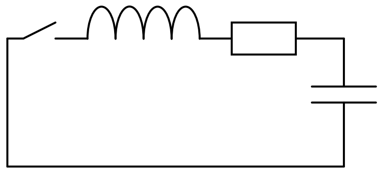
Résumé de cours SE4 Oscillateurs amortis en régime transitoire

I Le circuit RLC série en régime libre



A t = 0^- : $i = 0$ et $u_C = u_{C0} = E$
A t = 0^+ : Par continuité : $i = 0$ et $u_C = u_{C0}$, donc $u_R = 0$ et $u_L = - u_{C0}$.
$i = C\frac{du_C}{dt}$ et $u_L = L\frac{di}{dt}$ permettent d'obtenir les valeurs des dérivées.
A t∞ : C ≈ interrupteur ouvert, L ≈ fil : $i = 0$, $u_R = 0$, $u_L = 0$, $u_C = 0$.

$\boxed{\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC}u_C(t) = 0}$ $\boxed{\frac{d^2u_C}{dt^2} + 2\lambda\frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C(t) = 0}$ ou $\boxed{\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C(t) = 0}$

Même équation différentielle sur le courant.
$2\lambda = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L}$ λ coefficient d'amortissement, Q facteur de qualité $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ ω_0 pulsation propre

Equation caractéristique $\boxed{r^2 + 2\lambda\, r + \omega_0^2 = 0}$ ($ar^2 + br + c = 0$).
Discriminant : ($\Delta = b^2 - 4ac$) $\boxed{\Delta = 4\lambda^2 - 4\omega_0^2}$

a) Δ < 0 : Régime pseudopériodique $\boxed{\lambda < \omega_0 \text{ ou } Q > \frac{1}{2} \text{ ou } R < R_C}$ 2 solutions complexes r_1 et r_2 de la forme

$r = \frac{-b \pm j\sqrt{-\Delta}}{2a}$ $\boxed{r = -\lambda \pm j\Omega}$ $\boxed{\Omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}$ Pseudo-pulsation

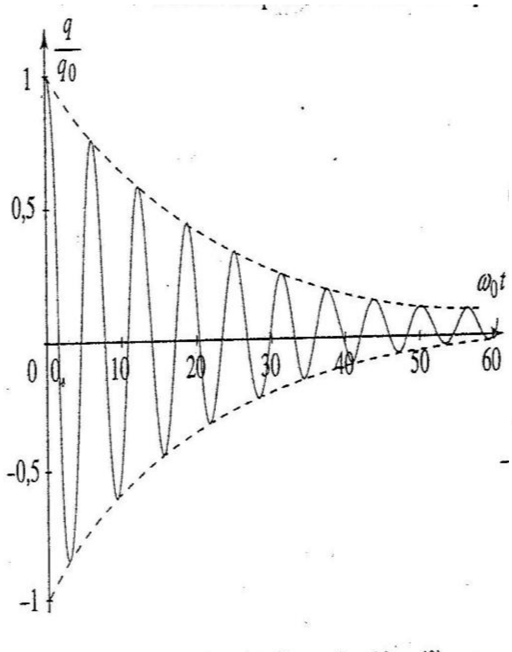
Oscillations amorties
$\boxed{u_C(t) = \exp(-\lambda t)\cdot[A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)] = K\exp(-\lambda t)\cos(\Omega t + \varphi)}$ où $\lambda = |\mathcal{Re}(r)|\ et\ \Omega = |\mathcal{Im}(r)|$

b) Δ > 0 Régime apériodique 2 solutions réelles r_1 et r_2 $\boxed{r = -\lambda \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2}}$ $\boxed{\lambda > \omega_0}$ ou $\boxed{Q < \frac{1}{2}}$

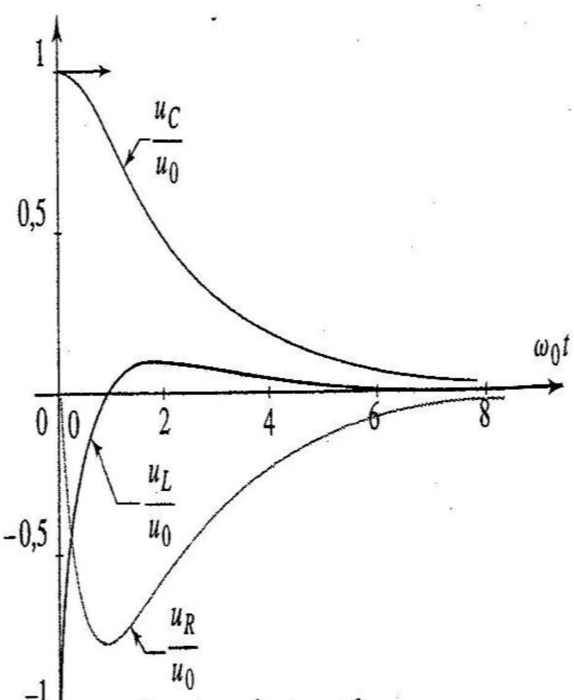
$\boxed{u_C(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}}$ A, B constantes réelles.

c) Δ = 0 : Régime critique 1 solution double réelle $r_0 = -\lambda$ $\boxed{Q = \frac{1}{2}}$ ou $\boxed{\lambda = \omega_0}$

$\boxed{u_C(t) = (At + B)e^{-\lambda t}}$ A, B constantes réelles.

