

I Le circuit RLC série en régime libre	1
1.) Mise en équation.....	1
2.) Les solutions	3
II Réponse à un échelon de tension.....	8
1.) Les équations différentielles	8
2.) Mise en équation et résolution	8
3.) Les résultats	9
4.) Bilan énergétique	10
III Oscillateur amorti avec frottement visqueux	11
1.) Mise en équation.....	11
2.) Analogie électromécanique	12
3.) Solutions	13
4.) Bilan énergétique	14

I Le circuit RLC série en régime libre

1.) Mise en équation

a) Equation différentielle

CI à $t < 0$ C est chargé (tension u_{c0})
et le courant qui circule est nul

à $t = 0$ On ferme K

à $t > 0$ equ. de maille: $0 = u_L + u_R + u_C$

$$\text{or } u_L = L \frac{di}{dt} \quad u_R = Ri \quad u_C = C \frac{du_C}{dt}$$

$$\text{donc } 0 = u_C + LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt}$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{u_C}{LC} + \frac{R}{L} \frac{du_C}{dt}$$

$$\text{De plus: } L \frac{di}{dt} + Ri + u_C = 0$$

$$\Rightarrow 0 = L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{u_C}{C}$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{i}{LC}$$

$$E_L = \frac{1}{2} L i^2 \quad \text{et} \quad E_C = \frac{1}{2} C u_C^2 \quad \text{sont conservés en}$$

fonction du temps

$$\Rightarrow i(0^-) = i(0^+) \Rightarrow i(0^+) = 0$$

$$u_C(0^-) = u_C(0^+) \Rightarrow u_C(0^+) = u_{c0}$$

Rq. à $t = 0^+$

$$L \frac{di}{dt}(0^+) + Ri(0^+) + u_C(0^+) = 0$$

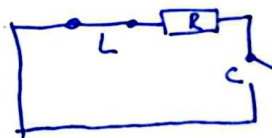
$$\Rightarrow \frac{di}{dt}(0^+) = -\frac{u_{c0}}{L}$$

A $t = \infty$ schéma équivalent

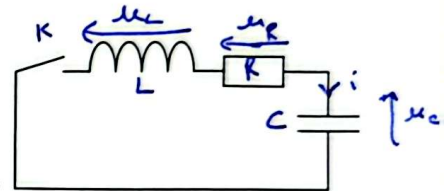
Régime continu permanent

$$u_L = L \frac{di}{dt} = 0 \quad \text{car } i \text{ est } \approx R \cdot i$$

$$i = C \frac{du_C}{dt} = 0 \quad \text{car } u_C \text{ est } \Rightarrow \text{condensateur } \approx \text{inter. cov.}$$



$$\begin{cases} i = 0 \text{ à } t = \infty \\ u_R = 0 \\ u_C = 0 \text{ (maille)} \end{cases}$$



b) Réduction canonique

On pose sur l'équation différentielle

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C(t) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + 2\lambda \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C(t) = 0 \quad (a) \quad \text{ou} \quad \frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C(t) = 0 \quad (b)$$

écart $\Rightarrow$ $2\lambda = \frac{R}{L} \Rightarrow \lambda = \frac{R}{2L} > 0 \text{ s}^{-1}$ Coefficient d'amortissement

$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} > 0 \text{ rad.s}^{-1}$ Pulsation propre

$\Rightarrow$ $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L} \Rightarrow Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} > 0$ Facteur de qualité sans dimension

démo : $Q = \frac{L\omega_0}{R} \times \frac{\omega_0}{\omega_0} = \frac{L\omega_0^2}{R\omega_0}$ or $\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow Q = \frac{1}{RC\omega_0}$

étape 2 $Q = \frac{1}{RC\omega_0}$ or $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow Q = \frac{1}{RC} \times \sqrt{LC} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$

Par identification entre (a) et (b)

$$2\lambda = \frac{\omega_0}{Q} \Rightarrow \lambda = \frac{\omega_0}{2Q} \quad (c)$$

2.) Les solutions Réolutions

On remplace la fonction par 1, la dérivée première par r , la dérivée seconde par r^2 .

① Equation caractéristique $r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$

équation du second degré du type $ar^2 + br + c = 0$ dont

on cherche les racines.

