

Signaux Electriques

SE4 Oscillateurs amortis en régime transitoire

I Le circuit RLC série en régime libre	1
1.) Mise en équation	1
2.) Les solutions	3
II Réponse à un échelon de tension	8
1.) Les équations différentielles	8
2.) Mise en équation et résolution	8
3.) Les résultats	9
4.) Bilan énergétique	10
III Oscillateur amorti avec frottement visqueux	11
1.) Mise en équation	11
2.) Analogie électromécanique	12
3.) Solutions	13
4.) Bilan énergétique	14

I Le circuit RLC série en régime libre

1.) Mise en équation

a) Equation différentielle

CI à $t < 0$ C est chargé (tension u_{C0})
et le courant qui circule est nul

à $t = 0$ On ferme k

à $t > 0$ equ. de maille: $0 = u_L + u_R + u_C$

$$\text{or } u_L = L \frac{di}{dt} \quad u_R = Ri \quad \text{et } i = C \frac{du_C}{dt}$$

$$\text{donc } 0 = u_C + LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt}$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{u_C}{LC} + \frac{R}{L} \frac{du_C}{dt}$$

$$\text{De plus: } L \frac{di}{dt} + Ri + u_C = 0$$

$$\Rightarrow 0 = L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{du_C}{dt}$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{i}{LC}$$

$$E_L = \frac{1}{2} L i^2 \quad \text{et} \quad E_C = \frac{1}{2} C u_C^2 \quad \text{sont conservés en}$$

fonction du temps

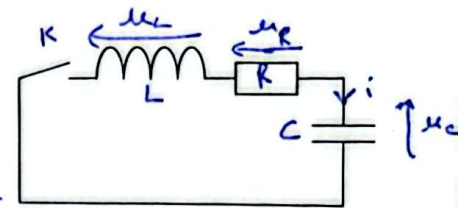
$$\Rightarrow i(0^-) = i(0^+) \Rightarrow i(0^+) = 0$$

$$u_C(0^-) = u_C(0^+) \Rightarrow u_C(0^+) = u_{C0}$$

Rq. à $t = 0^+$

$$L \frac{di}{dt}(0^+) + Ri(0^+) + u_C(0^+) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{di}{dt}(0^+) = -\frac{u_{C0}}{L}$$

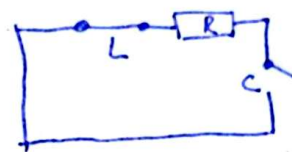


à $t \rightarrow \infty$ schéma équivalent

Régime continu permanent

$$u_L = L \frac{di}{dt} = 0 \quad \text{car } i \text{ est } \approx \text{const}$$

$$i = C \frac{du_C}{dt} = 0 \quad \text{car } u_C \text{ est } \approx \text{const} \Rightarrow \text{condensateur } \approx \text{inter. ouv.}$$



$$\begin{cases} i = 0 \text{ à } t \rightarrow \infty \\ u_R = 0 \\ u_C = 0 \text{ (maille)} \end{cases}$$



b) Réduction canonique

On pose sur l'équation différentielle $\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C(t) = 0$ ②

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + 2\lambda \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C(t) = 0 \quad \text{③} \quad \text{ou} \quad \frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C(t) = 0 \quad \text{④}$$

② → ③ $2\lambda = \frac{R}{L} \Rightarrow \lambda = \frac{R}{2L} > 0 \text{ s}^{-1}$ Coefficient d'amortissement

$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} > 0 \text{ rad.s}^{-1}$ Pulsation propre

② → ④ $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L} \Rightarrow Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} > 0$ Facteur de qualité sans dimension

démo : étape 1 $Q = \frac{L\omega_0}{R} \times \frac{\omega_0}{\omega_0} = \frac{L\omega_0^2}{R\omega_0}$ or $\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow Q = \frac{1}{RC\omega_0}$

étape 2 $Q = \frac{1}{RC\omega_0}$ or $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow Q = \frac{1}{RC} \times \sqrt{LC} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$

Par identification entre ③ et ④

$2\lambda = \frac{\omega_0}{Q} \Rightarrow \lambda = \frac{\omega_0}{2Q}$ ⑤

2.1 Les solutions

Résolution

On remplace la fonction par 1, la dérivée première par r , la dérivée seconde par r^2 .

⑤ Equation caractéristique $r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$

équation du second degré du type $ar^2 + br + c = 0$ dont

on cherche les racines.

Discriminant : $(\Delta = b^2 - 4ac)$ $\Delta = 4\lambda^2 - 4\omega_0^2$

$\Delta = 4(\lambda^2 - \omega_0^2) = 4(\lambda - \omega_0)(\lambda + \omega_0)$

1^{er} cas $\Delta > 0$ $\lambda > \omega_0$ ② $\lambda = \frac{\omega_0}{2Q} > \omega_0$

$\Rightarrow Q < \frac{1}{2}$

$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ $R > R_c$ où $R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$
Résistance critique

2 solutions réelles r_1 et r_2

$(r = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a})$

$r = \frac{-2\lambda \pm \sqrt{4(\lambda^2 - \omega_0^2)}}{2}$

$r = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$

2^{ème} cas $\Delta = 0$ 1 solution réelle double :

$(r = \frac{-b}{2a})$ $r = \frac{-2\lambda}{2} = -\lambda$

a) Cas $\Delta < 0$: Régime pseudopériodique

$\lambda < \omega_0$ ou $Q > \frac{1}{2}$ ou $R < R_c$

à redémontrer depuis le début

2 solutions complexes r_1 et r_2 de la forme $r = \frac{-b \pm j\sqrt{-\Delta}}{2a}$ $r = -\lambda \pm j\Omega$

$\Omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ Pseudo-pulsation

Après calculs, on trouve $u_c(t) = \exp(-\lambda t) \cdot [a \cos(\Omega t) + b \sin(\Omega t)] = A \exp(-\lambda t) \cos(\Omega t + \varphi)$

où a , b , A et φ sont des constantes réelles, déterminées par les conditions initiales.

