pm e^{iq}, 1 \pm \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$.
  Calcul de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(kt)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(kt)$.
  Argument d'un produit, d'un quotient.
- ★ Équation du second degré : Racines carrées d'un nombre complexe.
  Résolution des équations du second degré, discriminant.
  Somme et produit des racines d'une équation du second degré.
- ★ Racines $n$-ièmes : Description des racines $n$-ièmes de l'unité. Notation $\mathbb{U}_n$. Somme des racines $n$-ièmes de l'unité.
- ★ Exponentielle complexe : Définition de $\mathrm{e}^z$ pour $z$ complexe : $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\ \mathrm{Im}(z)}$. Notations $\exp(z)$, $\mathrm{e}^z$. Exponentielle d'une somme. Pour tous $z$ et $z'$ dans $\mathbb{C}$, $\exp(z) = \exp(z')$ si et seulement si $z - z' \in 2\,\mathrm{i}\,\pi\mathbb{Z}$.
- ★ Nombres complexes et géométrie plane : On identifie $\mathbb{C}$ au plan usuel muni d'un repère orthonormé direct. Point du plan associé à un nombre complexe, affixe d'un point du plan, affixe d'un vecteur du plan.
  Interprétation géométrique de $|z - z'|$, cercles et disques.
  Traduction de l'alignement et de l'orthogonalité au moyen d'affixes.
  Transformation $z \mapsto z + b$ ; interprétation en termes de translation.
  Transformation $z \mapsto kz$, $(k \in \mathbb{R}^*)$ ; homothétie de centre $O$ et de rapport $k$.
  Transformation $z \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} z$ ; rotation plane de centre O et d'angle $\theta$.
  Transformation $z \mapsto \overline{z}$ ; interprétation en termes de symétrie axiale.
- ★ Dérivée d'une fonction à valeurs complexes. La dérivée est définie via les parties réelle et imaginaire.
  Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient. Brève extension des résultats sur les fonctions à valeurs réelles.

# Question de savoir-faire

On demandera à chaque étudiant, en plus de la preuve et de l'énoncé, une linéaristation ou une « dé-linéarisation » par passage en complexes.

## Un énoncé au choix à demander

- ❒ Définition rigoureuse de Arcsin, dérivabilité et dérivée
- ❒ Définition rigoureuse de Arccos, dérivabilité et dérivée
- ❒ Définition rigoureuse de Arctan, dérivabilité et dérivée
- ❒ Définition de $\mathrm{ch}, \mathrm{sh}$, écriture de $\exp(x)$ en fonction de $\mathrm{ch}(x)$ et $\mathrm{sh}(x)$, formule reliant $\mathrm{ch}^2(x)$ et $\mathrm{sh}^2(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$
- ❒ Définition du module de $z \in \mathbb{C}$ (2 expressions à donner)
- ❒ Donner 2 caractérisations pour $z \in \mathbb{R}$, 2 caractérisations pour $z \in i\mathbb{R}$
- ❒ Propriétés de la conjugaison (somme, différence, produit, quotient)
- ❒ Propriétés du module (produit, quotient)
- ❒ Traduire $|z| = 1$ de trois manières ($x^2 + y^2 = 1$ si $x = \mathrm{Re}(z), y = \mathrm{Im}(z)$, $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$, $\exists \theta \in \mathbb{R}, z = e^{i\theta}$)
- ❒ Inégalité triangulaire
- ❒ Formules d'Euler
- ❒ Propriétés algébrique des $e^{i\theta}$, formule de Moivre
- ❒ Écriture trigonométrique d'un complexe non nul
- ❒ Résultat sur les racines carrées d'un complexe non nul
- ❒ Solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ avec $a, b, c$ complexes, $a \neq 0$
- ❒ Relations racines/coefficients pour une équation de degré 2
- ❒ Racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité : définition et théorème
- ❒ Définition de $e^z$ pour $z \in \mathbb{C}$ et principales propriétés
- ❒ Caractérisation de la colinéarité, de l'orthogonalité de 2 vecteurs
- ❒ Interprétation de $z \mapsto e^{i\alpha} z$

## Démonstrations

- ❒ Formule donnant $\mathrm{Arctan}\, x + \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.
- ❒ Pour tous complexes $z_1$ et $z_2$, $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.
- ❒ Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(kt)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(kt)$ où $t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$.