

Signaux Electriques

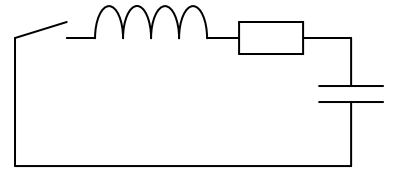
SE4 Oscillateurs amortis en régime transitoire

I Le circuit RLC série en régime libre	1
1.) Mise en équation.....	1
2.) Les solutions	3
II Réponse à un échelon de tension.....	8
1.) Les équations différentielles	8
2.) Mise en équation et résolution	8
3.) Les résultats	9
4.) Bilan énergétique	10
III Oscillateur amorti avec frottement visqueux	11
1.) Mise en équation.....	11
2.) Analogie électromécanique	12
3.) Solutions	13
4.) Bilan énergétique	14

I Le circuit RLC série en régime libre

1.) Mise en équation

a) Equation différentielle



b) Réduction canonique

On pose sur l'équation différentielle

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_c}{dt} + \frac{1}{LC} u_c(t) = 0$$

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + 2\lambda \frac{du_c}{dt} + \omega_0^2 u_c(t) = 0$$

ou

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_c}{dt} + \omega_0^2 u_c(t) = 0$$

$$2\lambda = \frac{R}{L}$$

$$\lambda = \frac{R}{2L}$$

Coefficient d'amortissement

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Pulsation propre

$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L}$$

$$Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Facteur de qualité

2.) Les solutions

On remplace la fonction par 1, la dérivée première par r , la dérivée seconde par r^2 .

Equation caractéristique $r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$ équation du second degré du type $ar^2 + br + c = 0$ dont on cherche les racines. Discriminant : $(\Delta = b^2 - 4ac)$ $\Delta = 4\lambda^2 - 4\omega_0^2$

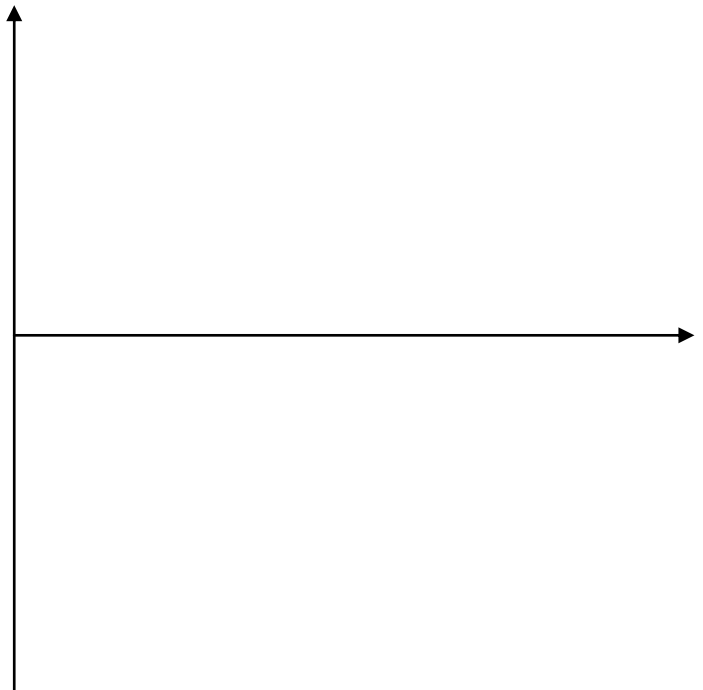
a) Cas $\Delta < 0$: Régime pseudopériodique