A amplitude $\rightarrow$
 φ phase initiale

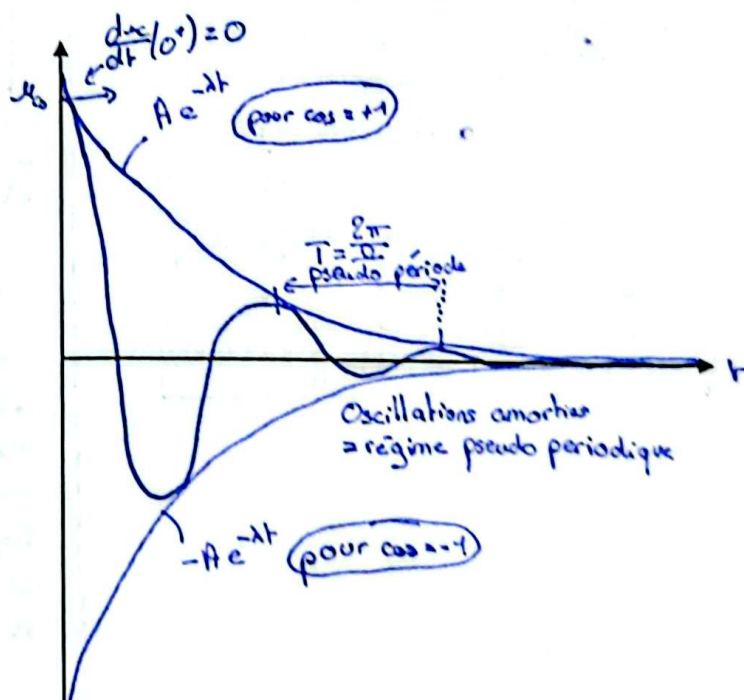
$u_c(t) = A \exp(-\lambda t) \cos(\Omega t + \varphi)$

à $t = 0^+$ $u_c(0^+) = u_{c0}$

$i = C \frac{du_c}{dt} \Rightarrow i(0^+) = 0$

$\Rightarrow (\frac{du_c}{dt})|_{(0^+)} = 0$

R_0 : Régime permanent atteint au bout de
constante de temps $\tau = \frac{1}{\lambda}$
ou temps de relaxation



Remarques: 1) La pseudo-période est plus grande que la période propre. $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} < \omega_0$ donc $T > T_0$.

2) $\cos R=0$ (cf SE3)

$$\textcircled{2} \Rightarrow \frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{1}{LC} u_c = 0 \quad \text{On pose } \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

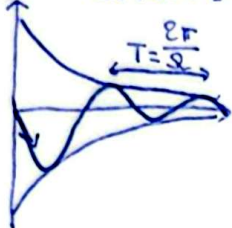
$$\Rightarrow \frac{d^2 u_c}{dt^2} + \omega_0^2 u_c = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} u_c(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \\ = a \cos(\omega_0 t) + b \sin(\omega_0 t) \end{array} \right.$$

ω_0 pulsation propre

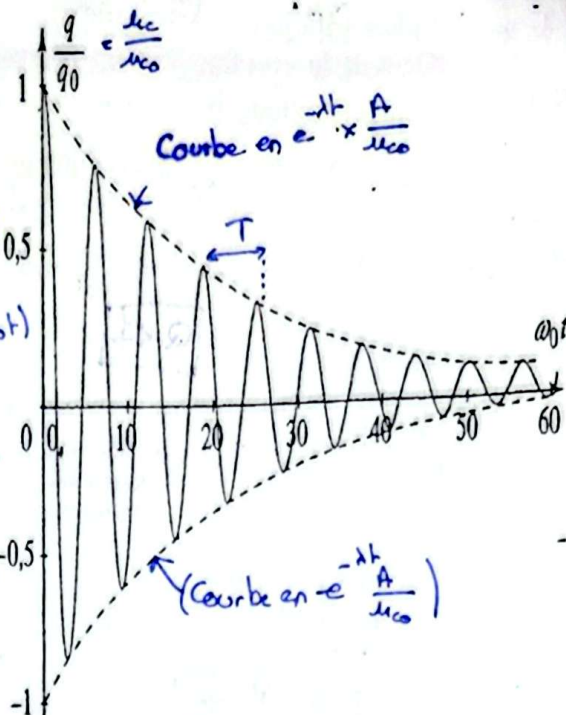
$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \text{ période propre}$$

3) Courant vérifie la m^{ème} équation diff ③

$$i(t) = A e^{-\lambda t} \cos(\Omega t + \varphi) \quad \text{avec des C.I. } \neq$$



$$\left. \begin{array}{l} i(0^+) = 0 \\ \frac{di}{dt}(0^+) = -\frac{u_{c0}}{L} \end{array} \right\}$$



Doc. 18. Régime pseudo-périodique. $Q = 10$; $q(0) = q_0$ et $i(0) = 0$. $u_c(0) = u_{c0}$

a) Détermination des constantes

$$u_c(0^+) = u_{c0} \text{ et } \left(\frac{du_c}{dt} \right)(0^+) = 0$$

$$u_c(t) = e^{-\lambda t} (a \cos(\Omega t) + b \sin(\Omega t))$$

$$f(t) = e^{-\lambda t} \quad f'(t) = -\lambda e^{-\lambda t}$$

$$g(t) = a \cos(\Omega t) + b \sin(\Omega t)$$

$$g'(t) = -a\Omega \sin(\Omega t) + b\Omega \cos(\Omega t)$$

$$u_c(t) = f(t) \cdot g(t)$$

$$u_c'(t) = -\lambda e^{-\lambda t} (a \cos(\Omega t) + b \sin(\Omega t)) + e^{-\lambda t} (-a\Omega \sin(\Omega t) + b\Omega \cos(\Omega t))$$

$$\frac{du_c}{dt}(0^+) = -\lambda e^0 (a \cos(0) + b \sin(0)) + e^0 (-a\Omega \sin(0) + b\Omega \cos(0))$$

$$= -\lambda a + b\Omega = 0 \Rightarrow b\Omega = \lambda a$$

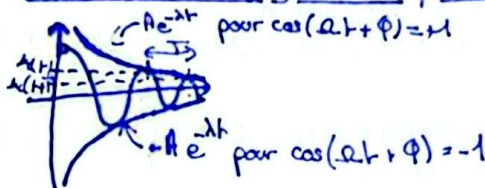
$$\Rightarrow \boxed{b = \frac{\lambda a}{\Omega}}$$

$$u_c(0^+) = e^0 (a \cos(0) + b \sin(0)) = a = u_{c0}$$

$$\text{et donc } \boxed{b = \frac{\lambda u_{c0}}{\Omega}}$$

$$\boxed{u_c(t) = u_{c0} e^{-\lambda t} \left(\cos(\Omega t) + \frac{\lambda}{\Omega} \sin(\Omega t) \right)}$$

