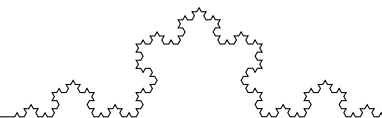


Chapitre 5 Primitives



Dans la suite, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

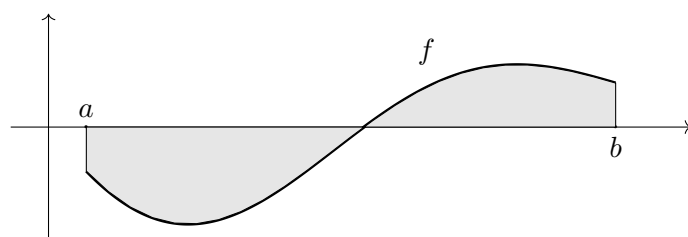
Soit a et b deux réels tels que $a < b$. L'intervalle $[a, b]$ s'appelle *segment* de bornes a et b .

1 Existence d'intégrales

Plus tard dans l'année, on fera un chapitre *Intégration* plus approfondi. Pour l'instant, on va se contenter du résultat vu en terminale :

Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

Si f est continue sur le segment $[a, b]$ alors on peut définir un réel noté $\int_a^b f(x) dx$ qui représente l'aire algébrique sous la courbe de f sur le segment $[a, b]$.



Si $a = b$, on pose $\int_a^a f(x) dx = 0$. Si $a > b$, on pose : $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$.

Le nom de la variable d'intégration est muet : $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du = \dots$

On va considérer des fonctions d'une variable réelle, à valeurs réelles ou complexes.

Point méthode :

Pour justifier l'*existence* d'une intégrale d'une fonction f , il suffit de vérifier la continuité de f sur le segment d'intégration.

Par exemple, $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos t}{t} dt$ existe car la fonction $t \mapsto \frac{\cos t}{t}$ est continue sur le segment $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

2 Primitives

2.1 Définition

Définition :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

On appelle *primitive* de f sur I toute fonction $F : I \rightarrow \mathbb{R}$

Exemples :

- ❶ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto x$.
- ❷ On peut généraliser la définition au cas où I n'est pas un intervalle. On a vu, dans le chapitre 1, que $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \frac{1}{x}$
- $x \mapsto$

Ainsi,

Proposition :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que f admet une primitive F sur I .

- ✧ Les primitives de f sur I sont les fonctions
- ✧ Soit $a \in I, b \in \mathbb{R}$. Il existe une unique primitive G de f sur I telle que $G(a) = b$.
En particulier, il existe une unique primitive G de f sur I

🔗 DÉMONSTRATION 1

Remarques :

- ✧ On ne dit jamais « la » primitive mais « UNE » primitive. Il peut ne pas en exister, mais s'il en existe, il en existe alors une infinité et elles sont toutes égales à une constante près, si on est bien sur un intervalle.
- ✧  La proposition précédente peut être mise en défaut si l'on n'est pas sur un intervalle.
Par exemple, voici deux primitives de $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$:

$$F : x \mapsto \frac{1}{x} \qquad G : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} + 1 & \text{si } x > 0 \\ \frac{1}{x} & \\ \frac{1}{x} - 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Pourtant, F et G ne sont pas égales à une constante près : $G(x) - F(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

- ✧ Les fonctions que l'on manipule couramment sont un « empilement » de fonctions usuelles liées entre elles par des additions, multiplications, inverses, quotients, compositions. On sait les dériver car on sait dériver les fonctions usuelles et car on dispose de formules de dérivation d'une somme, produit, quotient, composée...

La primitivation des fonctions est autrement plus difficile. Par exemple,

- On sait primitiver $x \mapsto x$ mais, pour primitiver son inverse, $x \mapsto \frac{1}{x}$, il a fallu qu'on invente une nouvelle fonction : la fonction logarithme.
- On sait primitiver $x \mapsto 1 + x^2$ mais, pour primitiver son inverse $x \mapsto \frac{1}{1 + x^2}$, on a besoin là aussi d'une nouvelle fonction : la fonction Arctan.

On peut montrer que les primitives d'une fonction simple comme $x \mapsto e^{-x^2}$ ne peuvent pas s'écrire comme un empilement de fonctions usuelles, à moins de considérer une telle primitive comme nouvelle fonction usuelle.

Retenir en particulier que, même quand on sait primitiver deux fonctions, on ne sait pas toujours primitiver leur produit, leur quotient, leur composée.