$$\lambda < \omega_0 \text{ ou } Q > \frac{1}{2} \text{ ou } R < R_C$$

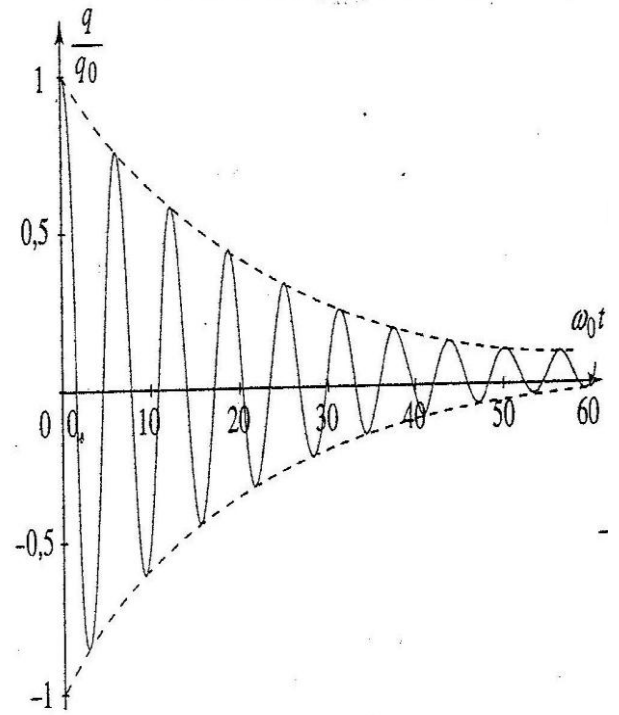
2 solutions complexes r_1 et r_2 de la forme $r = \frac{-b \pm j\sqrt{-\Delta}}{2a}$ $r = -\lambda \pm j\Omega$

$$\Omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \quad \text{Pseudo-pulsation}$$

Après calculs, on trouve : $u_C(t) = \exp(-\lambda t) \cdot [a \cos(\Omega t) + b \sin(\Omega t)] = A \exp(-\lambda t) \cos(\Omega t + \varphi)$
où a , b , A et φ sont des constantes réelles, déterminées par les conditions initiales.



Remarques: 1) La pseudo-période est plus grande que la période propre. $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} < \omega_0$ donc $T > T_0$.

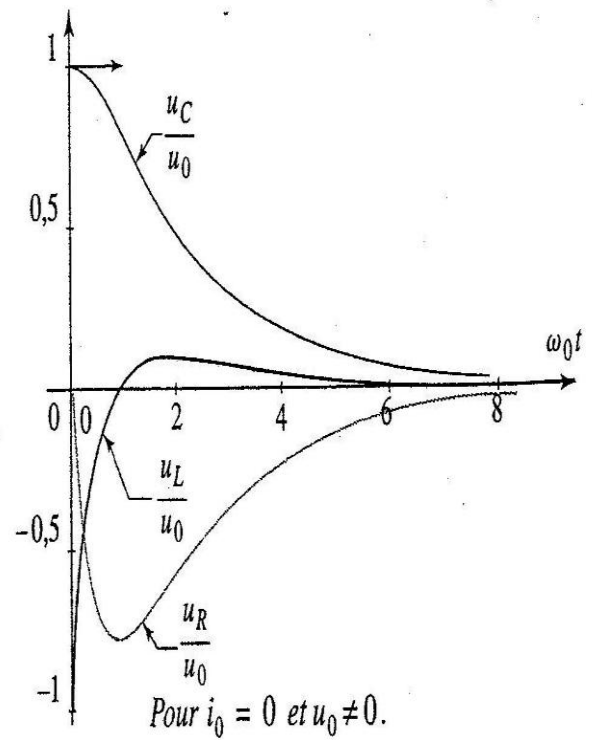


Doc. 18. Régime pseudo-périodique. $Q = 10$; $q(0) = q_0$
et $i(0) = 0$.

b) $\Delta > 0$ Régime apériodique2 solutions réelles r_1 et r_2

$$\lambda > \omega_0 \quad \text{ou} \quad Q < \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad R > R_C$$

$$u_C(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \quad A, B \text{ constantes réelles.}$$



