

Signaux Electriques SE3 L'oscillateur harmonique

Introduction : définition de l'oscillateur harmonique

I Oscillations électrique : exemple du circuit LC

1.) Equation différentielle et résolution

2.) Bilan de puissance et d'énergie

II Oscillations mécaniques : exemple du ressort horizontal

1.) Etude dynamique : Deuxième loi de Newton

2.) Etude énergétique



Introduction : définition de l'oscillateur harmonique

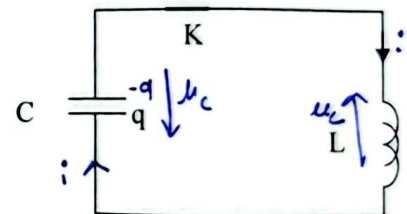
On appelle oscillateur harmonique un système physique décrit par une grandeur $x(t)$ dépendant du temps et vérifiant une équation différentielle de la forme : $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ où ω_0 est la pulsation propre de l'oscillateur harmonique (constante réelle positive, en rad.s^{-1}).

Solution $x(t) = a \cos(\omega_0 t) + b \sin(\omega_0 t)$ a, b, A et ϕ constantes, déterminées par les conditions initiales.
 $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$ A est l'amplitude, positive et ϕ l'avance de phase à l'origine.

I Oscillations électrique : exemple du circuit LC

1.) Equation différentielle et résolution

Le condensateur est initialement chargé, et K est ouvert depuis longtemps. A $t = 0$, on ferme l'interrupteur K.



Equation de maille : $u_C + u_L = 0$

$$\text{soit } u_L = L \frac{di}{dt} \text{ et } i = C \frac{du_C}{dt} \Rightarrow u_L = LC \frac{d^2 u_C}{dt^2}$$

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \omega_0^2 u_C = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC} u_C = 0$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

pulsation propre

$$u_C(t) = a \cos(\omega_0 t) + b \sin(\omega_0 t)$$

CI: à $t = 0$ $u_C(0) = u_{C0}$
 $i(0) = 0$

$\mathcal{E}_L = \frac{1}{2} L i^2$ et $\mathcal{E}_C = \frac{1}{2} C u_C^2$ sont des fctns continues du temps donc u_C et i chm.

$$\Rightarrow u_C(0^+) = u_{C0} \quad i(0^+) = 0$$

$$u_C(0^+) = a \cos(0) + b \sin(0) \Rightarrow a = u_{C0}$$

$$\frac{du_C}{dt} = -a \omega_0 \sin(\omega_0 t) + b \omega_0 \cos(\omega_0 t)$$

$$\frac{du_C}{dt}(0^+) = -a \omega_0 \sin(0) + b \omega_0 \cos(0) \Rightarrow \frac{du_C}{dt}(0^+) = b \omega_0$$

$$\text{Or } i(0^+) = C \frac{du_C}{dt}(0^+) = 0 \Rightarrow \frac{b \omega_0}{C} = 0 \Rightarrow b = 0 \text{ car } (\omega_0 / C) > 0$$

$$u_C(t) = u_{C0} \cos(\omega_0 t)$$

$\cos x$ est 2π -périodique :

$$u_C(t) = \cos(\omega_0 t + n 2\pi) \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$= \cos(\omega_0(t + n \frac{2\pi}{\omega_0}))$$

donc u_C est $\frac{2\pi}{\omega_0}$ -périodique

Fréquence propre: $f_0 = \frac{1}{T_0}$

$$i = C \frac{du_C}{dt} = -C \omega_0 \sin(\omega_0 t)$$

$$\frac{di}{dt} = -C \omega_0^2 \cos(\omega_0 t)$$

$$\text{Eq: } u_L = L \frac{di}{dt} \Rightarrow L C \omega_0^2 u_{C0} \cos(\omega_0 t)$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow u_L = -u_{C0} \cos(\omega_0 t) \Rightarrow u_L = -u_C$$

période propre
 $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

courbe violette : $u_c(t)$
 courbe bleu : $i(t)$
 courbe noire : $\frac{di}{dt}$

Eq. $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$

$$= A (\cos(\omega_0 t) \cos(\varphi) - \sin(\omega_0 t) \sin(\varphi))$$

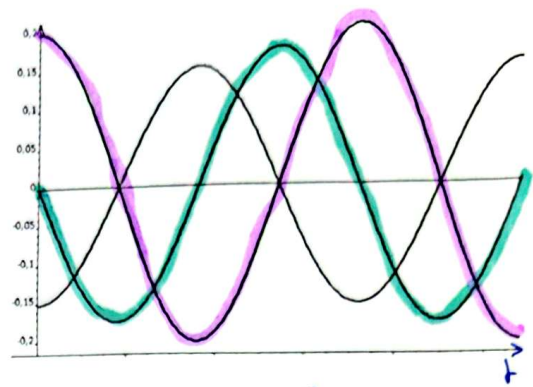
$$= a \cos(\omega_0 t) + b \sin(\omega_0 t)$$