Premiers exemples de primitivation

La remarque précédente ne signifie pas que l'on ne sait rien faire! En particulier, une situation très courante est de primitiver des dérivées de fonctions composées (i.e. de la forme $\underbrace{u' \times (v' \circ u)}_{\text{dérivée de } v \circ u}$).

On suppose u dérivable sur I .

Fonction u	forme de $f(x)$	$F(x)$ où F est une primitive de f
$u : I \rightarrow \mathbb{R}^*$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$	
$u : I \rightarrow \mathbb{R}$	$u'(x)e^{u(x)}$	
$u : I \rightarrow \mathbb{R}_+^*$	$\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$	
$u : I \rightarrow \mathbb{R}_+^*, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$u'(x)u(x)^\alpha$	
$u : I \rightarrow \mathbb{R}$	$\frac{u'(x)}{1+u(x)^2}$	

Ainsi, une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \frac{\sin x}{5 + 3 \cos x} =$

Point rédaction : Remontée rigoureuse de la dérivée à la fonction, par équivalence

Soit $f :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. Complétez :

$$\forall x \in]-1, 1[, f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow$

2.2 Existence de primitives

Théorème : Théorème fondamental de l'analyse

Résumé : Toute fonction continue sur un intervalle admet (au moins) une primitive.

Plus précisément, soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Soit $a \in I$.

Alors, la fonction

$$\begin{aligned} F_a : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_a^x f(t) dt \end{aligned}$$

est dérivable sur I et, pour tout $x \in I$, $F'_a(x) = f(x)$

F_a est

Remarque :

Ce résultat donne une condition *suffisante* d'existence de primitive.

Si f est continue sur un intervalle I alors f admet au moins une primitive sur I .

condition suffisante *condition nécessaire*



La réciproque est fautive. Une fonction peut admettre une primitive sur un intervalle I sans être continue (cela revient à trouver une fonction dérivable dont la dérivée n'est pas continue).

Exemples :

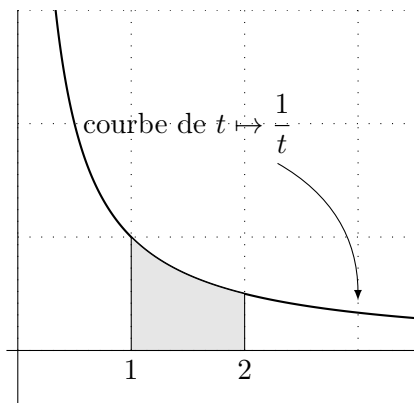
- ❶ $t \mapsto \frac{1}{t}$ est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$. Donc, par le théorème fondamental de l'analyse, la fonction

$$F_1 : x \mapsto \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

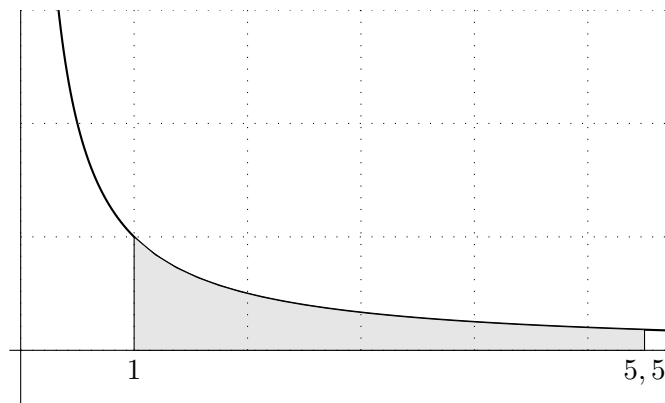
est l'unique primitive de $t \mapsto \frac{1}{t}$ qui s'annule en 1.

Or, sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$, $\ln$ est une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t}$ et s'annule en 1 donc $\ln = F_1$.

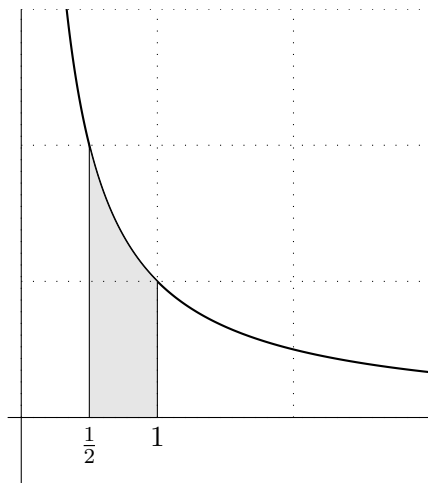
Ainsi, pour tout $x > 0$, $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$.



$$\int_1^2 \frac{1}{t} dt = \ln(2) \approx 0,69$$



$$\int_1^{5,5} \frac{1}{t} dt = \ln(5,5) \approx 1,7$$



$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{t} dt = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2) (< 0)$$

Remarque : $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{t} dt = - \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t} dt$

- ❷ $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$. Que représente $F : x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$?