Doc. 15. d.d.p. aux bornes des trois dipôles : régimes apériodiques $Q = 0,4$

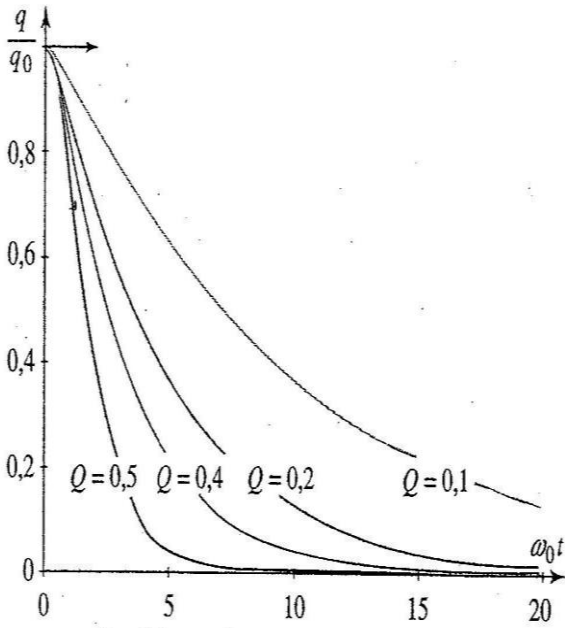
c) $\Delta = 0$: Régime critique

1 solution double réelle r_0

$$Q = \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad \lambda = \omega_0 \quad \text{ou} \quad R = R_C$$

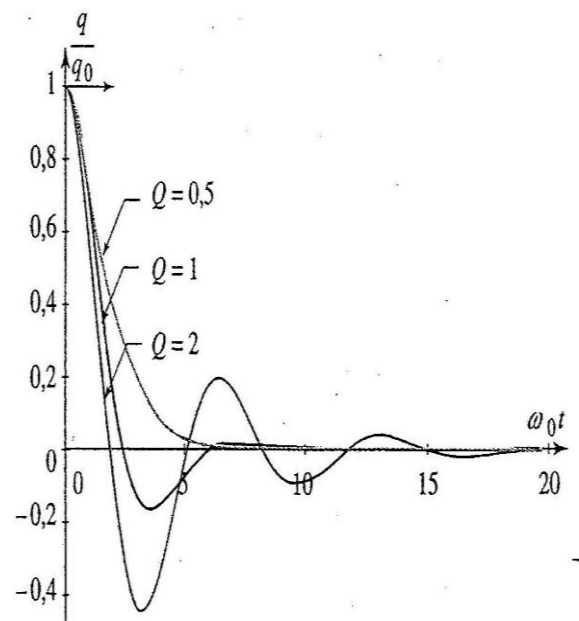
$$u_C(t) = (At + B)e^{-\lambda t}$$

A, B constantes réelles.



Conditions initiales ($q_0 \neq 0$, $i_0 = 0$).

Doc. 14. Régimes apériodique ($Q < 0,5$) et critique ($Q = 0,5$).



Doc. 20. Régimes pseudo-périodique et critique.
Condensateur initialement chargé $i(0) = 0$.

II Réponse à un échelon de tension

1.) Les équations différentielles

Généralisation : Commande $f(t)$

Réponse $y(t)$

$$a_0 y + a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} = f(t) \quad \text{Equation différentielle du second ordre (ou du premier ordre si } a_2=0)$$

Solution complète : $y(t) = y_\ell(t) + y_f(t)$

- $y_\ell(t)$ est la solution libre ou solution générale de l'équation sans second membre (ou équation homogène)

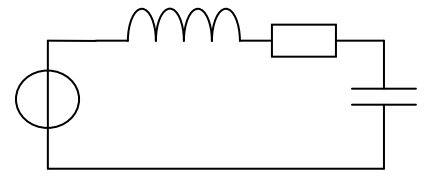
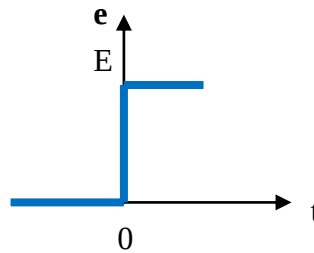
$$a_0 y_\ell + a_1 \frac{dy_\ell}{dt} + a_2 \frac{d^2 y_\ell}{dt^2} = 0$$

Elle correspond au régime libre du circuit (c'est-à-dire sources éteintes).