avec $a = A \cos(\varphi)$ et $b = -A \sin(\varphi)$

$$a^2 + b^2 = A^2 \cos^2(\varphi) + A^2 \sin^2(\varphi)$$

$$= A^2 (\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) = A^2 \text{ donc } \sqrt{a^2 + b^2} = A \text{ Amplitude } \frac{b}{a} = -\frac{A \sin \varphi}{A \cos \varphi} = -\tan \varphi$$

$$\text{Donc } \tan(\varphi) = -\frac{b}{a} \text{ Déphasage } \varphi$$



2.) Bilan de puissance et d'énergie

eq. maille. $u_L + u_C = 0 \Rightarrow i u_L + i u_C = 0$ $\begin{cases} u_L = L \frac{di}{dt} \\ i = C \frac{du_C}{dt} \end{cases}$
 $\Rightarrow i L \frac{di}{dt} + C \frac{du_C}{dt} u_C = 0$
 $\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L i^2 \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C u_C^2 \right) = 0$
 $\Rightarrow \frac{d}{dt} (E_L + E_C) = 0$
 $\Rightarrow E_L + E_C = \text{cst}$

à $t = 0^+ \mid u_C = u_{C0} \mid i = 0$
 $E_C = \frac{1}{2} C u_{C0}^2 \mid E_L = 0$

Donc $E_C + E_L = \frac{1}{2} C u_{C0}^2$

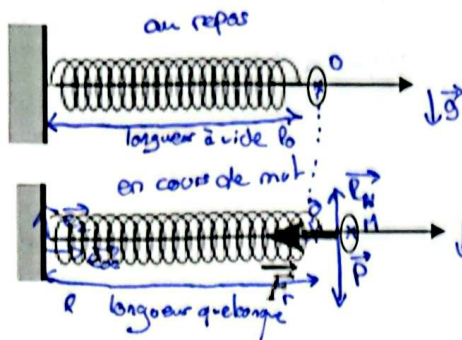
Il y a échange d'énergie entre L et C mais la somme reste constante

En pratique : La bobine n'est pas parfaite. L'énergie diminue au cours du temps

II Oscillations mécaniques : exemple du ressort horizontal

1.) Etude dynamique : Deuxième loi de Newton

https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Meca/Oscillateurs/oscillateur_horizontal.php



Référentiel terrestre supposé galiléen

Système = {anneau, de masse m, coulissant sans frottement le long d'un horizontal}

Forces Appliquées :

* Poids : $\vec{P} = m\vec{g}$

* Réaction normale : $\vec{R}_N$ (réaction $\perp$ tige en l'abs. de frottement)

* Force de rappel du ressort : $\vec{F}_r = -k(l - l_0)\vec{e}_x$

k constante de raideur du ressort $k > 0$

$\vec{e}_x$ dans le sens de l'étirement du ressort

R_q : Expression valable $\forall t$ si le ressort est étiré (dessin) $l > l_0 \Rightarrow \vec{F}_r$ dans le sens de $(-\vec{e}_x)$ force de rappel

A l'équilibre : $\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow R_N\vec{e}_y - m\vec{g} - k(l_{eq} - l_0)\vec{e}_x = \vec{0}$

sur $\vec{e}_x$: $-k(l_{eq} - l_0) = 0 \Rightarrow l_{eq} = l_0$

sur $\vec{e}_y$: $R_N - mg = 0 \Rightarrow R_N = mg$

Principe fondamental de la dynamique (ou 2^e loi de Newton)

$m\vec{a} = \sum \vec{F}$: $m\vec{a}_M = \vec{P} + \vec{R}_N + \vec{F}_r$ anneau très petit confondu avec son centre, noté M

$\vec{OM} = x\vec{e}_x$ où $x = l - l_0$ $\vec{v}_M = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \dot{x}\vec{e}_x$ où $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$; $\vec{a}_M = \frac{d\vec{v}_M}{dt} = \ddot{x}\vec{e}_x$ où $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$

PFD : $m\ddot{x}\vec{e}_x = -mg\vec{e}_y + R_N\vec{e}_y - kx\vec{e}_x$

sur $\vec{e}_y$: $0 = R_N - mg \Rightarrow R_N = mg$

sur $\vec{e}_x$: $m\ddot{x} = -kx \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ où $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ (oscillateur harmonique)