3 Calcul d'intégrales

Le résultat suivant est un corollaire du théorème fondamental de l'analyse :

Proposition :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue et a et b deux éléments de I . Alors, en notant F une primitive de f ,

$$\int_a^b f(t) dt =$$

 **DÉMONSTRATION 2**

Exemples : Calculer les intégrales suivantes.

❶ $\int_a^b e^{2x} dx$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

❷ $\int_2^e \frac{1}{x \ln x} dx$

❸ $\int_0^1 \frac{x}{1+x} dx$

❹ $\int_0^\pi \sin x dx$

❺ $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$

❻ $\int_1^X \frac{1}{x(1+x^2)} dx$ où $X > 0$

❼ $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$

❽ $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

 **DÉMONSTRATION 3**

Point méthode : Apparition/disparition

La technique du $+1 - 1$ ou $-1 + 1$ ou $-2 + 2$ ou $-x + x \dots$ est à retenir. Elle sert dans de nombreuses situations.

Définition :

Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dite *de classe C^1* sur I lorsque

Remarques :

- ❖ Toutes les fonctions usuelles sont de classe C^1 là où elles sont dérivables. Par exemple, $x \mapsto \sqrt{x}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. Arccos, Arcsin sont de classe C^1 sur
- ❖ Toute primitive d'une fonction continue sur I est de classe C^1 sur I .
- ❖ Ne pas confondre « de classe C^1 » i.e. « dérivable avec dérivée continue » et « dérivable ET continue ». Comme la dérivabilité implique la continuité, « dérivable ET continue » est une maladresse qu'il faut absolument éviter !

Proposition :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et a et b deux éléments de I . Alors,

$$\int_a^b f'(t) dt =$$

4 Quelques propriétés des intégrales

Soit a, b, c des éléments de l'intervalle I .

Ces résultats seront justifiés dans un chapitre ultérieur.

Proposition : Linéarité de l'intégrale

Soit f et g deux fonctions continues sur I . Soit λ et μ des réels. Alors,

$$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t)) dt =$$

Proposition : Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur I . Alors,

$$\int_a^b f(t) dt =$$

Proposition :

Soit f et g deux fonctions continues sur I . On suppose ici $\boxed{a \leq b}$.

$$\underbrace{\diamond (\forall t \in [a, b], f(t) \geq 0)}_{f \geq 0} \implies \text{(positivité de l'intégrale)}$$

$$\underbrace{\diamond (\forall t \in [a, b], f(t) \leq g(t))}_{f \leq g} \implies \text{(croissance de l'intégrale)}$$

$$\diamond \left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq$$

5 Méthodes de calcul des intégrales

Pour calculer une intégrale, le premier réflexe est d'essayer de déterminer une primitive. Si on n'y arrive pas, on peut parfois transformer algébriquement l'expression (technique par exemple du $+1 - 1$ ou équivalent) puis essayer de primitiver.

Lorsque cela n'aboutit pas, on peut alors essayer deux méthodes indirectes qui permettent de transformer en profondeur l'intégrale initiale en une autre intégrale, (normalement) plus simple à calculer.

5.1 Intégration par parties

Proposition :

Soit $(a, b) \in I^2$. Soit u et v deux fonctions de classe C^1 sur I . Alors,

$$\int_a^b u(t)v'(t) dt =$$

DÉMONSTRATION 4

Remarques :

- ✧ Vrai aussi si $a > b$
- ✧ On a aussi : $\int_a^b u'(t)v(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) dt$ (symétries des rôles de u et v).

Exemples : Calculer les intégrales suivantes.

❶ $\int_0^1 te^t dt$

❷ $\int_1^x \ln t dt$ où $x > 0$.