- $y_f(t)$ est la solution forcée ou solution particulière de l'équation avec second membre (ou équation complète)

Elle correspond à $a_0 y_f + a_1 \frac{dy_f}{dt} + a_2 \frac{d^2 y_f}{dt^2} = 0$ au régime permanent. Elle est du même type que le second membre : Si $f(t)$ est une constante, $y_f(t)$ est aussi une constante.

2.) Mise en équation et résolution

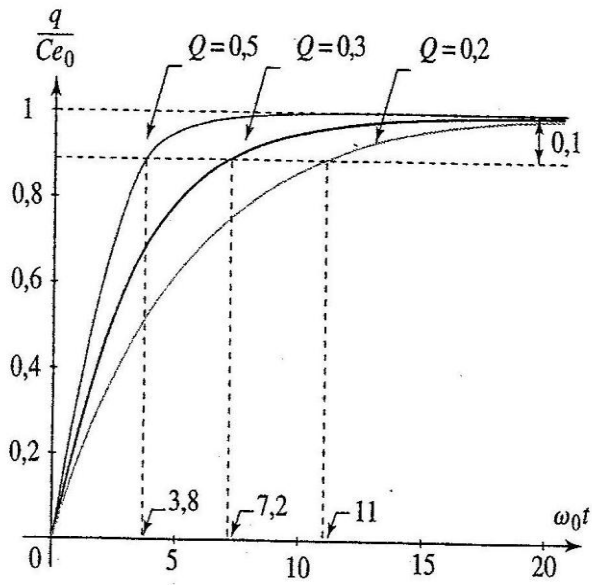


$$\Delta < 0 \quad u_C(t) = \exp(-\lambda t) \cdot [A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)] + E = K \exp(-\lambda t) \cos(\Omega t + \varphi) + E$$

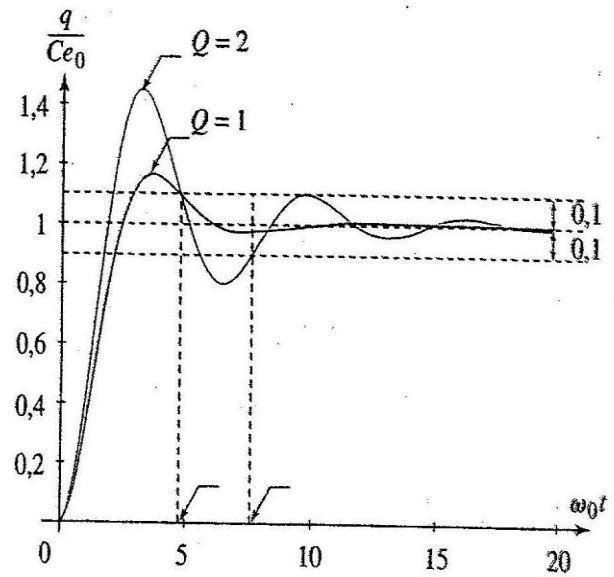
$$\Delta > 0 \quad u_C(t) = A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t} + E$$