5) Décrément Logarithmique δ



pour 2 points de contact successifs sur l'exp positive:

$$\frac{u_c(t+T)}{u_c(t)} = \frac{A e^{-\lambda(t+T)}}{A e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda T}$$

$$\Rightarrow \ln \left[\frac{u_c(t+T)}{u_c(t)} \right] = -\lambda T$$

$$\boxed{\delta = \ln \left[\frac{u_c(t)}{u_c(t+T)} \right] = \lambda T}$$

delta minuscule (cf TP)
caractérise la vitesse de décroissance des oscillations (sans unité)

6) Temps de réponse à 5% t_{rs} .

• Régime du 1^{er} ordre (cf SE2)

$$u_c(t) = u_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

$$t_{rs}: \text{ tq } \frac{u_c}{u_0} = \frac{5}{100} = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{5}{100}\right) = -\frac{t}{\tau} \Rightarrow t_r = \tau \ln\left(\frac{5}{100}\right) \approx 3\tau$$

• Régime du 2^{ème} ordre:

Même type de courbe, pour la courbe enveloppe des oscillations

$$u_c \approx u_{c0} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \text{ ou } \boxed{\tau = \frac{1}{\lambda}}$$

D'après les deux formes canoniques, $\boxed{2\lambda = \frac{\omega_0}{Q}}$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\omega_0}{2Q} \Rightarrow \tau = \frac{1}{\lambda} = \frac{2Q}{\omega_0}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \Rightarrow \tau = \frac{2Q}{2\pi} \cdot T_0 \Rightarrow \boxed{\tau = \frac{QT_0}{\pi}}$$

Temps de réponse $\approx 5\%$ $t_r \approx 3\tau$

$$t_r \approx \frac{3Q T_0}{\pi} \quad \pi \approx 3,1 \Rightarrow \boxed{t_r \approx Q T_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{Q \approx \frac{t_r}{T_0}}$$

Pour un régime pseudo périodique peu amorti (Q grand):

$$\begin{array}{l} \text{pseudo} \\ \text{periode} \end{array} T \approx T_0 \Rightarrow \boxed{Q \approx \frac{t_r}{T}} \quad \begin{array}{l} \text{periode} \\ \text{propre} \end{array}$$

On compte le nb d'oscillations d'amplitude non négligeable

$$\boxed{N \approx Q}$$

ex doc 18 $\boxed{N \approx 10 \approx Q}$

b) $\Delta > 0$ Régime apériodique2 solutions réelles r_1 et r_2

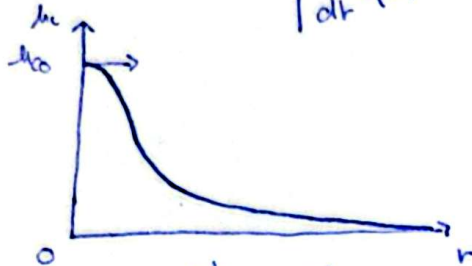
$$\lambda > \omega_0 \quad \text{ou} \quad Q < \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad R > R_d$$

$$u_C(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \quad A, B \text{ constantes réelles.}$$

$$r = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \quad \left| \begin{array}{l} r_1 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} < 0 \\ r_2 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} < 0 \end{array} \right.$$

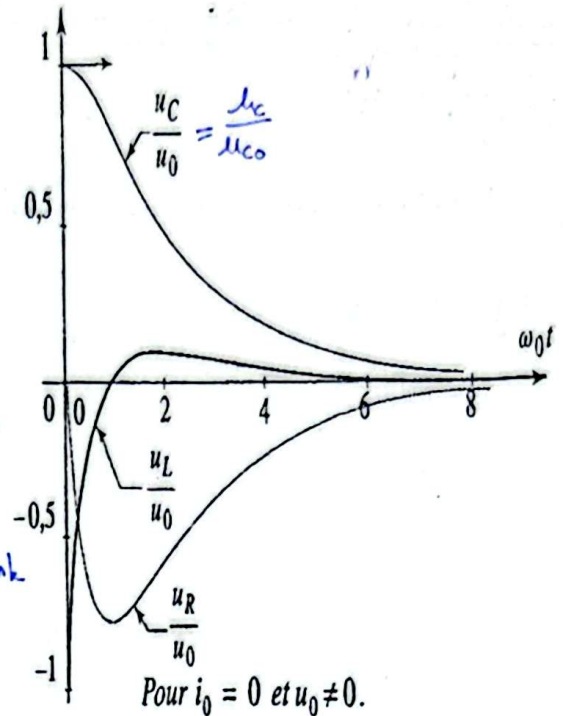
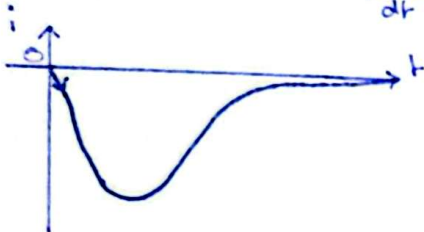
$$u_C(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$$

$$u_C \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \quad \left| \begin{array}{l} u_C(0^+) = u_{C0} \\ \frac{du_C}{dt}(0^+) = 0 \end{array} \right.$$



$$i(t) = a_1 e^{r_1 t} + b_1 e^{r_2 t}$$

$$\left| \begin{array}{l} i(0^+) = 0 \\ \frac{di}{dt}(0^+) = -\frac{u_{C0}}{L} \end{array} \right. \quad \text{pente de la tangente à l'origine} < 0$$

Doc. 15. d.d.p. aux bornes des trois dipôles : régimes apériodiques $Q = 0,4$ Rq: Détermination des constantes pour u_C :

$$u_C(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \quad \left| \begin{array}{l} u_C(0^+) = u_{C0} \\ \frac{du_C}{dt}(0^+) = 0 \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} A+B = u_{C0} \\ A r_1 e^0 + B r_2 e^0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = u_{C0} - B \\ A r_1 + B r_2 = 0 \end{cases}$$