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ pulsation propre

$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi) = a \cos(\omega_0 t) + b \sin(\omega_0 t)$

CI : A $t=0$: On étudie le ressort de $x_0 = l(t=0) - l_0$, et on lâche sans vitesse initiale

$x(t=0) = x_0$

$\dot{x}(t=0) = v_0 = 0$

$x(0) = a \cos(0) + b \sin(0) = a \Rightarrow \boxed{a = x_0}$

$\frac{dx}{dt} = -a\omega_0 \sin(\omega_0 t) + b\omega_0 \cos(\omega_0 t)$

$\frac{dx}{dt}(0) = -a\omega_0 \sin(0) + b\omega_0 \cos(0) = b\omega_0 \Rightarrow \boxed{b = 0}$

d'où $x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)$

Période propre : $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ Fréquence propre : $f_0 = \frac{1}{T_0}$

- 4 Rq. : Pour la courbe gris clair, la vitesse initiale est nulle $\Rightarrow$ Tangente à l'origine horizontale.
Courbe gris foncé : avec d'autre CI, $x_0 \neq 0$ le ressort n'est pas étiré : $v_0 \neq 0$ (On donne une petite pichenette)
 $x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$ Cf TD
Courbe noire : $x_0 \neq 0$ et $v_0 \neq 0$ On étire le ressort et on lui donne une vitesse initiale
 $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \Phi)$ A, Φ (a, b) à déterminer
A amplitude Φ avance de phase

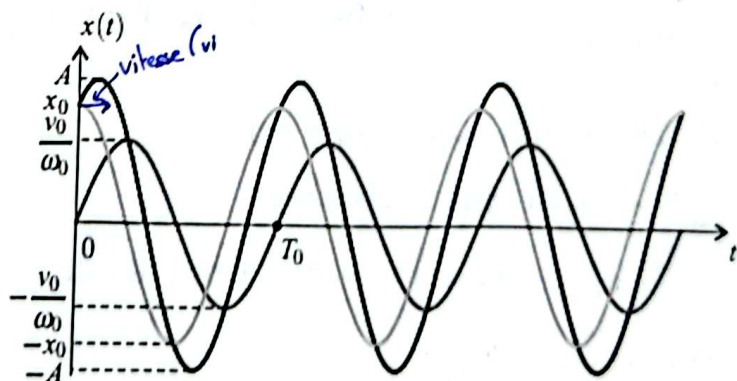


Figure 1.2 – Représentation graphique de $x(t)$ en fonction de t . En gris clair : cas $x_0 \neq 0$ et $v_0 = 0$; en gris foncé : cas $x_0 = 0$ et $v_0 \neq 0$; en noir : cas $x_0 \neq 0$ et $v_0 \neq 0$. La période des oscillations est $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ (voir paragraphe 2).

en bleu

Remarque : $x = A \cos(\omega_0 t)$

$$y = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

 $y(t)$ est en avance / $x(t)$ (Hear il est passé) $\Rightarrow \varphi > 0$ pour la dessin Avance de phase

$$y(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$y(t) = A \cos\left[\omega_0 \left(t + \frac{\varphi}{\omega_0}\right)\right]$$

 $\frac{\varphi}{\omega_0}$ est homogène à un temps $\frac{\varphi}{\omega_0} = \Delta t$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi = \omega_0 \times \Delta t} \text{ rad} \quad \text{ou } \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \Rightarrow \boxed{\varphi = \frac{2\pi \Delta t}{T_0}}$$

$$y(t) = A \cos(\omega_0 (t + \Delta t)) \quad \text{On pose } t' = t + \Delta t$$

$$y(t) = A \cos(\omega_0 t')$$

Nouvelle origine des temps 0'

$$t' = 0 \quad t' = t + \Delta t = 0 \Rightarrow \boxed{t = -\Delta t}$$

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) \text{ élongation}$$

$$\text{Vitesse : } \dot{x}(t) = -x_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t) \\ \Rightarrow +x_0 \omega_0 \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Avancement de phase de la vitesse

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \quad \text{On } \varphi = \omega_0 \Delta t \text{ et } \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{T_0} \times \Delta t$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta t = \frac{\varphi T_0}{2\pi}} \quad \boxed{\Delta t = \frac{\pi}{2} \times \frac{T_0}{2\pi} = \frac{T_0}{4}}$$