$$\Delta = 0 \quad u_C(t) = (At + B) e^{-\lambda t} + E$$

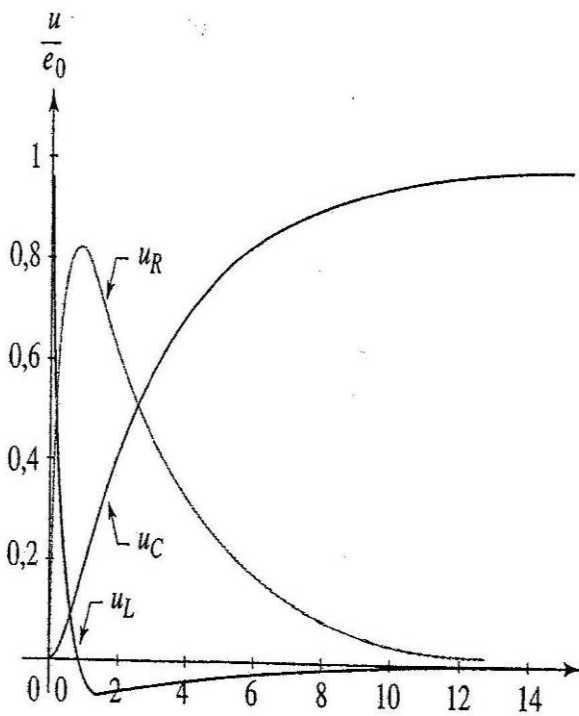
3.) Les résultats



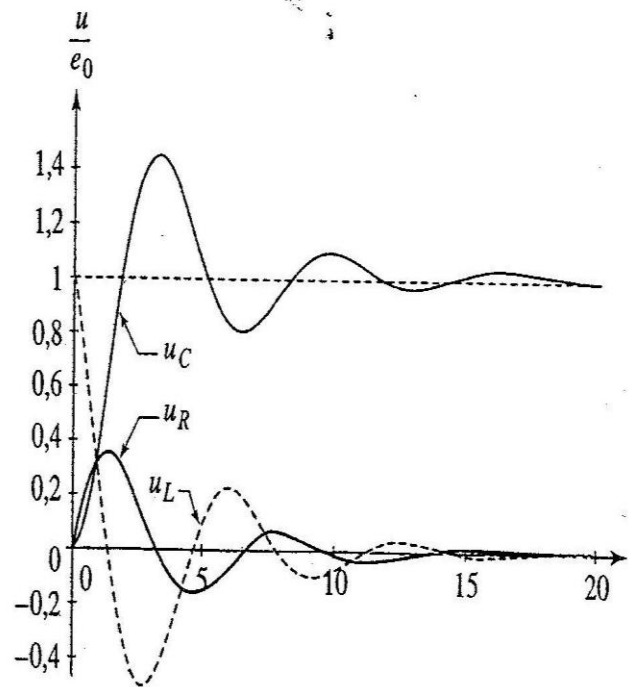
Doc. 35a. Réponse à un échelon de tension. Régimes aperiodiques.



Doc. 36a. Réponse à un échelon de tension. Régimes pseudo-périodiques.



Doc. 35c. Réponse à un échelon de tension. $Q = 0,3$.



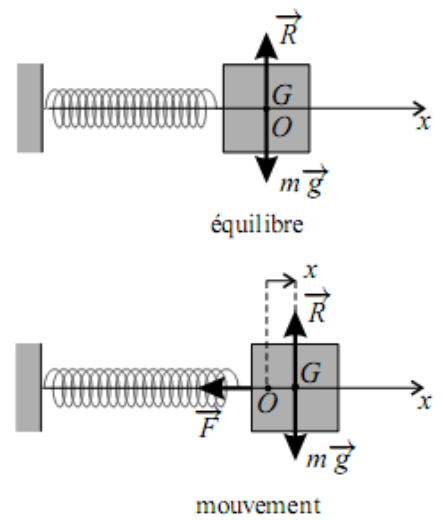
Doc. 36c. Réponse à un échelon de tension. $Q = 2$.

4.) Bilan énergétique

III Oscillateur amorti avec frottement visqueux

1.) Mise en équation

https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Meca/Oscillateurs/oscillateur_horizontal.php



$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\alpha}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0$$