 DÉMONSTRATION 5

Remarque :

On retiendra qu'une primitive de $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est

Point méthode :

On pensera à l'intégration par parties en particulier :

- ✧ quand il y a un produit que l'on ne sait pas primitiver
- ✧ quand la dérivée d'une ou des fonctions de l'intégrale est plus simple que la fonction de départ (par exemple $\ln$, Arcsin , Arctan ...).
- ✧ pour obtenir des relations de récurrence. Par exemple, soit $u_n = \int_0^1 t^n e^t dt$ pour $n \in \mathbb{N}$. Par intégration par parties, on obtient une relation de récurrence entre u_{n+1} et u_n .

5.2 Changement de variables

5.2.1 Théorème

Théorème :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Soit $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que, pour tout $t \in J$, $\varphi(t) \in I$.

Alors,

$$\forall (a, b) \in J^2, \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx$$

 DÉMONSTRATION 6

5.2.2 En pratique

Le théorème est une égalité entre deux intégrales. Selon le contexte, on peut vouloir passer de gauche à droite ou de droite à gauche. Pour que la transformation se passe le plus simplement possible, on adopte des notations pratiques :

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt \stackrel{(B)}{=} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx \quad \text{en notant :} \begin{cases} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t) dt \\ \text{si } t = a \text{ alors } x = \varphi(a) \\ \text{si } t = b \text{ alors } x = \varphi(b) \end{cases}$$

Traitions un exemple pour illustrer : calculons $I = \int_0^1 \frac{t}{1+t^4} dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t^4} \boxed{t dt}$
 $t dt$ pourrait jouer le rôle du dx .

D'où l'idée de poser $x = t^2$. On a bien $t \mapsto t^2$ est de classe C^1 sur $[0, 1]$.

On note $dx =$

Si $t = 0$ alors et si $t = 1$ alors $x =$

$I =$

Donc, par le théorème, $I =$

Exemples : Calculer les intégrales suivantes.

$$\textcircled{1} I_1 = \int_0^{\ln 2} \frac{e^{3t}}{e^t + 1} dt \quad (A)$$

$$\textcircled{2} \text{ Classique : } I_2 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \quad (B)$$

DÉMONSTRATION 7

Point méthode : Comment « deviner » un changement de variables intéressant

En pratique, on a souvent des changements de variables « du type (A) ». On sera alors amené à choisir un bloc $\varphi(t)$ que l'on posera égal à x . Il est intéressant, pour conjecturer un changement potentiel, de rechercher en premier lieu le bloc « $\varphi'(t) dt$ » qui peut jouer le rôle du « dx ».

Ne pas se laisser déstabiliser par les noms de variables. Si la variable initiale s'appelle x , on cherchera alors (si on est dans le cadre du changement (A)) le bloc « $\varphi'(x) dx$ » qui pourra jouer le rôle du « dt ».

Exemples :

$$\textcircled{1} \text{ Calculer } I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx.$$

$$\textcircled{2} \text{ Calculer } I_2 = \int_1^4 \frac{1}{t\sqrt{t} + \sqrt{t}} dt.$$

$$\textcircled{3} \text{ Calculer } I_3 = \int_{-\frac{\pi}{3}}^0 \frac{1}{\cos t(\sin t - \cos t)} dt \text{ en posant } x = \tan t.$$

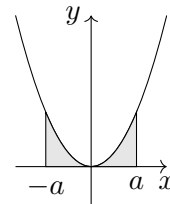
DÉMONSTRATION 8

5.2.3 Applications

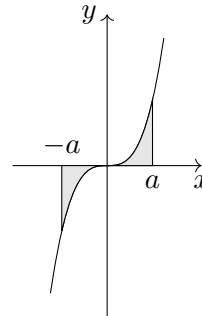
Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Soit $T > 0$.

Proposition :

Si f est paire alors



Si f est impaire alors



Démonstration: On suppose que f est paire. $\int_{-a}^a f(t) dt = \int_{-a}^0 f(t) dt + \int_0^a f(t) dt$.