Discriminant : $(\Delta = b^2 - 4ac)$ $\Delta = 4\lambda^2 - 4\omega_0^2$

$\Delta = 4(\lambda^2 - \omega_0^2) = 4(\lambda - \omega_0)(\lambda + \omega_0)$

1^{er} cas $\Delta > 0 \lambda > \omega_0$ ② $\lambda = \frac{\omega_0}{2Q} > \omega_0$

$\Rightarrow Q < \frac{1}{2}$

$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ $R > R_c$ où $R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$
résistance critique

2 solutions réelles r_1 et r_2

$(r = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a})$

$r = \frac{-2\lambda \pm \sqrt{4(\lambda^2 - \omega_0^2)}}{2}$

$r = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$

2^{ème} cas $\Delta = 0$ 1 solution réelle double :

$(r = \frac{-b}{2a})$ $r = \frac{-2\lambda}{2} = -\lambda$

a) Cas $\Delta < 0$: Régime pseudopériodique

$\lambda < \omega_0$ ou $Q > \frac{1}{2}$ ou $R < R_c$

à redémontrer depuis le début

2 solutions complexes r_1 et r_2 de la forme $r = \frac{-b \pm j\sqrt{-\Delta}}{2a}$

$r = -\lambda \pm j\Omega$

$\Omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ Pseudo-pulsation

Après calculs, on trouve $u_C(t) = \exp(-\lambda t) \cdot [a \cos(\Omega t) + b \sin(\Omega t)] = A \exp(-\lambda t) \cos(\Omega t + \varphi)$

où a , b , A et φ sont des constantes réelles, déterminées par les conditions initiales.

A amplitude $\Rightarrow$
 φ avançement de phase

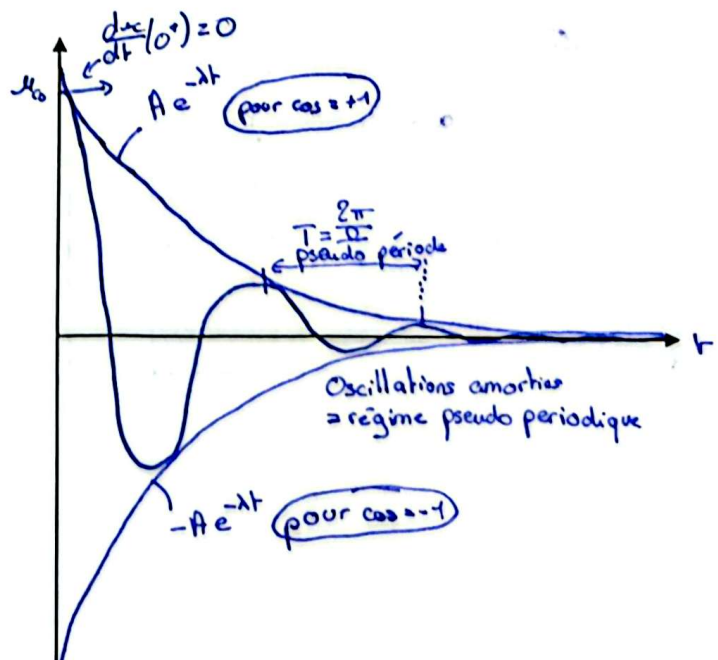
$u_C(t) = A \exp(-\lambda t) \cos(\Omega t + \varphi)$

à $t = 0^+ u_C(0^+) = u_{C0}$

$i = C \frac{du_C}{dt} \Rightarrow i(0^+) = 0$

$\Rightarrow (\frac{du_C}{dt}) / (0^+) = 0$

R_g : Régime permanent atteint au bout de
constante de temps
 $\approx 5\tau$ où $\tau = \frac{1}{\lambda}$ ou temps de relaxation



Remarques: 1) La pseudo-période est plus grande que la période propre. $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} < \omega_0$ donc $T > T_0$.