Formes canoniques :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

ou

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

Pulsation propre	Coefficient d'amortissement	Facteur de qualité

2.) Analogie électromécanique

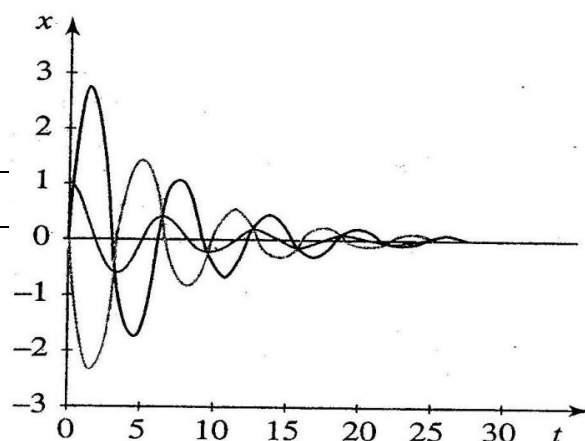
Mécanique	Electricité
Equation différentielle :	
Pulsation propre :	
Facteur de qualité	
Elongation :	
Vitesse :	
Masse :	
Coefficient de frottement fluide :	
Raideur du ressort :	
Energie mécanique :	

3.) Solutions

a) Régime pseudo-périodique

$$\Delta < 0 \quad \lambda < \omega_0 \quad \text{ou} \quad Q > \frac{1}{2}$$

$$x(t) = \exp(-\lambda t) \cdot [A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)] = K \exp(-\lambda t) \cos(\Omega t + \varphi)$$



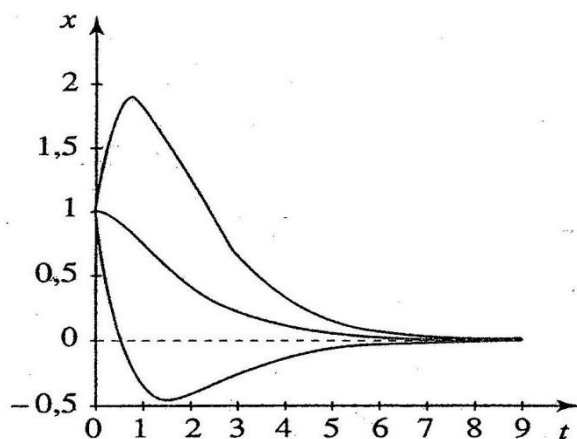
Doc. 12. Oscillateur harmonique amorti par frottement fluide : régime pseudo-périodique $\left(Q > \frac{1}{2}\right)$.

Le mobile est lâché en $x = x_0$ avec une vitesse v_0 positive, nulle ou négative pour les trois cas apparaissant sur la figure.

b) Régime apériodique

$$\Delta > 0 \quad \lambda > \omega_0 \quad \text{ou} \quad Q < \frac{1}{2}$$

$$x(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$$

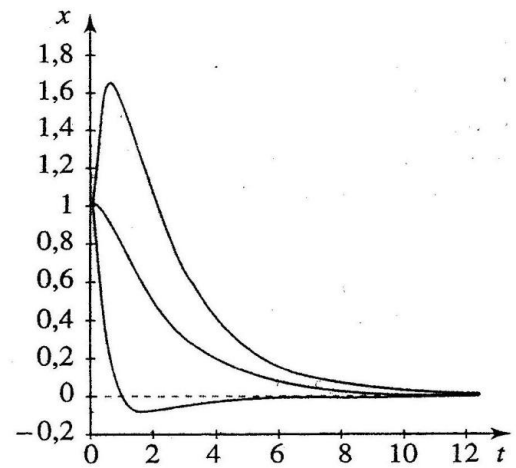


Doc. 17. Oscillateur harmonique amorti par frottement fluide : régime apériodique $\left(Q < \frac{1}{2}\right)$ suivant les conditions initiales, l'élongation passe par un extremum ou tend uniformément vers zéro.

c) Régime critique

$$\Delta=0 \quad \lambda = \omega_0 \quad \text{ou} \quad Q = \frac{1}{2}$$

$$x(t) = (At + B)e^{-\lambda t}$$



Doc. 15. Oscillateur harmonique amorti par frottement fluide : régime critique $\left(Q = \frac{1}{2}\right)$. Les conditions initiales sont les mêmes que celles du mouvement pseudo-périodique (doc. 12). Dans tous les cas, le retour à l'équilibre s'effectue plus rapidement.

4.) Bilan énergétique