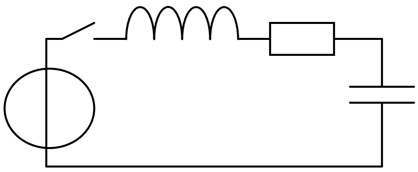


Doc. 18. *Régime pseudo-périodique.* $Q = 10$; $q(0) = q_0$ et $i(0) = 0$.



Pour $i_0 = 0$ et $u_0 \neq 0$.

II Réponse à un échelon de tension

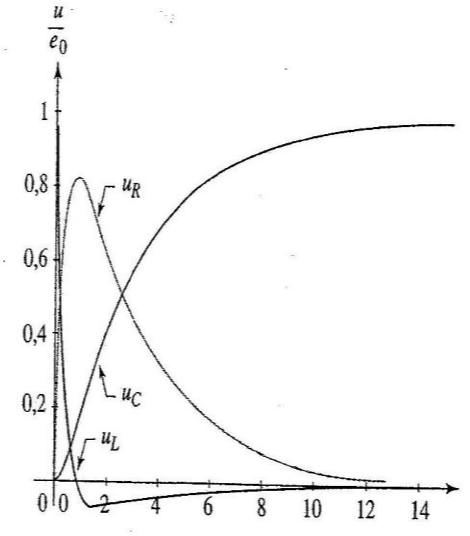


A t = 0^- : i = 0 et $u_C = 0$
A t = 0^+ : Par continuité : i = 0 et $u_C = 0$, donc $u_R = 0$ et $u_L = E$.
$i = C\frac{du_C}{dt}$ et $u_L = L\frac{di}{dt}$ permettent d'obtenir les valeurs des dérivées.
A t∞ : C ≈ interrupteur ouvert, L ≈ fil : i = 0, $u_R = 0$, $u_L = 0$, $u_C = E$.

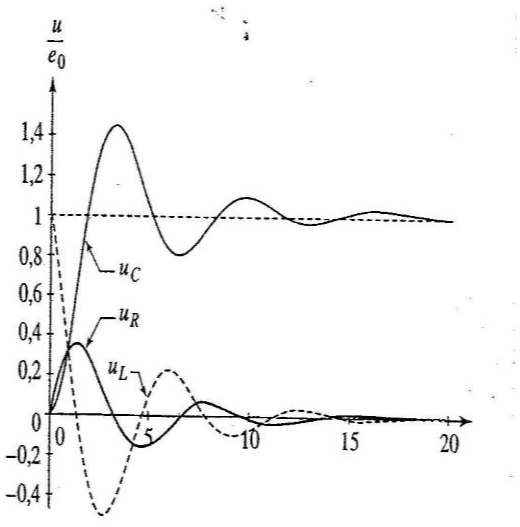
$$\boxed{\frac{d^2u_C}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{du_C}{dt}+\frac{1}{LC}u_C(t)=\frac{E}{LC}}$$

$$u_c = u_{cl}(t) + u_{cf} = u_{cl}(t) + E$$

$\Delta < 0 \quad u_C(t) = \exp(-\lambda t)\cdot[A\cos(\Omega t)+B\sin(\Omega t)]+E = K\exp(-\lambda t)\cos(\Omega t+\varphi)+E$
$\Delta > 0 \quad u_C(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}+E$
$\Delta = 0 \quad u_C(t) = (At+B)e^{-\lambda t} + E$

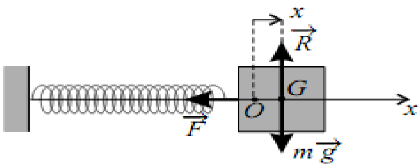


Doc. 35c. *Réponse à un échelon de tension. Q = 0,3.*



Doc. 36c. *Réponse à un échelon de tension. Q = 2.*

III Oscillateur amorti avec frottement visqueux



Conditions initiales : $x(0) = x_0$ et $v(0)=0$.

Force de frottement fluide : $\vec{F_f} = -\alpha\vec{v}$
Force de rappel du ressort : $\vec{F_r} = -k(\ell - \ell_0)\vec{e}_x$ On pose $x = \ell - \ell_0$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\alpha}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{k}{m}x=0}$$

Formes canoniques : $\boxed{\frac{d^2x}{dt^2}+2\lambda\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0}$ ou $\boxed{\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\omega_0}{Q}\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0}$

Analogie électromécanique

$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\alpha}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{k}{m}x=0}$ et $\boxed{\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dq}{dt}+\frac{1}{LC}q(t)=0}$

Energie mécanique : $\boxed{Em = Epe + Ec = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2}$

Temps de réponse à 5% : $\frac{t_{r5\%}}{T_0} \approx Q$ en régime peu amorti