On pose, dans la première intégrale $x = -t$. $t \mapsto -t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

On note $dx = -dt$. $\begin{cases} \text{Si } t = -a \text{ alors } x = a \\ \text{Si } t = 0 \text{ alors } x = 0 \end{cases}$

Par le théorème du changement de variables,

$$\int_{-a}^0 f(t) dt = - \int_a^0 f(-x) dx = \int_0^a f(-x) dx = \int_0^a f(x) dx \text{ car } f \text{ est paire.}$$

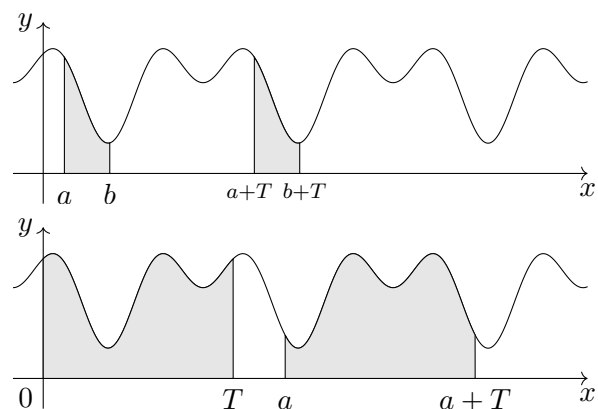
$$\text{Finalement, } \int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt.$$

De même, le théorème du changement de variables permet de prouver le résultat suivant sur les fonctions périodiques :

Proposition :

Si f est T -périodique alors

$$\begin{cases} \int_a^b f(t) dt = \\ \int_a^{a+T} f(t) dt = \end{cases}$$



En particulier, l'intégrale d'une fonction T -périodique est la même sur tout segment d'amplitude T .

Exemple :

$$\text{Justifier que : } \int_0^\pi \frac{1}{1 + \cos^2 x} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \cos^2 x} dx.$$

 **DÉMONSTRATION 9**

5.3 Tableau des primitives

Justification du tableau des primitives.

DÉMONSTRATION 10

Deux exemples généralisant des primitives du tableau (à savoir retrouver) :

Calculer les primitives de :

❶ $f_a : x \mapsto \frac{1}{x^2 + a^2}$ où $a \in \mathbb{R}^*$

❷ $g_{a,b} : x \mapsto \frac{1}{(x-a)(x-b)}$ où a et b sont deux réels distincts

DÉMONSTRATION 11

5.4 Calcul de primitives / intégrales type

✧ Calcul de primitives / intégrales de fonctions de la forme $x \mapsto P(x)e^{\alpha x}$ où P est un polynôme et $\alpha \in \mathbb{R}^*$

Deux méthodes :

- On effectue plusieurs intégrations par parties.
- On pose : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = Q(x)e^{\alpha x}$ où Q est un polynôme.
 f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in I, f'(x) =$

D'où l'idée de chercher une primitive de $x \mapsto e^{\alpha x}P(x)$ sous la forme $x \mapsto e^{\alpha x}Q(x)$ où Q est un polynôme

Remarque : La recherche se fait en donnant des noms aux coefficients du polynôme recherché et en raisonnant par équivalence pour justifier que la méthode fonctionne (on n'est pas assuré l'on va bien trouver une primitive sous cette forme, il faut justifier à chaque fois la méthode de recherche).

Exemple :

Calculer $\int_0^1 e^{-x}(x^3 - 2x + 1) dx$.

DÉMONSTRATION 12

✧ Calcul de primitives / intégrales de fonctions de la forme $x \mapsto (\cos x)^p(\sin x)^q$ où $(p, q) \in \mathbb{N}^2$

- Si p ou q impair, on pose $u = \cos x$ ou $u = \sin x$ (selon que c'est p ou q qui est impair).
- Si p et q sont pairs, on linéarise.

Exemples : Calculer les primitives de :

❶ $f : x \mapsto (\cos x)^4(\sin x)^3$

❷ $g : x \mapsto \cos^4 x$

DÉMONSTRATION 13

✧ **Calcul de primitives / intégrales de fonctions de la forme** $x \mapsto \frac{1}{ax^2 + bx + c}$

Méthode :

- Si $ax^2 + bx + c = 0$ admet une racine double alors on reconnaît facilement une dérivée d'une fonction connue.
- Si $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux racines réelles distinctes, on décompose en éléments simples.
- Si $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet pas de racine réelle alors on écrit le trinôme sous forme canonique puis on se ramène à la forme $\frac{u'(x)}{1 + u(x)^2}$, qui se primitive facilement.

Exemples : Calculer les primitives de :

❶ $f_1 : x \mapsto \frac{1}{4x^2 - 4x + 1}$

❷ $f_2 : x \mapsto \frac{1}{x^2 - 6x + 5}$

❸ $f_3 : x \mapsto \frac{1}{x^2 + x + 1}$

🔗 **DÉMONSTRATION 14**

5.5 Extension aux fonctions complexes

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ où $u =$ et $v =$
 $x \mapsto u(x) + iv(x)$

On suppose que f est continue, ce qui signifie que u et v sont continues. Soit $(a, b) \in I^2$.

