PROGRAMMES 7 et 8.

PROGRAMME 7 : du 17/11 au 21/11

Reprise des complexes

Primitives et calcul d'intégrales

- ★ Définition d'une primitive d'une fonction définie sur un intervalle à valeurs réelles. Description de l'ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle connaissant l'une d'entre elles. Savoir reconnaître les dérivées de fonctions composées.
- ★ Théorème fondamental de l'analyse : toute fonction continue f sur un intervalle I admet des primitives. Plus précisément, si $a \in I$ alors $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a. Calcul d'une intégrale au moyen d'une primitive.
- ★ Définition des fonctions de classe C^1. Intégration par parties pour des fonctions de classe C^1. Changement de variables. Applications aux fonctions paires, impaires, périodiques.
- ★ Primitives usuelles.
- ★ Calcul de primitives / intégrales des fonctions de la forme $x \mapsto P(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$ où P est un polynôme, $x \mapsto \cos^p x \sin^q x$, $x \mapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$.
- ★ Extension aux fonctions complexes. Application au calcul de primitives / intégrales de fonctions de la forme $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)$ et $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)$ où a et b sont des réels.

Un énoncé au choix à demander

- ❒ Définition du module de $z \in \mathbb{C}$ (2 expressions à donner)
- ❒ Donner 2 caractérisations pour $z \in \mathbb{R}$, 2 caractérisations pour $z \in i\mathbb{R}$
- ❒ Traduire $|z| = 1$ de trois manières ($x^2+y^2=1$ si $x = \mathrm{Re}(z), y = \mathrm{Im}(z)$, $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$, $\exists \theta \in \mathbb{R}, z = e^{i\theta}$)
- ❒ Inégalité triangulaire
- ❒ Formules d'Euler
- ❒ Propriétés algébrique des $e^{i\theta}$, formule de Moivre
- ❒ Écriture trigonométrique d'un complexe non nul
- ❒ Résultat sur les racines carrées d'un complexe non nul
- ❒ Solutions de l'équation $az^2+bz+c=0$ avec a, b, c complexes, $a \neq 0$
- ❒ Relations racines/coefficients pour une équation de degré 2
- ❒ Racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité : définition et théorème
- ❒ Définition de e^z pour $z \in \mathbb{C}$ et principales propriétés
- ❒ Caractérisation de la colinéarité, de l'orthogonalité de 2 vecteurs
- ❒ Interprétation de $z \mapsto kz$ ($k \in \mathbb{R}^*$), $z \mapsto e^{i\theta}z$ ($\theta \in \mathbb{R}$), $z \mapsto az$ ($a \in \mathbb{C}^*$ de module distinct de 1)
- ❒ Définition d'une primitive
- ❒ Théorème fondamental de l'analyse
- ❒ 3 primitives usuelles issues du tableau des primitives usuelles (il faut savoir retrouver une primitive de tan et de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$).
- ❒ Résultats d'intégration sur les fonctions paires / impaires, périodiques.

Démonstrations

- ❒ **Exemple fait en cours :** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z+1)^5-(z-1)^5=0$.
- ❒ Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue et a et b deux éléments de I.
  Alors, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b)-F(a)$ où F est une primitive de f sur I.
- ❒ **Exemple fait en cours :** Calcul de $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ par le changement de variables $x=\sin(t)$.

✷ ✷

PROGRAMME 8 : du 24/11 au 28/11

Reprise des primitives et calcul d'intégrales

Équations différentielles linéaires du premier ordre (EDL_1)

Soit $(E) : a(x)y'(x)+b(x)y(x)=c(x)$ où a, b, c sont des fonctions continues définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs réelles ou complexes. On suppose que la fonction a ne s'annule pas sur l'intervalle I.

- ★ Équation homogène associée.
- ★ Forme des solutions : somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène.
- ★ Cas particulier où la fonction a est constante.
- ★ Résolution de l'équation homogène.
- ★ Méthode de la variation de la constante.
- ★ Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.

Un énoncé au choix à demander

- ❒ Définition d'une primitive
- ❒ Théorème fondamental de l'analyse
- ❒ 3 primitives usuelles issues du tableau des primitives usuelles (il faut savoir retrouver une primitive de tan et de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$)
- ❒ Résultats d'intégration sur les fonctions paires / impaires, périodiques
- ❒ Théorème donnant l'ensemble des solutions d'une EDL_1 sans second membre

Démonstrations

- ❒ Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue et a et b deux éléments de I.
  Alors, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b)-F(a)$ où F est une primitive de f sur I.
- ❒ Calcul de $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.
- ❒ Recherche des primitives de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+x+1}$.