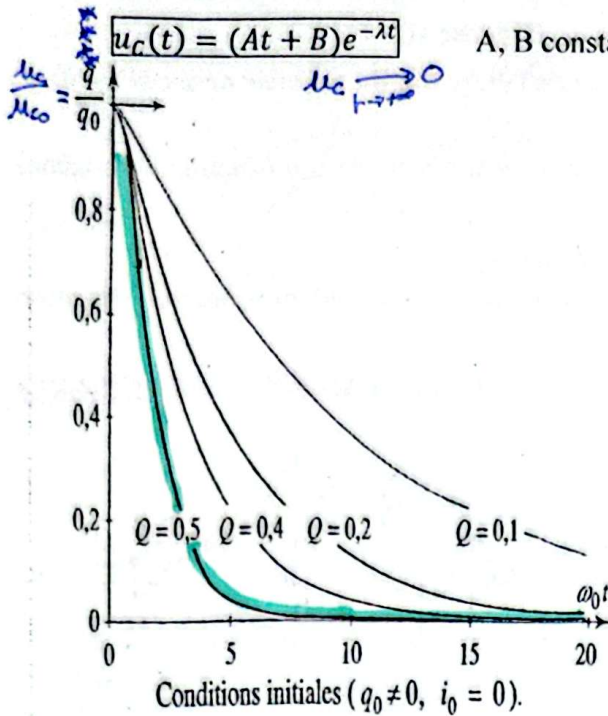
$$\Rightarrow \begin{cases} A = u_{C0} - B \\ u_{C0} r_1 + B(r_2 - r_1) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} B = \frac{u_{C0} r_1}{r_2 - r_1} \\ A = \frac{u_{C0} r_2}{r_2 - r_1} \end{cases}}$$

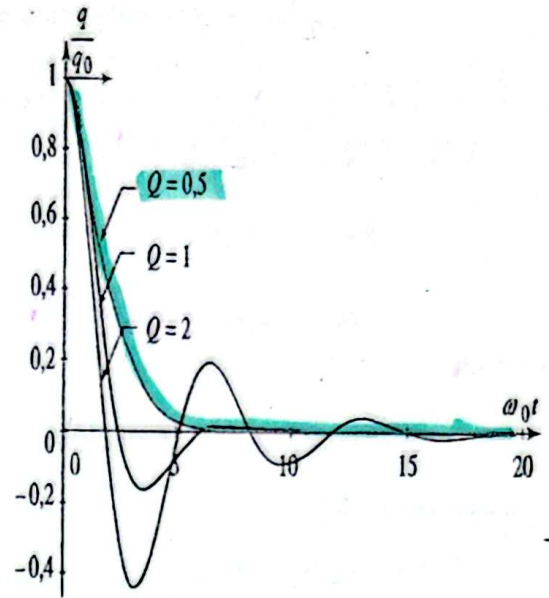
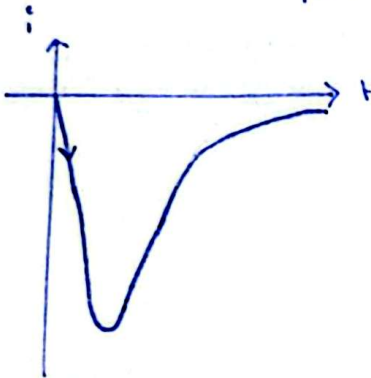
c) $\Delta = 0$: Régime critique1 solution double réelle $r_0 = -\lambda$ $Q = \frac{1}{2}$ ou $\lambda = \omega_0$ ou $R = R_C$ à démontrer

$$u_c(t) = (At + B)e^{-\lambda t}$$

A, B constantes réelles.

Doc. 14. Régimes apériodique ($Q < 0,5$) et critique ($Q = 0,5$).

$$i(t) = (A_1 t + B_1) e^{-\lambda t} \quad \left| \begin{array}{l} i(0^+) = 0 \\ \frac{di}{dt}(0^+) = -\frac{u_{co}}{L} \end{array} \right.$$

Doc. 20. Régimes pseudo-périodique et critique.
Condensateur initialement chargé $i(0) = 0$.Bq : Détermination des constantes pour u_c

$$u_c(t) = (A + Bt) e^{-\lambda t} \quad \left| \begin{array}{l} u_c(0^+) = u_{co} \\ \frac{du_c}{dt}(0^+) = 0 \end{array} \right.$$

$$\frac{du_c}{dt}(t) = A e^{-\lambda t} - A \lambda t e^{-\lambda t} - \lambda B e^{-\lambda t}$$

$$\begin{cases} B = u_{co} \\ A - \lambda B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = u_{co} \\ A = \lambda B = \lambda u_{co} \end{cases}$$

II Réponse à un échelon de tension

1.) Les équations différentielles

Généralisation : Commande $f(t)$

Réponse $y(t)$

$$a_0 y + a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} = f(t) \quad \text{Equation différentielle du second ordre (ou du premier ordre si } a_2=0)$$

Solution complète : $y(t) = y_f(t) + y_l(t)$

- $y_l(t)$ est la solution libre ou solution générale de l'équation sans second membre (ou équation homogène)

$$a_0 y_l + a_1 \frac{dy_l}{dt} + a_2 \frac{d^2 y_l}{dt^2} = 0$$

Elle correspond au régime libre du circuit (c'est-à-dire sources éteintes).

- $y_f(t)$ est la solution forcée ou solution particulière de l'équation avec second membre (ou équation complète)

Elle correspond à $a_0 y_f + a_1 \frac{dy_f}{dt} + a_2 \frac{d^2 y_f}{dt^2} = 0$ au régime permanent. Elle est du même type que le second membre : Si $f(t)$ est une constante, $y_f(t)$ est aussi une constante.