La vitesse est en quadrature avec par rapp. à l'élongation

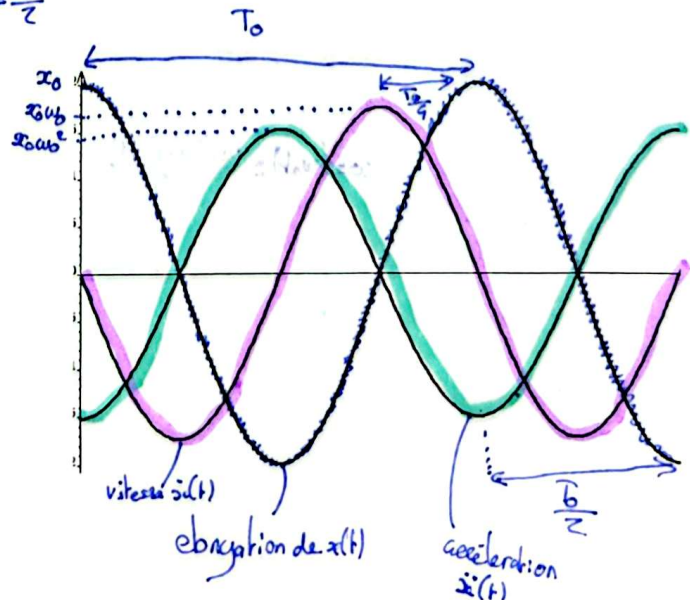
$$\text{Accélération : } \ddot{x}(t) = -x_0 \omega_0^2 \cos(\omega_0 t) \quad \boxed{\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 x(t)}$$

$$\boxed{\ddot{x}(t) = x_0 \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \pi)}$$

 $\varphi = \pi$ avance de phase de l'accélération / élongation

L'accélération est en opposition de phase / élongation

$$\varphi = \omega_0 \Delta t = \frac{2\pi}{T_0} \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{\varphi T_0}{2\pi} = \frac{\pi T_0}{2\pi} = \frac{T_0}{2}$$



2.) Etude énergétique

Rappels

Travail d'une force constante, lorsque son point d'application M se déplace de A à B : $W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}$

Si le travail de F ne dépend pas du chemin suivi, la force est dite conservative et le travail s'écrit sous la forme :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = -[Ep(B) - Ep(A)] = -\Delta Ep$$

Energie potentielle de pesanteur : $E_{pp} = mgz + cste$ si z est l'altitude

Energie potentielle élastique : $E_{pe} = \frac{1}{2} kx^2 + cste$ où $x = l - l_0$ k la ct d'élongation du ressort

Energie cinétique : $E_c(M) = \frac{1}{2} m v^2(M)$

L'énergie mécanique $E_m = E_c + E_p$ se conserve si toutes les forces qui travaillent dérivent d'une énergie potentielle (en l'absence de frottements)

Pour le ressort horizontal

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)$$

$$E_m = E_c + E_p \quad \text{où } E_p = E_{pp} + E_{pe}$$

$$E_{pp} = cste \quad \text{car } z = cste$$

$$E_{pe} = \frac{1}{2} kx^2 + cste$$

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 \quad \text{Il n'y a pas de frottement donc } E_m = cste$$

$$E_m = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} m v^2 = cste \quad \text{On prend } cste = 0$$

$$v = \dot{x} = -x_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t)$$

$$\Rightarrow E_m = \frac{1}{2} k x_0^2 \cos^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2} m x_0^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t)$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$\Rightarrow E_m = \frac{1}{2} k x_0^2 \cos^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2} m \times \frac{k}{m} x_0^2 \sin^2(\omega_0 t)$$

$$= \frac{1}{2} k x_0^2 (\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t))$$

$$\boxed{E_m = \frac{1}{2} k x_0^2 = cste}$$

Donc l'énergie mécanique se conserve

$$E_{pe} = \frac{1}{2} kx^2 \quad (cste = 0) \quad \text{où } x = x_0 \cos(\omega_0 t)$$

$$E_{pe} = \frac{1}{2} k x_0^2 \cos^2(\omega_0 t)$$

$$\cos(2\omega_0 t) = 2\cos^2(\omega_0 t) - 1 \Rightarrow \cos^2(\omega_0 t) = \frac{\cos(2\omega_0 t) + 1}{2}$$

$$E_{pe} = \frac{1}{2} k x_0^2 \left(\frac{\cos(2\omega_0 t) + 1}{2} \right)$$

$$\boxed{E_{pe} = \frac{1}{4} k x_0^2 [\cos(2\omega_0 t) + 1]}$$

$$\omega' = 2\omega_0$$

$$T' = \frac{2\pi}{\omega'} = \frac{2\pi}{2\omega_0} = \frac{T_0}{2} \quad \text{où } T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