2) $\cos R=0$ (p. 53)

$$\textcircled{2} \Rightarrow \frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{1}{LC} u_c = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 u_c}{dt^2} + \omega_0^2 u_c = 0$$

ω_0 pulsation propre

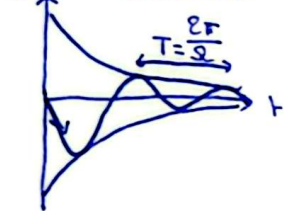
$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \text{ période propre}$$

On pose $\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

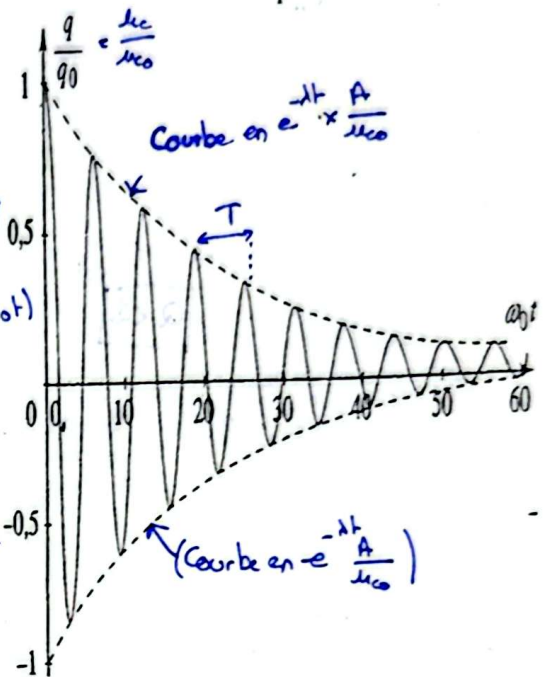
$$\begin{cases} u_c(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \\ = a \cos(\omega_0 t) + b \sin(\omega_0 t) \end{cases}$$

3) Courant vérifie la m^{ème} équadiff. ③

$$i(t) = A e^{-\lambda t} \cos(\Omega t + \varphi)$$



$$\begin{cases} i(0^+) = 0 \\ \frac{di}{dt}(0^+) = -\frac{u_{c0}}{L} \end{cases}$$



Doc. 18. Régime pseudo-périodique. $Q = 10$; $q(0) = q_0$ et $i(0) = 0$. $u_c(0) = u_{c0}$

a) Détermination des constantes

$$u_c(0^+) = u_{c0} \text{ et } \left(\frac{du_c}{dt} \right)(0^+) = 0$$

$$u_c(t) = e^{-\lambda t} (a \cos(\Omega t) + b \sin(\Omega t))$$

$$f(t) = e^{-\lambda t} \quad f'(t) = -\lambda e^{-\lambda t}$$

$$g(t) = a \cos(\Omega t) + b \sin(\Omega t)$$

$$g'(t) = -a \Omega \sin(\Omega t) + b \Omega \cos(\Omega t)$$

$$u_c(t) = f(t)g(t)$$

$$u_c'(t) = -\lambda e^{-\lambda t} (a \cos(\Omega t) + b \sin(\Omega t)) + e^{-\lambda t} (-a \Omega \sin(\Omega t) + b \Omega \cos(\Omega t))$$

$$\frac{du_c}{dt}(0^+) = -\lambda e^0 (a \cos(0) + b \sin(0)) + e^0 (-a \Omega \sin(0) + b \Omega \cos(0))$$

$$= -\lambda a + b \Omega = 0 \Rightarrow b \Omega = \lambda a$$

$$\Rightarrow \boxed{b = \frac{\lambda a}{\Omega}}$$

$$u_c(0^+) = e^0 (a \cos(0) + b \sin(0)) = \boxed{a = u_{c0}}$$

et donc $\boxed{b = \frac{\lambda u_{c0}}{\Omega}}$

$$\boxed{u_c(t) = u_{c0} e^{-\lambda t} \left(\cos(\Omega t) + \frac{\lambda}{\Omega} \sin(\Omega t) \right)}$$