2.) Mise en équation et résolution

Equation de maille :

$$e(t) = u_L(t) + u_R(t) + u_C(t)$$

$$\Rightarrow e = L \frac{di}{dt} + Ri + u_C \quad (1)$$

$$\Rightarrow e = L C \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C \quad i = C \frac{du_C}{dt}$$

$$= \frac{e}{LC} = \frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C$$

Pour $t \geq 0$, $e = E$: $\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C = \frac{E}{LC}$ (A)

On dérive (1) : $\frac{de}{dt} = L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{du_C}{dt}$

$$\Rightarrow \frac{de}{dt} = L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C}$$

Pour $t \geq 0$, $e = E$: $\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i + \frac{i}{C} = 0$ $\widehat{m}_{\text{équ. diff}}$ (B)

A $t < 0$: $e = 0$ Régime continu permanent

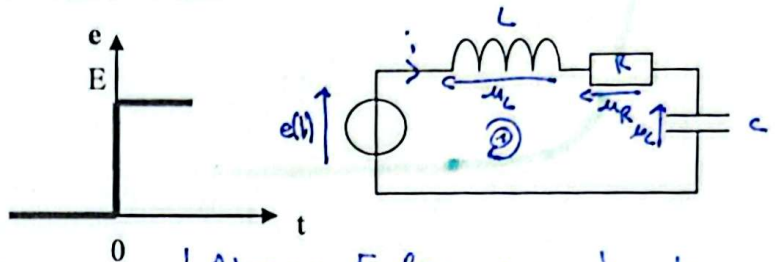
$i(0^-) = 0 \Rightarrow u_L(0^-) = 0$
 Or $u_L(0^-) = 0$ donc $u_C(0^-) = 0$

$\mathcal{E}_L = \frac{1}{2} L i^2$ et $\mathcal{E}_C = \frac{1}{2} C u_C^2$ sont fonctions chn

$$\Rightarrow u_C(0^+) = 0 \text{ et } i(0^+) = 0$$

$$i = C \frac{du_C}{dt} \Rightarrow \frac{du_C}{dt}(0^+) = 0$$

(1) à $t = 0^+$: $L \frac{di}{dt}(0^+) + Ri(0^+) + u_C(0^+) = E \Rightarrow \frac{di}{dt}(0^+) = \frac{E}{L}$



A $t \geq 0$: $e = E$ Régime permanent continu

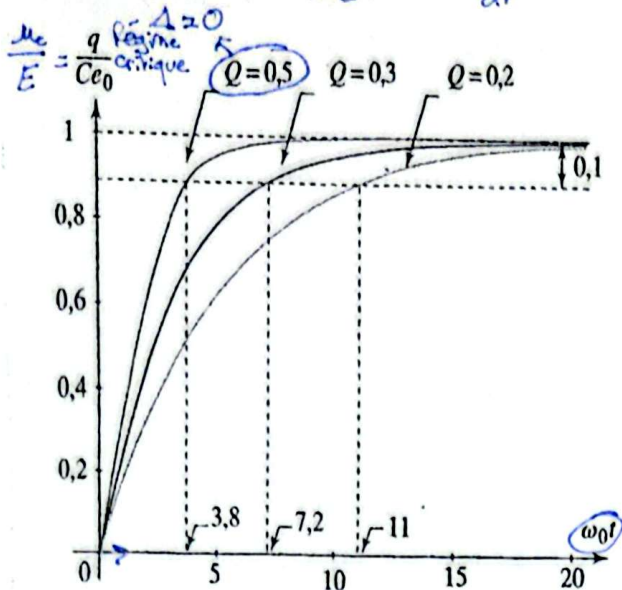
$i(t \rightarrow \infty) = 0 \Rightarrow u_L(t \rightarrow \infty) = 0$
 $E = u_C(t \rightarrow \infty)$

(A) : u_{Cp} ne change pas (cf I)
 $u_{Cp} \text{ est stat} \Rightarrow \frac{1}{LC} u_{Cp} = \frac{E}{LC} \Rightarrow u_{Cp} = E$

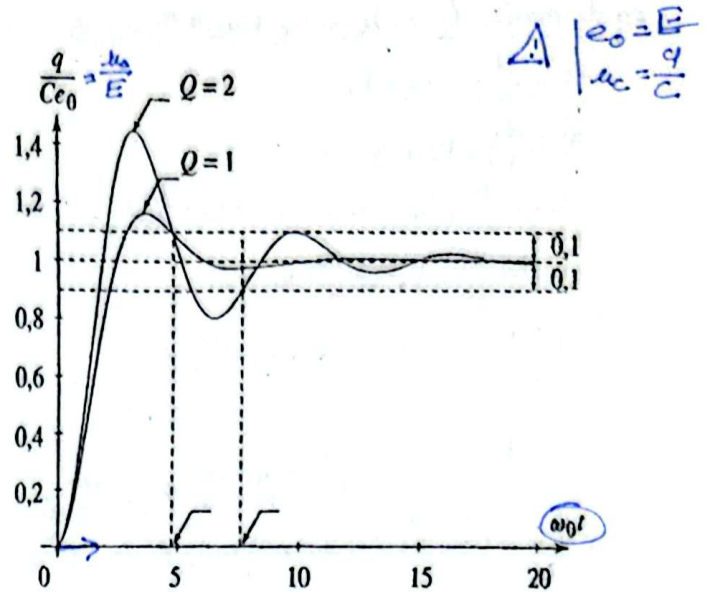
$\Delta < 0$	$u_C(t) = \exp(-\lambda t) \cdot [A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)] + E = K \exp(-\lambda t) \cos(\Omega t + \varphi) + E$
$\Delta > 0$	$u_C(t) = A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t} + E$
$\Delta = 0$	$u_C(t) = (At + B) e^{-\lambda t} + E$

3.) Les résultats

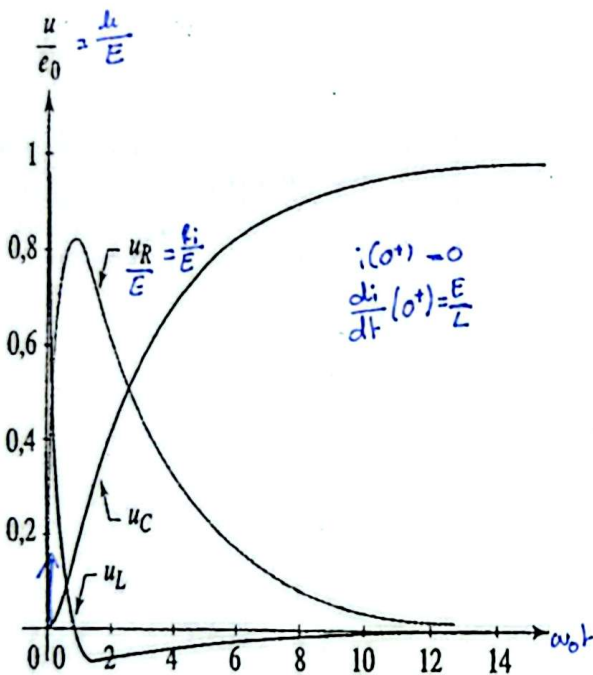
$u_c(0^+) = 0$ $\frac{du_c}{dt}(0^+) = 0$ demi tangente horizontale $u_c(\infty) = E$