On pose :

$$\int_a^b f(x) dx =$$

Remarques :

✧ On remarque que $\int_a^b u(x) dx \in \mathbb{R}$ et $\int_a^b v(x) dx \in \mathbb{R}$. On a donc :

$$\begin{cases} \operatorname{Re} \left(\int_a^b f(x) dx \right) = \\ \operatorname{Im} \left(\int_a^b f(x) dx \right) = \end{cases}$$

✧ Le théorème fondamental de l'analyse, la méthode par intégration par parties, le théorème du changement de variables sont aussi valables pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Exemples :

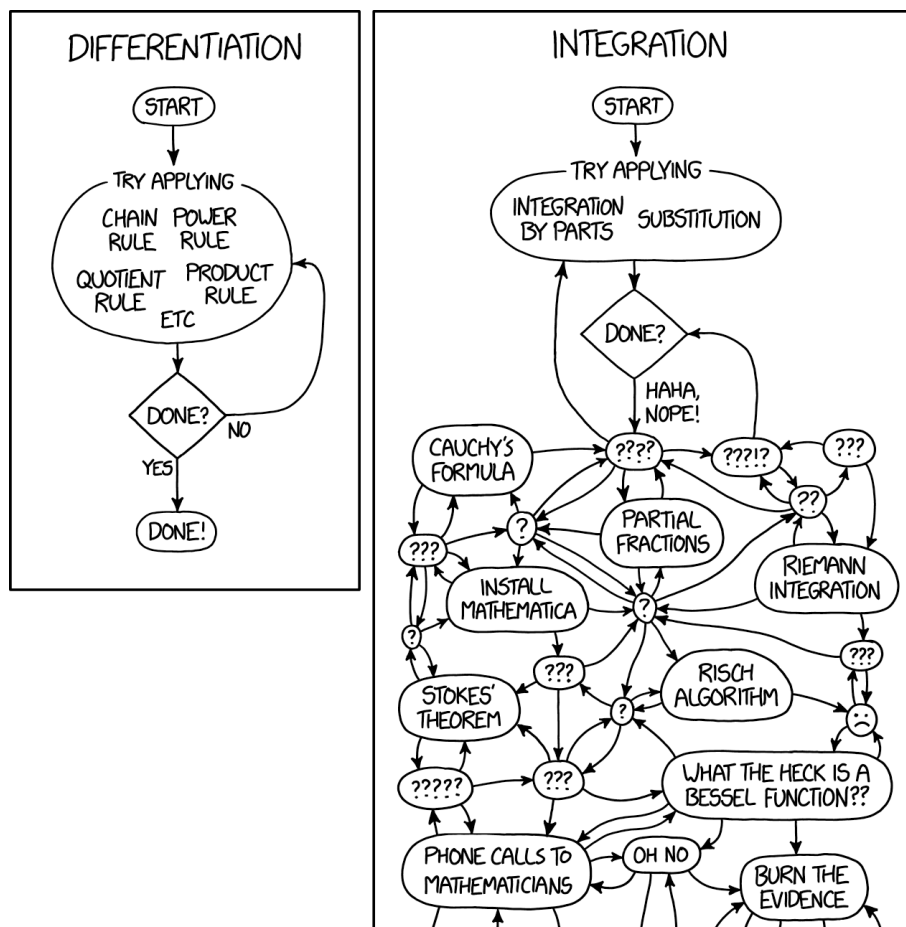
❶ Soit $a \in \mathbb{C}^*$. Calculer $\int_0^x e^{at} dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

❷ Calculer $I = \int_0^\pi e^{2t} \cos t dt$ et $J = \int_0^\pi e^{2t} \sin t dt$. La méthode est à connaître.

🔗 **DÉMONSTRATION 15**

Plan du cours

1	Existence d'intégrales	1
2	Primitives	1
2.1	Définition	1
2.2	Existence de primitives	3
3	Calcul d'intégrales	5
4	Quelques propriétés des intégrales	6
5	Méthodes de calcul des intégrales	6
5.1	Intégration par parties	6
5.2	Changement de variables	7
5.2.1	Théorème	7
5.2.2	En pratique	8
5.2.3	Applications	9
5.3	Tableau des primitives	10
5.4	Calcul de primitives / intégrales type	10
5.5	Extension aux fonctions complexes	11



xkcd.com