S) Décrément Logarithmique δ

b) $\Delta > 0$ Régime apériodique2 solutions réelles r_1 et r_2

$$\lambda > \omega_0 \quad \text{ou} \quad Q < \frac{1}{2}$$

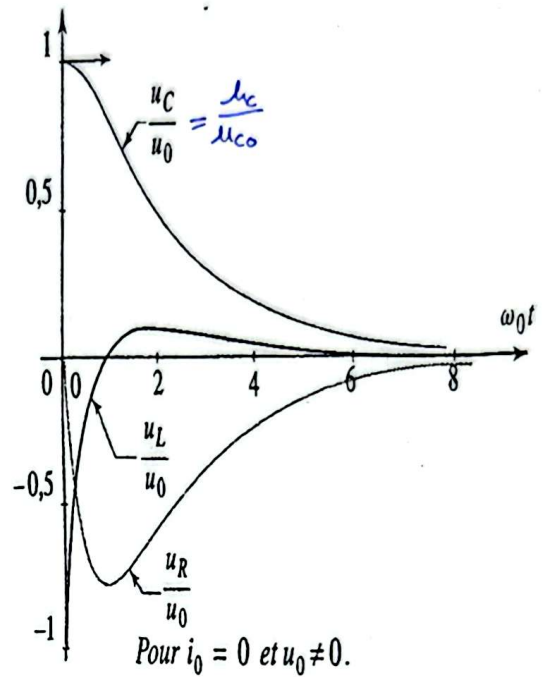
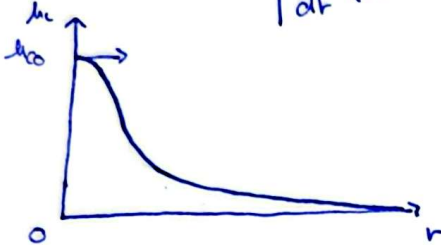
$$\text{ou} \quad R > R_C$$

$$u_C(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \quad A, B \text{ constantes réelles.}$$

$$r = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \quad \left| \begin{array}{l} r_1 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} < 0 \\ r_2 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} < 0 \end{array} \right.$$

$$u_C(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$$

$$u_C \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \quad \left| \begin{array}{l} u_C(0^+) = u_{C0} \\ \frac{du_C}{dt}(0^+) = 0 \end{array} \right.$$

Doc. 15. d.d.p. aux bornes des trois dipôles : régimes apériodiques $Q = 0,4$

c) $\Delta = 0$: Régime critique

1 solution double réelle $r_0 = \lambda$

$$Q = \frac{1}{2}$$

ou

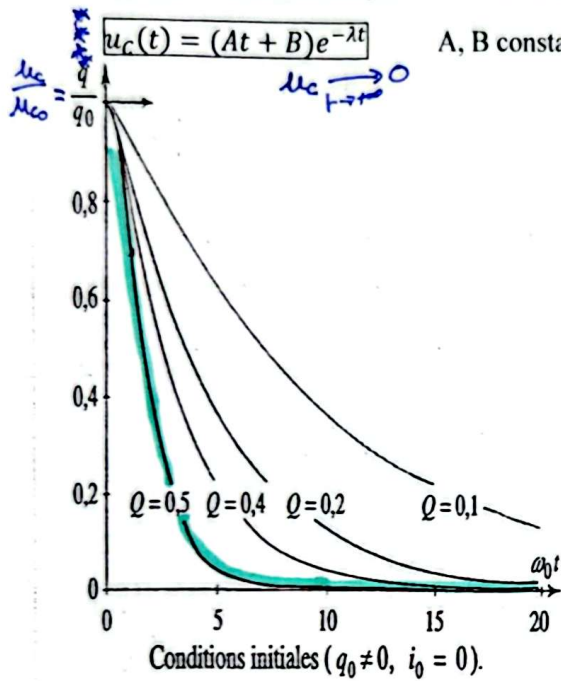
$$\lambda = \omega_0$$

ou

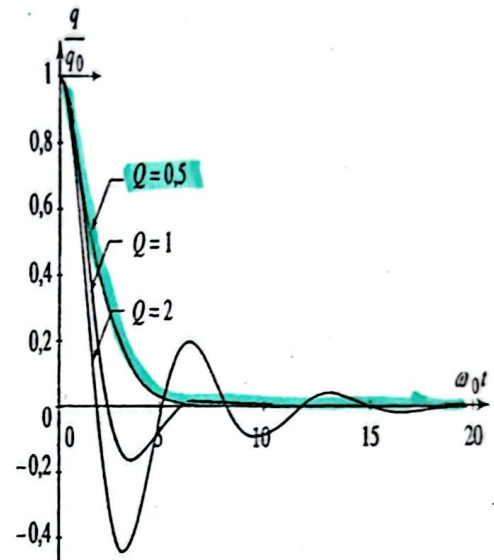
$$R = R_C$$

à démontrer

A, B constantes réelles.



Doc. 14. Régimes apériodique ($Q < 0,5$) et critique ($Q = 0,5$).



Doc. 20. Régimes pseudo-périodique et critique.

Condensateur initialement chargé $i(0) = 0$.