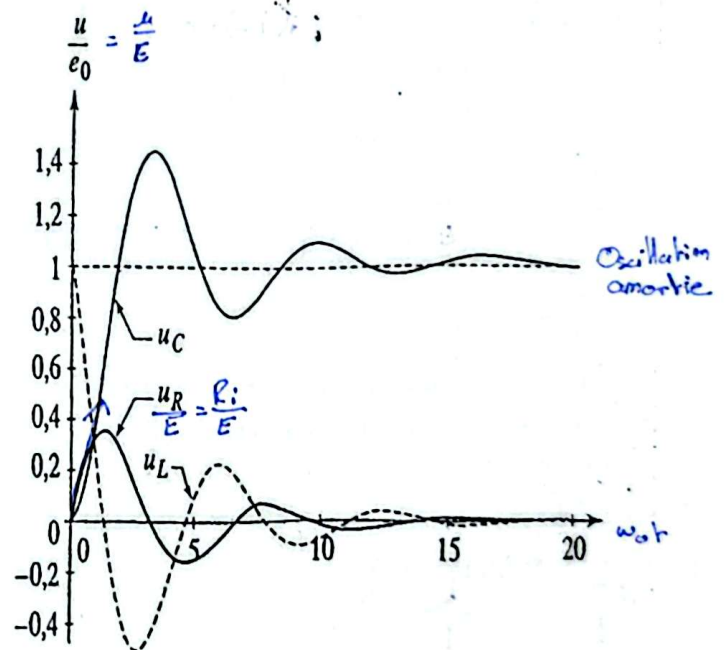
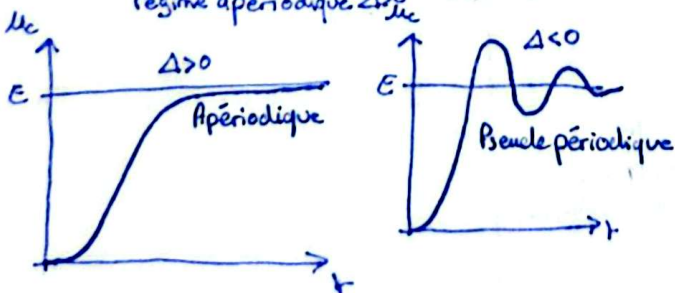
Doc. 35a. Réponse à un échelon de tension. Régimes apériodiques. ($\Delta > 0$) Sauf $Q = 0,5$



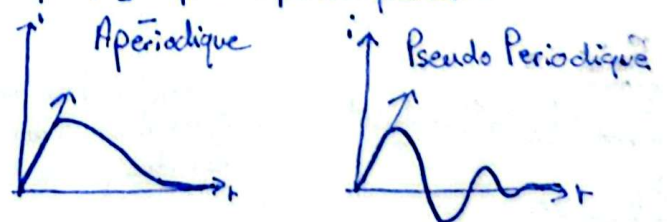
Doc. 36a. Réponse à un échelon de tension. Régimes pseudo-périodiques. ($\Delta < 0$)



Doc. 35c. Réponse à un échelon de tension. $Q = 0,3, < 0,5$ régime apériodique $\Delta > 0$



Doc. 36c. Réponse à un échelon de tension. $Q = 2, > 0,5$ Régime pseudo périodique $\Delta < 0$



4.) Bilan énergétique

eq de maille ① : $u_L + u_R + u_C = e$

$$u_L = L \frac{di}{dt} \quad u_R = Ri$$

$$\Rightarrow L \frac{di}{dt} + Ri + u_C = e$$

$$\Rightarrow L i \frac{di}{dt} + Ri^2 + u_C i = e i \quad \text{or } i \frac{du_C}{dt}$$

$$\Rightarrow L i \frac{di}{dt} + Ri^2 + C \frac{du_C}{dt} u_C = e i$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L i^2 \right)}_{\text{CVR}} + \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C u_C^2 \right)}_{\text{CVG}} + \underbrace{R i^2}_{\text{CVR}} = e i$$

$$\Rightarrow \int_0^t \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L i^2 \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C u_C^2 \right) + R i^2 \right) dt = \int_0^t e i dt$$

$P_{\text{stockée dans L+C}} + P_{\text{dissipée par effet Joule}} = P_{\text{générée par le géné.}}$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{2} L i^2 + \frac{1}{2} C u_C^2 \right]_0^t + \int_0^t R i^2 dt = \int_0^t e i dt$$

$$\boxed{\underbrace{E_{\text{stockée ds L+C}}}_{0 \rightarrow t} + \underbrace{E_{\text{dissipée ds R}}}_{0 \rightarrow t} = \underbrace{E_{\text{générée}}}_{0 \rightarrow t}} \quad \text{②}$$

per cas: $\begin{cases} u_C(0^+) = 0 & u_C(t_{\infty}) = E \\ i(0^+) = 0 & i(t_{\infty}) = 0 \end{cases} \quad (C \neq 0)$

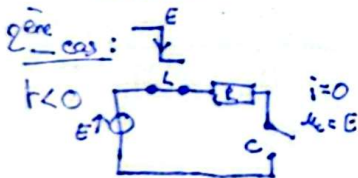
$$E_C = \left[\frac{1}{2} C u_C^2 \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2} C E^2$$

$$E_L = \left[\frac{1}{2} L i^2 \right]_0^{+\infty} = 0$$

$$E_{\text{générée}} = \int_0^{+\infty} E i dt = E \int_0^{+\infty} i dt = C E \left[u_C \right]_0^{+\infty} = C E^2$$

$$\text{③} \Rightarrow E_R = \frac{1}{2} C E^2$$

La moitié de l'énergie est stockée dans le condensateur et l'autre moitié est dissipée par la résistance.



$$\text{à } t=0^+ : i(0^+) = 0 \quad u_C(0^+) = E \quad \left| \begin{array}{l} P^* \text{ continue} \end{array} \right.$$

$$\text{à } t=+\infty : i(t_{\infty}) = 0 \quad u_C(t_{\infty}) = 0$$

$$E_{\text{générée}} = 0$$

$$E_C = \left[\frac{1}{2} C u_C^2 \right]_0^{+\infty} = -\frac{1}{2} C E^2$$

$$E_L = 0$$

$$E_R = -E_C = \frac{1}{2} C E^2$$

Le condensateur sert de générateur. Toute son énergie est dissipée sous forme de chaleur.

Rq: Si le condensateur est initialement chargé avec $u_C(0^+) = E$ $\left| \begin{array}{l} E_{C0 \rightarrow +\infty} = -\frac{1}{2} C E^2 \\ E_{R0 \rightarrow +\infty} = -E_{C0 \rightarrow +\infty} \end{array} \right.$

III Oscillateur amorti avec frottement visqueux

1.) Mise en équation

https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Meca/Oscillateurs/oscillateur_horizontal.php

Syst: {perle $M(m)$ } qui coulisse le long d'un axe horizontal

Ref: terrestre supp. galiléen

Forces: $\vec{F}_r = -k(l - l_0)\vec{e}_x$ où $\vec{e}_x$ est de la sec de l'étirement du ressort L

- $\vec{P} = m\vec{g}$

- $\vec{R}_N \perp (Ox)$ en frottement solide

- Frottement fluide $\vec{F}_f = -\alpha \vec{v}$
 α le coef de frottement du fluide

Système très petit, assimilé à un point matériel
 $M = G$

À l'équilibre: $\vec{F}_r + \vec{P} + \vec{R}_N = \vec{0}$

En projetant sur (Ox) : $-k(l_{eq} - l_0) = 0$
 $\Rightarrow l_{eq} = l_0$

Deuxième loi de Newton: $m\vec{a} = \sum \vec{F}$

$\vec{OM} = x\vec{e}_x$ où $x = l - l_0$

$\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x$ $\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x$

$m\ddot{x}\vec{e}_x = -kx\vec{e}_x + \vec{P} + \vec{R}_N - \alpha\dot{x}\vec{e}_x$

Proj sur (Ox) : $m\ddot{x} = -kx - \alpha\dot{x}$

$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$ (1)

Forme canonique:

(a) $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

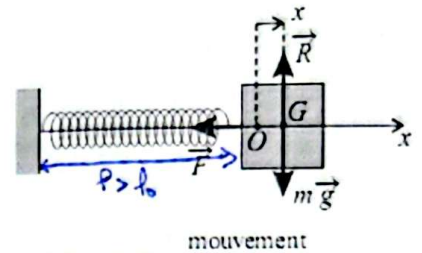
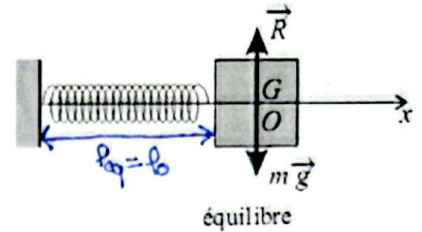
(b) $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ $2\lambda = \frac{\omega_0}{Q} \Rightarrow \lambda = \frac{\omega_0}{2Q}$

Par identification entre (1) et (a):

$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ pulsation propre (en rad.s^{-1})

$2\lambda = \frac{\alpha}{m} \Rightarrow \lambda = \frac{\alpha}{2m}$ coef d'amortissement (en s^{-1})

Pq: dimension de α : $[\alpha] = \frac{[F]}{[v]} = \frac{[ma]}{[v]} = \frac{[kg.m.s^{-2}]}{[m.s^{-1}]} = kg.s^{-1}$



Par identification entre (1) et (b):

$\frac{\alpha}{m} = \frac{\omega_0}{Q} \Rightarrow Q = \frac{\omega_0 m}{\alpha}$ (c)

$Q = \frac{m\omega_0^2}{\alpha\omega_0} = \frac{m}{\alpha\omega_0} \times \frac{k}{m} = \frac{k}{\alpha\omega_0}$

$Q = \frac{k}{\alpha\omega_0}$

(c) $\Rightarrow Q = \frac{m}{\alpha} \times \sqrt{\frac{k}{m}}$

$\Rightarrow Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}$

Pacteur de qualité (sans dimension)

Pq: Pas de frottement $\alpha = 0$

$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ SE3

Oscillateur harmonique

① $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\alpha}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0$ Formes canoniques : ② $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$ ou $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$ ③

Pulsation propre	Coefficient d'amortissement	Facteur de qualité
$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ (en rad.s ⁻¹)	$\lambda = \frac{\alpha}{2m}$ (en s ⁻¹)	$Q = \frac{m\omega_0}{\alpha} = \frac{k}{\alpha\omega_0} = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}$ (sans dim)

2.) Analogie électromécanique

Mécanique	Electricité
Equation différentielle : ① : $\ddot{x} + \frac{k}{m} x + \frac{\alpha}{m} \dot{x} = 0$	$\ddot{u}_C + \frac{R}{L} \dot{u}_C + \frac{1}{LC} u_C = 0$ $\boxed{\ddot{q} + \frac{R}{L} \dot{q} + \frac{1}{LC} q = 0}$ $\downarrow \times C$
$\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$	② $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$
Pulsation propre : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
Facteur de qualité $Q = \frac{m\omega_0}{\alpha} = \frac{k}{\alpha\omega_0} = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}$	$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L} \Rightarrow Q = \frac{L\omega_0}{R}$
Elongation : $x(t) = p(t) - p_0$	charge $q(t) = C u_C(t)$
Vitesse : $v = \dot{x}$	intensité $i = \frac{dq}{dt}$
Masse : m ($E_c = \frac{1}{2} m v^2$)	inductance propre L ($E_L = \frac{1}{2} L i^2$)
Coefficient de frottement fluide : α (perte sous forme de chaleur)	Résistance R (perte sous effet Joule) Chaleur
Raideur du ressort : k $E_{pe} = \frac{1}{2} k x^2$	$\frac{1}{C}$ l'inverse de la capacité du condensateur ($E_c = \frac{1}{2} C u_C^2 = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$)
Energie mécanique : $E_m = E_c + E_{pe}$ (car E_{pp} est)	Energie stockée de $L+C$ $E = E_L + E_c$

Equation caracteristique : $r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$ $\Delta = 4(\lambda^2 - \omega_0^2)$

3.) Solutions

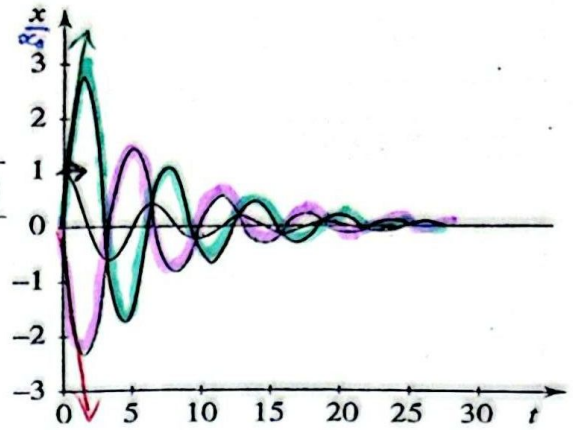
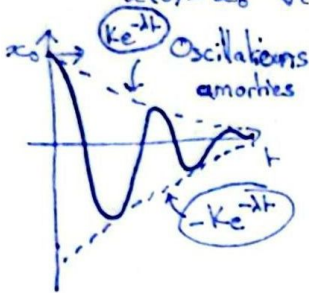
a) Régime pseudo-périodique

$$\Delta < 0 \quad \lambda < \omega_0 \quad \text{ou} \quad Q > \frac{1}{2}$$

$$x(t) = \exp(-\lambda t) \cdot [A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)] = K \exp(-\lambda t) \cos(\Omega t + \varphi)$$

racines : $r = \frac{-2\lambda \pm j\sqrt{-\Delta}}{2} = -\lambda \pm j\sqrt{\frac{-\Delta}{4}}$
 $r = -\lambda \pm j\Omega$ où $\Omega = \sqrt{\frac{-\Delta}{4}}$ pseudo pulsation
 $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ pseudo période

At $t=0$ On étire le ressort, et on le lâche sans vitesse init
 $x(0) = x_0$ $v(0) = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt}(0) = 0$



Doc. 12. Oscillateur harmonique amorti par frottement fluide : régime pseudo-périodique ($Q > \frac{1}{2}$).

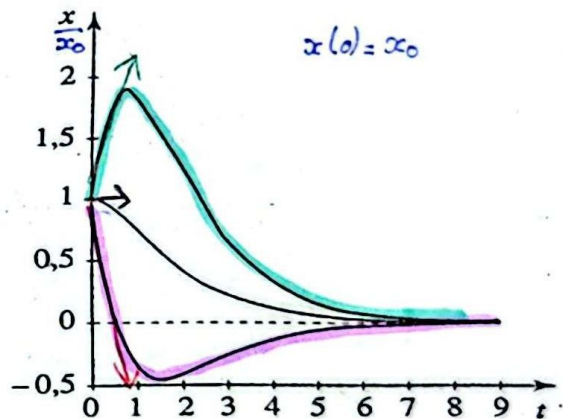
Le mobile est lâché en $x = x_0$ avec une vitesse v_0 positive, nulle ou négative pour les trois cas apparaissant sur la figure.

b) Régime aperiodique

$$\Delta > 0 \quad \lambda > \omega_0 \quad \text{ou} \quad Q < \frac{1}{2}$$

$$x(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$$

Racines : $r = \frac{2\lambda \pm \sqrt{\Delta}}{2}$
 $\Rightarrow r = \lambda \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$
 $\begin{cases} r_1 = -\lambda + \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \\ r_2 = -\lambda - \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \end{cases}$



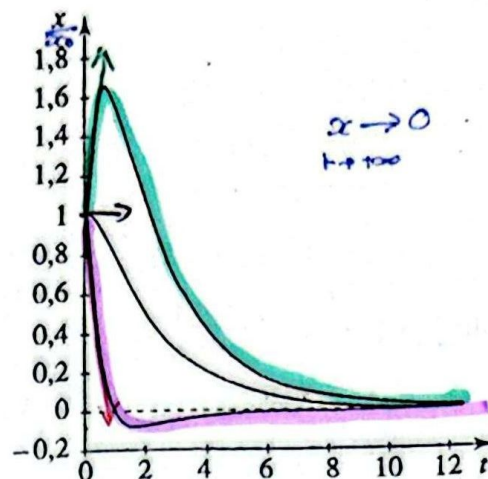
Doc. 17. Oscillateur harmonique amorti par frottement fluide : régime aperiodique ($Q < \frac{1}{2}$) suivant les conditions initiales, l'élongation passe par un extremum ou tend uniformément vers zéro.

— $v_0 < 0$
 — $v_0 = 0$
 — $v_0 > 0$

c) Régime critique

$$\Delta=0 \quad \lambda = \omega_0 \quad \text{ou} \quad Q = \frac{1}{2}$$

$$x(t) = (At + B)e^{-\lambda t}$$



Doc. 15. Oscillateur harmonique amorti par frottement fluide : régime critique ($Q = \frac{1}{2}$). Les conditions initiales sont les mêmes que celles du mouvement pseudo-périodique (doc. 12). Dans tous les cas, le retour à l'équilibre s'effectue plus rapidement.

— $V_0 < 0$
— $V_0 = 0$
— $V_0 > 0$

4.) Bilan énergétique

LFD projetée sur (Ox) : $m\ddot{x} = -\alpha\dot{x} - kx$
 $\Rightarrow m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0$

$$xV \text{ où } V = \dot{x} \Rightarrow m\dot{x}\ddot{x} + \alpha\dot{x}^2 + kx\dot{x} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 \right) + \alpha V^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} k x^2 \right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 \right) = -\alpha V^2$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} [E_c + E_{pe}] = -\alpha V^2 < 0 \text{ car } \alpha > 0$$

$$\Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = -\alpha V^2 < 0 \text{ où } E_m = E_c + E_{pe} + \text{cste}$$

Diminution de E_m au cours du temps. Force de frottement fluide $\Rightarrow$ dissipation d'énergie ss forme de chaleur